Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html
Prednáška 1

18. septembra 2023

Podmienky

- nepovinná účasť na prednáškach (!nie na cvičeniach!)
- jedinečná možnosť pýtať sa!!!
- podmienky ku skúške (zverejnené koncom semestra)

Obsah

I. Logika, množiny – elementy výrokového počtu, základy množinovej algebry

II. Úvod do reálnych funkcií – zobrazenia, základné vlastnosti reálnych funkcií (párnosť/nepárnosť, ohraničenosť, monotónnosť, ...), elementárne funkcie, spojitosť funkcie

III. Diferenciálny počet – základné vlastnosti, využitie derivácie pri vyšetrovaní priebehu, aplikácie diferenciálneho počtu

IV. Integrálny počet – primitívna funkcia, integrovanie niektorých tried, Newtonov integrál a jeho aplikácie

Podmienky

- nepovinná účasť na prednáškach (!nie na cvičeniach!)
- jedinečná možnosť pýtať sa!!!
- podmienky ku skúške (zverejnené koncom semestra)

Obsah

I. Logika, množiny – elementy výrokového počtu, základy množinovej algebry

II. Úvod do reálnych funkcií – zobrazenia, základné vlastnosti reálnych funkcií (párnosť/nepárnosť, ohraničenosť, monotónnosť, ...), elementárne funkcie, spojitosť funkcie

III. Diferenciálny počet – základné vlastnosti, využitie derivácie pri vyšetrovaní priebehu, aplikácie diferenciálneho počtu

IV. Integrálny počet – primitívna funkcia, integrovanie niektorých tried, Newtonov integrál a jeho aplikácie

Literatúra k prednáškam

1. Mihalíková, B. – Ohriska, J.: *Matematická analýza 1*, el. skriptá UPJŠ, Košice, 2012. `http://www.upjs.sk/public/media/5596/Matematicka-analyza-I.pdf`
2. Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: *Matematika I.*, Alfa, Bratislava, 1966 (v závislosti od vydania).
3. časti elektronického textu sprístupňovaného na stránke `umv.science.upjs.sk/analyza` pri predmete FRPa/19
4. ďalšie dostupné texty...

(Jeden) pár úvodných zamyslení

I: Čo je vlastne matematika?

Matematika môže byť definovaná ako jav, pri ktorom nikdy nevieme, o čom je reč, ani či to, čo sme povedali, je pravda.

Bertrand Russell

Mathematics is not a deductive science – that's a cliche. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork.

Paul R. Halmos: *I want to be a Mathematician* (1985)

Boh je matematik... Matematika je prostriedok špeciálne prispôsobený na osvojenie si rôznych abstraktných pojmov, a čo sa toho týka, jej moc je neohraničená.

Paul Dirac

(Jeden) pár uvodných zamyslení
II: O čom by malo byť štúdium (a výučba) matematiky?

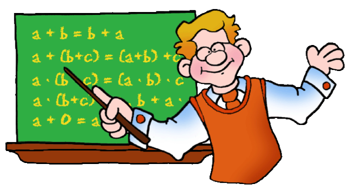
Matematika by nemala byť o vzorcoch, úpravách výrazov, či formálnom reprodukovaní algoritmických postupov bez vnútorného porozumenia. Mala by študentov naučiť

- vyjadrovať sa jasne a jednoznačne
- vštepovať im potrebu neustále si klásť otázku PREČO?
- vyžadovať argumenty a zároveň vecne a logicky diskutovať a argumentovať...

Burjan: zdroj `http://www.sme.sk/c/4163724/koniec-prirodnych-vied.html`

To teach effectively a teacher must develop a feeling for his subject; he cannot make his students sense its vitality if he does not sense it himself. He cannot share his enthusiasm when he has no enthusiasm to share. How he makes his point may be as important as the point he makes; he must personally feel it to be important.

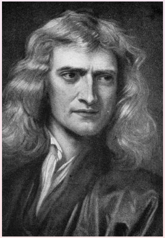
George Pólya: *Mathematical Discovery* (1981)



Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy

- predchodcovia: Archimedes, Kepler, Fermat, Descartes
- oficiálny vznik v 17. storočí: Newton, Leibniz
- kvantitatívny rozmach v 18. storočí: Euler, Laplace, Lagrange
- upresňovanie základov v 19. storočí: Cauchy, Bolzano, Riemann, Weierstrass, Cantor
- 20. storočie – konglomerát teórií

MAN = **disciplína zaoberajúca sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúra polohy) a štruktúrou algebrických operácií.**

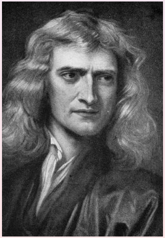




Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy

- predchodcovia: Archimedes, Kepler, Fermat, Descartes
- oficiálny vznik v 17. storočí: Newton, Leibniz
- kvantitatívny rozmach v 18. storočí: Euler, Laplace, Lagrange
- upresňovanie základov v 19. storočí: Cauchy, Bolzano, Riemann, Weierstrass, Cantor
- 20. storočie – konglomerát teórií

MAN = **disciplína zaoberajúca sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúra polohy) a štruktúrou algebrických operácií.**

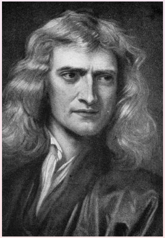




Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy

- predchodcovia: Archimedes, Kepler, Fermat, Descartes
- oficiálny vznik v 17. storočí: Newton, Leibniz
- kvantitatívny rozmach v 18. storočí: Euler, Laplace, Lagrange
- upresňovanie základov v 19. storočí: Cauchy, Bolzano, Riemann, Weierstrass, Cantor
- 20. storočie – konglomerát teórií

MAN = **disciplína zaoberajúca sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúra polohy) a štruktúrou algebrických operácií.**

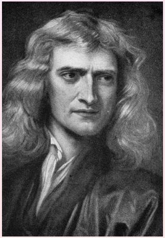




Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy

- predchodcovia: Archimedes, Kepler, Fermat, Descartes
- oficiálny vznik v 17. storočí: Newton, Leibniz
- kvantitatívny rozmach v 18. storočí: Euler, Laplace, Lagrange
- upresňovanie základov v 19. storočí: Cauchy, Bolzano, Riemann, Weierstrass, Cantor
- 20. storočie – konglomerát teórií

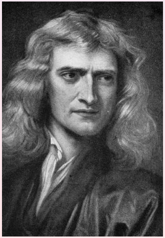
MAN = **disciplína zaoberajúca sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúra polohy) a štruktúrou algebrických operácií.**

Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy

- predchodcovia: Archimedes, Kepler, Fermat, Descartes
- oficiálny vznik v 17. storočí: Newton, Leibniz
- kvantitatívny rozmach v 18. storočí: Euler, Laplace, Lagrange
- upresňovanie základov v 19. storočí: Cauchy, Bolzano, Riemann, Weierstrass, Cantor
- 20. storočie – konglomerát teórií

MAN = **disciplína zaoberajúca sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúra polohy) a štruktúrou algebrických operácií.**

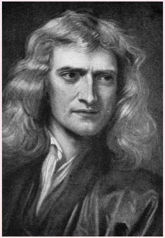




Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy

- predchodcovia: Archimedes, Kepler, Fermat, Descartes
- oficiálny vznik v 17. storočí: Newton, Leibniz
- kvantitatívny rozmach v 18. storočí: Euler, Laplace, Lagrange
- upresňovanie základov v 19. storočí: Cauchy, Bolzano, Riemann, Weierstrass, Cantor
- 20. storočie – konglomerát teórií

MAN = **disciplína zaoberajúca sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúra polohy) a štruktúrou algebrických operácií.**





Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy schématicky

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy schématicky

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy schématicky

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy schématicky

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy schématicky

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy schématicky

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy schématicky

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Elementy výrokového počtu

Štýl matematického textu je určený jeho cieľmi, ktorými môže byť:

- vo forme pravdivých výrokov oznámiť fakty o nejakom objekte, predmete patriacom do matematiky (číslo, teleso, rovnica, ...),
- udať, stanoviť dôvody pre správnosť (pravdivosť) uvedených výrokov,
- ukázať, ako tieto výroky navzájom súvisia.

Výrok je gramatická veta, o ktorej je možné rozhodnúť, či je pravdivá alebo nie. Niektoré výroky, ktoré sú zaručene pravdivé, sú osobitne zaznamenávané a nazývajú sa matematické vety (Pytagorova veta, Binomická veta, ...).

Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).

Elementy výrokového počtu

Štýl matematického textu je určený jeho cieľmi, ktorými môže byť:

- vo forme pravdivých výrokov oznámiť fakty o nejakom objekte, predmete patriacom do matematiky (číslo, teleso, rovnica, ...),
- udať, stanoviť dôvody pre správnosť (pravdivosť) uvedených výrokov,
- ukázať, ako tieto výroky navzájom súvisia.

Výrok je gramatická veta, o ktorej je možné rozhodnúť, či je pravdivá alebo nie. Niektoré výroky, ktoré sú zaručene pravdivé, sú osobitne zaznamenávané a nazývajú sa matematické vety (Pytagorova veta, Binomická veta, ...).

Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).

Elementy výrokového počtu

Štýl matematického textu je určený jeho cieľmi, ktorými môže byť:

- vo forme pravdivých výrokov oznámiť fakty o nejakom objekte, predmete patriacom do matematiky (číslo, teleso, rovnica, ...),
- udať, stanoviť dôvody pre správnosť (pravdivosť) uvedených výrokov,
- ukázať, ako tieto výroky navzájom súvisia.

Výrok je gramatická veta, o ktorej je možné rozhodnúť, či je pravdivá alebo nie. Niektoré výroky, ktoré sú zaručene pravdivé, sú osobitne zaznamenávané a nazývajú sa matematické vety (Pytagorova veta, Binomická veta, ...).

Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).

Elementy výrokového počtu

Štýl matematického textu je určený jeho cieľmi, ktorými môže byť:

- vo forme pravdivých výrokov oznámiť fakty o nejakom objekte, predmete patriacom do matematiky (číslo, teleso, rovnica, ...),
- udať, stanoviť dôvody pre správnosť (pravdivosť) uvedených výrokov,
- ukázať, ako tieto výroky navzájom súvisia.

Výrok je gramatická veta, o ktorej je možné rozhodnúť, či je pravdivá alebo nie. Niektoré výroky, ktoré sú zaručene pravdivé, sú osobitne zaznamenávané a nazývajú sa matematické vety (Pytagorova veta, Binomická veta, ...).

Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).

Elementy výrokového počtu

Štýl matematického textu je určený jeho cieľmi, ktorými môže byť:

- vo forme pravdivých výrokov oznámiť fakty o nejakom objekte, predmete patriacom do matematiky (číslo, teleso, rovnica, ...),
- udať, stanoviť dôvody pre správnosť (pravdivosť) uvedených výrokov,
- ukázať, ako tieto výroky navzájom súvisia.

Výrok je gramatická veta, o ktorej je možné rozhodnúť, či je pravdivá alebo nie. Niektoré výroky, ktoré sú zaručene pravdivé, sú osobitne zaznamenávané a nazývajú sa matematické vety (Pytagorova veta, Binomická veta, ...).

Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).

Elementy výrokového počtu

Štýl matematického textu je určený jeho cieľmi, ktorými môže byť:

- vo forme pravdivých výrokov oznámiť fakty o nejakom objekte, predmete patriacom do matematiky (číslo, teleso, rovnica, ...),
- udať, stanoviť dôvody pre správnosť (pravdivosť) uvedených výrokov,
- ukázať, ako tieto výroky navzájom súvisia.

Výrok je gramatická veta, o ktorej je možné rozhodnúť, či je pravdivá alebo nie. Niektoré výroky, ktoré sú zaručene pravdivé, sú osobitne zaznamenávané a nazývajú sa matematické vety (Pytagorova veta, Binomická veta, ...).

Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).

Elementy výrokového počtu

Tvorenie nových výrokov

a) negácia ... nie je pravda, že platí A; ozn. non A, $\neg A$
– platí výrok alebo jeho negácia

b) konjunkcia ... A a B, A a zároveň B; ozn. $A \wedge B$
– je pravdivá, ak obidva výroky A, B sú pravdivé

c) disjunkcia (alternatíva) ... A alebo B; ozn. $A \vee B$
– je pravdivá, ak aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý

d) implikácia ... A implikuje B, z A vyplýva B; ozn. $A \Rightarrow B$
– je nepravdivá v prípade, ak A je pravdivý výrok a B je nepravdivý výrok
– A je postačujúcou podmienkou pre B a výrok B je zasa nutnou podmienkou pre A
– $A \Rightarrow B$, A je predpoklad, B je záver
– $B \Rightarrow A$ je iný výrok ako $A \Rightarrow B$, nedá sa vo všeobecnosti obrátiť! (je to obrátená veta k vete $A \Rightarrow B$)

Elementy výrokového počtu

Tvorenie nových výrokov

a) negácia ... nie je pravda, že platí A; ozn. non A, $\neg A$
– platí výrok alebo jeho negácia

b) konjunkcia ... A a B, A a zároveň B; ozn. $A \wedge B$
– je pravdivá, ak obidva výroky A, B sú pravdivé

c) disjunkcia (alternatíva) ... A alebo B; ozn. $A \vee B$
– je pravdivá, ak aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý

d) implikácia ... A implikuje B, z A vyplýva B; ozn. $A \Rightarrow B$
– je nepravdivá v prípade, ak A je pravdivý výrok a B je nepravdivý výrok
– A je postačujúcou podmienkou pre B a výrok B je zasa nutnou podmienkou pre A
– $A \Rightarrow B$, A je predpoklad, B je záver
– $B \Rightarrow A$ je iný výrok ako $A \Rightarrow B$, nedá sa vo všeobecnosti obrátiť! (je to obrátená veta k vete $A \Rightarrow B$)

Elementy výrokového počtu

Tvorenie nových výrokov

a) negácia ... nie je pravda, že platí A; ozn. non A, $\neg A$
– platí výrok alebo jeho negácia

b) konjunkcia ... A a B, A a zároveň B; ozn. $A \wedge B$
– je pravdivá, ak obidva výroky A, B sú pravdivé

c) disjunkcia (alternatíva) ... A alebo B; ozn. $A \vee B$
– je pravdivá, ak aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý

d) implikácia ... A implikuje B, z A vyplýva B; ozn. $A \Rightarrow B$
– je nepravdivá v prípade, ak A je pravdivý výrok a B je nepravdivý výrok
– A je postačujúcou podmienkou pre B a výrok B je zasa nutnou podmienkou pre A
– $A \Rightarrow B$, A je predpoklad, B je záver
– $B \Rightarrow A$ je iný výrok ako $A \Rightarrow B$, nedá sa vo všeobecnosti obrátiť! (je to obrátená veta k vete $A \Rightarrow B$)

Elementy výrokového počtu

Tvorenie nových výrokov

a) negácia ... nie je pravda, že platí A; ozn. non A, $\neg A$
– platí výrok alebo jeho negácia

b) konjunkcia ... A a B, A a zároveň B; ozn. $A \wedge B$
– je pravdivá, ak obidva výroky A, B sú pravdivé

c) disjunkcia (alternatíva) ... A alebo B; ozn. $A \vee B$
– je pravdivá, ak aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý

d) implikácia ... A implikuje B, z A vyplýva B; ozn. $A \Rightarrow B$
– je nepravdivá v prípade, ak A je pravdivý výrok a B je nepravdivý výrok
– A je postačujúcou podmienkou pre B a výrok B je zasa nutnou podmienkou pre A
– $A \Rightarrow B$, A je predpoklad, B je záver
– $B \Rightarrow A$ je iný výrok ako $A \Rightarrow B$, nedá sa vo všeobecnosti obrátiť! (je to obrátená veta k vete $A \Rightarrow B$)

Elementy výrokového počtu

Tvorenie nových výrokov

a) negácia ... nie je pravda, že platí A; ozn. non A, $\neg A$
– platí výrok alebo jeho negácia

b) konjunkcia ... A a B, A a zároveň B; ozn. $A \wedge B$
– je pravdivá, ak obidva výroky A, B sú pravdivé

c) disjunkcia (alternatíva) ... A alebo B; ozn. $A \vee B$
– je pravdivá, ak aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý

d) implikácia ... A implikuje B, z A vyplýva B; ozn. $A \Rightarrow B$
– je nepravdivá v prípade, ak A je pravdivý výrok a B je nepravdivý výrok
– A je postačujúcou podmienkou pre B a výrok B je zasa nutnou podmienkou pre A
– $A \Rightarrow B$, A je predpoklad, B je záver
– $B \Rightarrow A$ je iný výrok ako $A \Rightarrow B$, nedá sa vo všeobecnosti obrátiť! (je to obrátená veta k vete $A \Rightarrow B$)

Elementy výrokového počtu

Tvorenie nových výrokov

e) ekvivalencia ... A platí práve vtedy, keď platí B, A platí vtedy a len vtedy, keď platí B; ozn. $A \Leftrightarrow B$, $A \equiv B$
– je pravdivá, ak obidva výroky sú pravdivé alebo obidva výroky sú nepravdivé
– A je nutnou a zároveň postačujúcou podmienkou pre B

Tabuľka pravdivostných hodnôt elementárnych výrokov:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Elementy výrokového počtu

> Mathematics consists in proving the most obvious thing in the least obvious way.
>
> George Pólya (1887–1985)

Veta I.1 (vlastnosti negácie, konjunkcie a disjunkcie)

Nech A, B, C sú výroky. Potom sú nasledujúce výroky vždy pravdivé bez ohľadu na pravdivosť výrokov A, B, C.

(i) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

(ii) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

(iii) $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$

(iv) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$

(v) $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

(vi) $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

(vii) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Poznámka: Výrok, ktorý je vždy pravdivý (bez ohľadu na pravdivosť vstupných výrokov), sa nazýva tautológia.

Elementy výrokového počtu

Veta I.2 (negácie elementárnych výrokov)

Nech A, B, C sú výroky. Potom sú nasledujúce výroky vždy pravdivé bez ohľadu na pravdivosť výrokov A, B, C.

(i) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(iii) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

(iv) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Tvrdenie I.3 (vzťah implikácie a ekvivalencie)

Nech A, B sú výroky. Potom výrok

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

je vždy pravdivý bez ohľadu na pravdivosť výrokov A a B.

Elementy výrokového počtu

Veta I.2 (negácie elementárnych výrokov)

Nech A, B, C sú výroky. Potom sú nasledujúce výroky vždy pravdivé bez ohľadu na pravdivosť výrokov A, B, C.

(i) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(iii) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

(iv) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Tvrdenie I.3 (vzťah implikácie a ekvivalencie)

Nech A, B sú výroky. Potom výrok

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

je vždy pravdivý bez ohľadu na pravdivosť výrokov A a B.

Elementy výrokového počtu

Veta I.2 (negácie elementárnych výrokov)

Nech A, B, C sú výroky. Potom sú nasledujúce výroky vždy pravdivé bez ohľadu na pravdivosť výrokov A, B, C.

(i) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(iii) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

(iv) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Veta I.4

Nech A, B, C sú výroky. Potom sú nasledujúce výroky vždy pravdivé bez ohľadu na pravdivosť výrokov A, B, C.

(i) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(ii) $((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$

Elementy výrokového počtu

Definícia (výroková forma)

Výroková forma $V(x_1, \ldots, x_n)$ je výraz, z ktorého vznikne výrok, keď za premenné $x_1, \ldots, x_n$ dosadíme prvky z množín $M_1, \ldots, M_n$. Takúto výrokovú formu s n premennými a príslušnými množinami $M_1, M_2, \ldots, M_n$ značíme

$$V(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n.$$

Príklad: Nech výroková forma V má tvar „x je hlavné mesto Slovenska“, kde za x dosadzujeme prvky z množiny všetkých slovenských miest. Potom $V(\text{Košice})$ je nepravdivý a $V(\text{Bratislava})$ je pravdivý výrok.

Definícia (kvantifikátory)

Nech $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma a $P \subset M$.

(i) Výrok „Pre každé $x \in P$ platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme v tvare $(\forall x \in P)\, V(x)$. Symbol $\forall$ nazývame všeobecný kvantifikátor.

(ii) Výrok „Existuje $x \in P$ také, že platí $V(x)$.“ zapisujeme v tvare $(\exists x \in P)\, V(x)$. Symbol $\exists$ nazývame existenčný kvantifikátor.

Elementy výrokového počtu

Definícia (výroková forma)

Výroková forma $V(x_1, \dots, x_n)$ je výraz, z ktorého vznikne výrok, keď za premenné $x_1, \dots, x_n$ dosadíme prvky z množín $M_1, \dots, M_n$. Takúto výrokovú formu s n premennými a príslušnými množinami $M_1, M_2, \dots, M_n$ značíme

$$V(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n.$$

Príklad: Nech výroková forma V má tvar „x je hlavné mesto Slovenska“, kde za x dosadzujeme prvky z množiny všetkých slovenských miest. Potom V(Košice) je nepravdivý a V(Bratislava) je pravdivý výrok.

Definícia (kvantifikátory)

Nech $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma a $P \subset M$.

(i) Výrok „Pre každé $x \in P$ platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme v tvare $(\forall x \in P)\, V(x)$. Symbol $\forall$ nazývame všeobecný kvantifikátor.

(ii) Výrok „Existuje $x \in P$ také, že platí $V(x)$.“ zapisujeme v tvare $(\exists x \in P)\, V(x)$. Symbol $\exists$ nazývame existenčný kvantifikátor.

Elementy výrokového počtu

Definícia (výroková forma)

Výroková forma $V(x_1, \dots, x_n)$ je výraz, z ktorého vznikne výrok, keď za premenné $x_1, \dots, x_n$ dosadíme prvky z množín $M_1, \dots, M_n$. Takúto výrokovú formu s n premennými a príslušnými množinami $M_1, M_2, \dots, M_n$ značíme

$$V(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n.$$

Negácia kvantifikátorov:

$$\neg((\forall x \in M)\, V(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in M)\, \neg V(x))$$

$$\neg((\exists x \in M)\, V(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in M)\, \neg V(x))$$

Poradie kvantifikátorov: Ak $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$ je výroková forma, tak

$$((\forall x \in M_1)(\forall y \in M_2)\, V(x, y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in M_2)(\forall x \in M_1)\, V(x, y))$$

$$((\exists x \in M_1)(\exists y \in M_2)\, V(x, y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in M_2)(\exists x \in M_1)\, V(x, y))$$

$$((\exists x \in M_1)(\forall y \in M_2)\, V(x, y)) \Rightarrow ((\forall y \in M_2)(\exists x \in M_1)\, V(x, y))$$

Elementy výrokového počtu

Definícia (výroková forma)

Výroková forma $V(x_1, \ldots, x_n)$ je výraz, z ktorého vznikne výrok, keď za premenné $x_1, \ldots, x_n$ dosadíme prvky z množín $M_1, \ldots, M_n$. Takúto výrokovú formu s n premennými a príslušnými množinami $M_1, M_2, \ldots, M_n$ značíme

$$V(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n.$$

Negácia kvantifikátorov:

$$\neg((\forall x \in M)\, V(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in M)\, \neg V(x))$$

$$\neg((\exists x \in M)\, V(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in M)\, \neg V(x))$$

Poradie kvantifikátorov: Ak $V(x, y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$ je výroková forma, tak

$$((\forall x \in M_1)(\forall y \in M_2)\, V(x, y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in M_2)(\forall x \in M_1)\, V(x, y))$$

$$((\exists x \in M_1)(\exists y \in M_2)\, V(x, y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in M_2)(\exists x \in M_1)\, V(x, y))$$

$$((\exists x \in M_1)(\forall y \in M_2)\, V(x, y)) \Rightarrow ((\forall y \in M_2)(\exists x \in M_1)\, V(x, y))$$

Elementy množinovej matematiky

Množinou rozumieme súbor objektov (prvkov), ktorý je popísaný tak, aby sme vedeli (aspoň teoreticky) rozhodnúť o každom objekte, či patrí alebo nepatrí do súboru.

– $a \in A$ ... a je prvkom množiny A; a je z A
– $a \notin A$ ... a nie je prvkom množiny A; a nie je z A
– $\emptyset$ ... prázdna množina, neobsahuje žiaden prvok

Operácie s množinami: Uvažujme množiny A, B.

- $A \subset B$ (podmnožina) ... $(\forall a \in A)\ a \in B$
- $A \cap B$ (prienik) ... $A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$
- $A \cup B$ (zjednotenie) ... $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$
- $A \setminus B$ (rozdiel) ... $A \setminus B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$
- $A = B$ (rovnosť) ... $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
- pre $A \subset B$ definujeme A^c (doplnok, komplement) ... $A^c = B \setminus A = \{b : b \in B \wedge b \notin A\}$

Elementy množinovej matematiky

Množinou rozumieme súbor objektov (prvkov), ktorý je popísaný tak, aby sme vedeli (aspoň teoreticky) rozhodnúť o každom objekte, či patrí alebo nepatrí do súboru.

– $a \in A$ ... a je prvkom množiny A; a je z A
– $a \notin A$ ... a nie je prvkom množiny A; a nie je z A
– $\emptyset$ ... prázdna množina, neobsahuje žiaden prvok

Operácie s množinami: Uvažujme množiny A, B.

- $A \subset B$ (podmnožina) ... $(\forall a \in A)\ a \in B$
- $A \cap B$ (prienik) ... $A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$
- $A \cup B$ (zjednotenie) ... $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$
- $A \setminus B$ (rozdiel) ... $A \setminus B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$
- $A = B$ (rovnosť) ... $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
- pre $A \subset B$ definujeme A^c (doplnok, komplement) ... $A^c = B \setminus A = \{b : b \in B \wedge b \notin A\}$

Elementy množinovej matematiky

Množinou rozumieme súbor objektov (prvkov), ktorý je popísaný tak, aby sme vedeli (aspoň teoreticky) rozhodnúť o každom objekte, či patrí alebo nepatrí do súboru.

– $a \in A$ ... a je prvkom množiny A; a je z A

– $a \notin A$ ... a nie je prvkom množiny A; a nie je z A

– $\emptyset$ ... prázdna množina, neobsahuje žiaden prvok

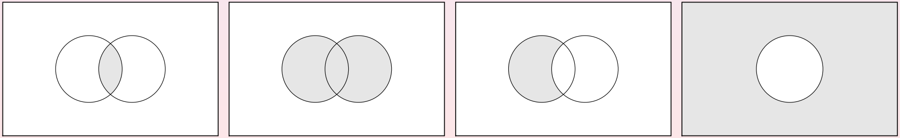
Operácie s množinami: Uvažujme množiny A, B.

- $A \subset B$ (podmnožina) ... $(\forall a \in A)\ a \in B$
- $A \cap B$ (prienik) ... $A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$
- $A \cup B$ (zjednotenie) ... $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$
- $A \setminus B$ (rozdiel) ... $A \setminus B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$
- $A = B$ (rovnosť) ... $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
- pre $A \subset B$ definujeme A^c (doplnok, komplement) ...
  $A^c = B \setminus A = \{b : b \in B \wedge b \notin A\}$

Elementy množinovej matematiky

Operácie s množinami: Uvažujme množiny A, B.

- $A \subset B$ (podmnožina) ... $(\forall a \in A)\ a \in B$
- $A \cap B$ (prienik) ... $A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$
- $A \cup B$ (zjednotenie) ... $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$
- $A \setminus B$ (rozdiel) ... $A \setminus B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$
- $A = B$ (rovnosť) ... $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
- pre $A \subset B$ definujeme A^c (doplnok, komplement) ...
  $A^c = B \setminus A = \{b : b \in B \wedge b \notin A\}$



Elementy množinovej matematiky

Tvrdenie I.5 (de Morganove pravidlá)

Nech X je množina a $\mathscr{A}$ je neprázdny systém množín. Potom

$$X \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} X \setminus A,$$

$$X \setminus \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} X \setminus A.$$

Úlohy na (pre)cvičenie

Dokážte alebo nájdite kontrapríklad:

◇ $A \cap B = B \cap A$;

◇ ak $C \subset A$ a $C \subset B$, tak $C \subset (A \cap B)$;

◇ $A = A \cup B$ práve vtedy, keď $B \subset A$;

◇ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$;

◇ $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

Elementy množinovej matematiky

Tvrdenie I.5 (de Morganove pravidlá)

Nech X je množina a $\mathscr{A}$ je neprázdny systém množín. Potom

$$X \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} X \setminus A,$$

$$X \setminus \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} X \setminus A.$$

Úlohy na (pre)cvičenie

Dokážte alebo nájdite kontrapríklad:

◇ $A \cap B = B \cap A$;

◇ ak $C \subset A$ a $C \subset B$, tak $C \subset (A \cap B)$;

◇ $A = A \cup B$ práve vtedy, keď $B \subset A$;

◇ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$;

◇ $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

Niečo o matematickej výstavbe

Matematická teória: axiómy, definície, vety, lemy, dôkazy...

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).
Definícia zavádza nový pojem (skratka pre nejakú vlastnosť) – **akk**!.
Vety a lemy hovoria o vlastnostiach pojmov a vzťahov medzi nimi.
Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Dôkazy matematických viet

a) priamo ... vychádzame z predpokladu A a využitím ďalších tvrdení dôjdeme k záveru B, t.j. $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

b) nepriamo ... je to priamy dôkaz obmenenej vety, t.j. vety $\neg B \Rightarrow \neg A$

c) sporom ... vychádzame z negácie výroku $A \Rightarrow B$, t.j. $(\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B))$ a pokúsime sa získať spor s výrokom A, $\neg B$, alebo nejakým platným výrokom (axiómou).

d) rozborom prípadov ... pri dokazovaní tvrdenia tvaru $(A \vee B) \Rightarrow C$ stačí dokázať tvdenia $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$.

e) matematickou indukciou ... ešte, ešte!!!

Niečo o matematickej výstavbe

Matematická teória: axiómy, definície, vety, lemy, dôkazy...

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).
Definícia zavádza nový pojem (skratka pre nejakú vlastnosť) – **akk**!.
Vety a lemy hovoria o vlastnostiach pojmov a vzťahov medzi nimi.
Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Dôkazy matematických viet

a) priamo ... vychádzame z predpokladu A a využitím ďalších tvrdení dôjdeme k záveru B, t.j. $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

b) nepriamo ... je to priamy dôkaz obmenenej vety, t.j. vety $\neg B \Rightarrow \neg A$

c) sporom ... vychádzame z negácie výroku $A \Rightarrow B$, t.j. $(\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B))$ a pokúsime sa získať spor s výrokom A, $\neg B$, alebo nejakým platným výrokom (axiómou).

d) rozborom prípadov ... pri dokazovaní tvrdenia tvaru $(A \vee B) \Rightarrow C$ stačí dokázať tvdenia $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$.

e) matematickou indukciou ... ešte, ešte!!!

Niečo o matematickej výstavbe

Matematická teória: axiómy, definície, vety, lemy, dôkazy...

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).
Definícia zavádza nový pojem (skratka pre nejakú vlastnosť) – **akk**!.
Vety a lemy hovoria o vlastnostiach pojmov a vzťahov medzi nimi.
Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Dôkazy matematických viet

a) priamo ... vychádzame z predpokladu A a využitím ďalších tvrdení dôjdeme k záveru B, t.j. $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

b) nepriamo ... je to priamy dôkaz obmenenej vety, t.j. vety $\neg B \Rightarrow \neg A$

c) sporom ... vychádzame z negácie výroku $A \Rightarrow B$, t.j. $(\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B))$ a pokúsime sa získať spor s výrokom A, $\neg B$, alebo nejakým platným výrokom (axiómou).

d) rozborom prípadov ... pri dokazovaní tvrdenia tvaru $(A \vee B) \Rightarrow C$ stačí dokázať tvdenia $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$.

e) matematickou indukciou ... ešte, ešte!!!

Niečo o matematickej výstavbe

Matematická teória: axiómy, definície, vety, lemy, dôkazy...

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).
Definícia zavádza nový pojem (skratka pre nejakú vlastnosť) – **akk**!.
Vety a lemy hovoria o vlastnostiach pojmov a vzťahov medzi nimi.
Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Dôkazy matematických viet

a) priamo ... vychádzame z predpokladu A a využitím ďalších tvrdení dôjdeme k záveru B, t.j. $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

b) nepriamo ... je to priamy dôkaz obmenenej vety, t.j. vety $\neg B \Rightarrow \neg A$

c) sporom ... vychádzame z negácie výroku $A \Rightarrow B$, t.j. $(\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B))$ a pokúsime sa získať spor s výrokom A, $\neg B$, alebo nejakým platným výrokom (axiómou).

d) rozborom prípadov ... pri dokazovaní tvrdenia tvaru $(A \vee B) \Rightarrow C$ stačí dokázať tvdenia $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$.

e) matematickou indukciou ... ešte, ešte!!!

Niečo o matematickej výstavbe

Matematická teória: axiómy, definície, vety, lemy, dôkazy...

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).
Definícia zavádza nový pojem (skratka pre nejakú vlastnosť) – **akk**!.
Vety a lemy hovoria o vlastnostiach pojmov a vzťahov medzi nimi.
Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Dôkazy matematických viet

a) priamo ... vychádzame z predpokladu A a využitím ďalších tvrdení dôjdeme k záveru B, t.j. $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

b) nepriamo ... je to priamy dôkaz obmenenej vety, t.j. vety $\neg B \Rightarrow \neg A$

c) sporom ... vychádzame z negácie výroku $A \Rightarrow B$, t.j. $(\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B))$ a pokúsime sa získať spor s výrokom A, $\neg B$, alebo nejakým platným výrokom (axiómou).

d) rozborom prípadov ... pri dokazovaní tvrdenia tvaru $(A \vee B) \Rightarrow C$ stačí dokázať tvdenia $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$.

e) matematickou indukciou ... ešte, ešte!!!

Niečo o matematickej výstavbe

Matematická teória: axiómy, definície, vety, lemy, dôkazy...

Axióma teórie je výrok, ktorý považujeme "automaticky" za pravdivý (axiómy bývajú prevzaté z inej teórie alebo zo skúseností).
Definícia zavádza nový pojem (skratka pre nejakú vlastnosť) – **akk**!.
Vety a lemy hovoria o vlastnostiach pojmov a vzťahov medzi nimi.
Dôkaz je úvaha, ktorá zaručuje platnosť matematickej vety.

Dôkazy matematických viet

a) priamo ... vychádzame z predpokladu A a využitím ďalších tvrdení dôjdeme k záveru B, t.j. $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$

b) nepriamo ... je to priamy dôkaz obmenenej vety, t.j. vety $\neg B \Rightarrow \neg A$

c) sporom ... vychádzame z negácie výroku $A \Rightarrow B$, t.j. $(\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B))$ a pokúsime sa získať spor s výrokom A, $\neg B$, alebo nejakým platným výrokom (axiómou).

d) rozborom prípadov ... pri dokazovaní tvrdenia tvaru $(A \vee B) \Rightarrow C$ stačí dokázať tvdenia $A \Rightarrow C$ a $B \Rightarrow C$.

e) matematickou indukciou ... ešte, ešte!!!

Zopár poznámok k označeniam

Význačné množiny čísel budeme označovať $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, ...

Ohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\} && \text{uzavretý interval;}\\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} && \text{otvorený interval;}\\
\langle a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\} && \text{polootvorený alebo polouzavretý interval;}\\
(a, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \le b\} && \text{polootvorený alebo polouzavretý interval.}
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nazývame rozšírená množina reálnych čísel (rozšírena číselná os).

Neohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(-\infty, a\rangle &= \{x \in \mathbb{R}; x \le a\};\\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R}; x < a\};\\
\langle b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; b \le x\};\\
(b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; b < x\}.
\end{aligned}$$

Zopár poznámok k označeniam

Význačné množiny čísel budeme označovať $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, ...

Ohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ uzavretý interval;

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ otvorený interval;

$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ polootvorený alebo polouzavretý interval;

$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ polootvorený alebo polouzavretý interval.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nazývame rozšírená množina reálnych čísel (rozšírena číselná os).

Neohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(-\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\};$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\};$$
$$\langle b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; b \leq x\};$$
$$(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; b < x\}.$$

Zopár poznámok k označeniam

Významné množiny čísel budeme označovať $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, ...

Ohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ uzavretý interval;

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ otvorený interval;

$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ polootvorený alebo polouzavretý interval;

$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ polootvorený alebo polouzavretý interval.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nazývame rozšírená množina reálnych čísel (rozšírena číselná os).

Neohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(-\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\};$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\};$$
$$\langle b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; b \leq x\};$$
$$(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; b < x\}.$$

Zopár poznámok k označeniam

Význačné množiny čísel budeme označovať $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, ...

Ohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ uzavretý interval;

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ otvorený interval;

$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ polootvorený alebo polouzavretý interval;

$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ polootvorený alebo polouzavretý interval.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nazývame rozšírená množina reálnych čísel (rozšírena číselná os).

Neohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(-\infty, a\rangle &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\};\\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R}; x < a\};\\
\langle b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; b \leq x\};\\
(b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; b < x\}.
\end{aligned}
$$

Absolútna hodnota reálneho čísla

Absolútna hodnota je hodnota, ktorá je absolútna. Teda sa o nej nešpekuluje. Je aká je a iná nebude.

Príklad: Ak je niekto absolútna nula, tak bude vždy nula a nič to nezmení.

Iný príklad: Ferko je absolútna jednička. Aj v tomto prípade sa už nič nedá robiť a dotyčný je jednoducho najlepší.

Necyklopédia (2016)

Definícia (absolútnej hodnoty reálneho čísla)

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum z dvojice čísel x a $-x$ a píšeme $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometrická interpretácia: absolútna hodnota čísla x predstavuje vzdialenosť obrazu čísla x od nuly na číselnej osi, t.j. $|x - y|$ predstavuje vzdialenosť obrazov čísel x a y na reálnej osi

Priamo z definície vyplýva (overte!), že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

1. $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
2. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$
3. $|x| \geq 0$ a $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|x| = |-x|$

Absolútna hodnota reálneho čísla

Absolútna hodnota je hodnota, ktorá je absolútna. Teda sa o nej nešpekuluje. Je aká je a iná nebude.

Príklad: Ak je niekto absolútna nula, tak bude vždy nula a nič to nezmení.

Iný príklad: Ferko je absolútna jednička. Aj v tomto prípade sa už nič nedá robiť a dotyčný je jednoducho najlepší.

Necyklopédia (2016)

Definícia (absolútnej hodnoty reálneho čísla)

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum z dvojice čísel x a $-x$ a píšeme $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometrická interpretácia: absolútna hodnota čísla x predstavuje vzdialenosť obrazu čísla x od nuly na číselnej osi, t.j. $|x - y|$ predstavuje vzdialenosť obrazov čísel x a y na reálnej osi

Priamo z definície vyplýva (overte!), že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

1. $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
2. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$
3. $|x| \geq 0$ a $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|x| = |-x|$

Absolútna hodnota reálneho čísla

> Absolútna hodnota je hodnota, ktorá je absolútna. Teda sa o nej nešpekuluje. Je aká je a iná nebude.
>
> Príklad: Ak je niekto absolútna nula, tak bude vždy nula a nič to nezmení.
>
> Iný príklad: Ferko je absolútna jednička. Aj v tomto prípade sa už nič nedá robiť a dotyčný je jednoducho najlepší.
>
> *Necyklopédia* (2016)

Definícia (absolútnej hodnoty reálneho čísla)

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum z dvojice čísel x a $-x$ a píšeme $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometrická interpretácia: absolútna hodnota čísla x predstavuje vzdialenosť obrazu čísla x od nuly na číselnej osi, t.j. $|x - y|$ predstavuje vzdialenosť obrazov čísel x a y na reálnej osi

Priamo z definície vyplýva (overte!), že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

1. $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
2. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$
3. $|x| \geq 0$ a $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|x| = |-x|$

Absolútna hodnota reálneho čísla

> Absolútna hodnota je hodnota, ktorá je absolútna. Teda sa o nej nešpekuluje. Je aká je a iná nebude.
>
> Príklad: Ak je niekto absolútna nula, tak bude vždy nula a nič to nezmení.
>
> Iný príklad: Ferko je absolútna jednička. Aj v tomto prípade sa už nič nedá robiť a dotyčný je jednoducho najlepší.
>
> *Necyklopédia* (2016)

Definícia (absolútnej hodnoty reálneho čísla)

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum z dvojice čísel x a $-x$ a píšeme $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometrická interpretácia: absolútna hodnota čísla x predstavuje vzdialenosť obrazu čísla x od nuly na číselnej osi, t.j. $|x - y|$ predstavuje vzdialenosť obrazov čísel x a y na reálnej osi

Priamo z definície vyplýva (overte!), že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

1. $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
2. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$
3. $|x| \geq 0$ a $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|x| = |-x|$