Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html

Prednáška 2

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

25. septembra 2023

Funkcia: trochu histórie

> We call here *Function* of a variable magnitude, a quantity that is composed in any possible manner of this variable magnitude & of constants.
>
> Johann Bernoulli: *Opera* (1718) vol. 2, p. 241

- reálne funkcie $y = f(x)$ reálnej premennej x boli od čias Descarta univerzálnym nástrojom pre štúdium geometrických kriviek;
- od čias Galileiho a Leibniza slúžili ako prostriedok mechanických a astronomických výpočtov;
- slovo "functio" pochádza od Leibniza (1692) a Johanna Bernoulliho (1718 – pozri citát hore);
- symbol $y = f(x)$ bol zavedený Eulerom v roku 1748;
- v ére Leibniza-Bernoulliho-Eulera boli funkcie chápané ako kompozície elementárnych funkcií (Euler: *"expressio analytica quomodocunque"*)
- v 19. storočí pod vplyvom Fourierovej rovnice vedenia tepla a Dirichletovej štúdie o Fourierových radoch sa začína uvažovať širší koncept: "ľubovoľné hodnoty y definované v závislosti of hodnôt x"

Funkcia: trochu histórie

> We call here *Function* of a variable magnitude, a quantity that is composed in any possible manner of this variable magnitude & of constants.
>
> Johann Bernoulli: *Opera* (1718) vol. 2, p. 241

- reálne funkcie $y = f(x)$ reálnej premennej x boli od čias Descarta univerzálnym nástrojom pre štúdium geometrických kriviek;
- od čias Galileiho a Leibniza slúžili ako prostriedok mechanických a astronomických výpočtov;
- slovo "functio" pochádza od Leibniza (1692) a Johanna Bernoulliho (1718 – pozri citát hore);
- symbol $y = f(x)$ bol zavedený Eulerom v roku 1748;
- v ére Leibniza-Bernoulliho-Eulera boli funkcie chápané ako kompozície elementárnych funkcií (Euler: *"expressio analytica quomodocunque"*)
- v 19. storočí pod vplyvom Fourierovej rovnice vedenia tepla a Dirichletovej štúdie o Fourierových radoch sa začína uvažovať širší koncept: "ľubovoľné hodnoty y definované v závislosti of hodnôt x"

Funkcia: trochu histórie

> We call here *Function* of a variable magnitude, a quantity that is composed in any possible manner of this variable magnitude & of constants.
>
> Johann Bernoulli: *Opera* (1718) vol. 2, p. 241

- reálne funkcie $y = f(x)$ reálnej premennej x boli od čias Descarta univerzálnym nástrojom pre štúdium geometrických kriviek;
- od čias Galileiho a Leibniza slúžili ako prostriedok mechanických a astronomických výpočtov;
- slovo "functio" pochádza od Leibniza (1692) a Johanna Bernoulliho (1718 – pozri citát hore);
- symbol $y = f(x)$ bol zavedený Eulerom v roku 1748;
- v ére Leibniza-Bernoulliho-Eulera boli funkcie chápané ako kompozície elementárnych funkcií (Euler: *"expressio analytica quomodocunque"*)
- v 19. storočí pod vplyvom Fourierovej rovnice vedenia tepla a Dirichletovej štúdie o Fourierových radoch sa začína uvažovať širší koncept: "ľubovoľné hodnoty y definované v závislosti of hodnôt x"

Funkcia: trochu histórie

> We call here *Function* of a variable magnitude, a quantity that is composed in any possible manner of this variable magnitude & of constants.
>
> Johann Bernoulli: *Opera* (1718) vol. 2, p. 241

- reálne funkcie $y = f(x)$ reálnej premennej x boli od čias Descarta univerzálnym nástrojom pre štúdium geometrických kriviek;
- od čias Galileiho a Leibniza slúžili ako prostriedok mechanických a astronomických výpočtov;
- slovo "functio" pochádza od Leibniza (1692) a Johanna Bernoulliho (1718 – pozri citát hore);
- symbol $y = f(x)$ bol zavedený Eulerom v roku 1748;
- v ére Leibniza-Bernoulliho-Eulera boli funkcie chápané ako kompozície elementárnych funkcií (Euler: *"expressio analytica quomodocunque"*)
- v 19. storočí pod vplyvom Fourierovej rovnice vedenia tepla a Dirichletovej štúdie o Fourierových radoch sa začína uvažovať širší koncept: "ľubovoľné hodnoty y definované v závislosti of hodnôt x"

Funkcia: trochu histórie

> We call here *Function* of a variable magnitude, a quantity that is composed in any possible manner of this variable magnitude & of constants.
>
> Johann Bernoulli: *Opera* (1718) vol. 2, p. 241

- reálne funkcie $y = f(x)$ reálnej premennej x boli od čias Descarta univerzálnym nástrojom pre štúdium geometrických kriviek;
- od čias Galileiho a Leibniza slúžili ako prostriedok mechanických a astronomických výpočtov;
- slovo "functio" pochádza od Leibniza (1692) a Johanna Bernoulliho (1718 – pozri citát hore);
- symbol $y = f(x)$ bol zavedený Eulerom v roku 1748;
- v ére Leibniza-Bernoulliho-Eulera boli funkcie chápané ako kompozície elementárnych funkcií (Euler: *"expressio analytica quomodocunque"*)
- v 19. storočí pod vplyvom Fourierovej rovnice vedenia tepla a Dirichletovej štúdie o Fourierových radoch sa začína uvažovať širší koncept: "ľubovoľné hodnoty y definované v závislosti of hodnôt x"

Funkcia: trochu histórie

> We call here *Function* of a variable magnitude, a quantity that is composed in any possible manner of this variable magnitude & of constants.
>
> Johann Bernoulli: *Opera* (1718) vol. 2, p. 241

- reálne funkcie $y = f(x)$ reálnej premennej x boli od čias Descarta univerzálnym nástrojom pre štúdium geometrických kriviek;
- od čias Galileiho a Leibniza slúžili ako prostriedok mechanických a astronomických výpočtov;
- slovo "functio" pochádza od Leibniza (1692) a Johanna Bernoulliho (1718 – pozri citát hore);
- symbol $y = f(x)$ bol zavedený Eulerom v roku 1748;
- v ére Leibniza-Bernoulliho-Eulera boli funkcie chápané ako kompozície elementárnych funkcií (Euler: *"expressio analytica quomodocunque"*)
- v 19. storočí pod vplyvom Fourierovej rovnice vedenia tepla a Dirichletovej štúdie o Fourierových radoch sa začína uvažovať širší koncept: "ľubovoľné hodnoty y definované v závislosti of hodnôt x"

Funkcia ako zobrazenie – základné pojmy

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

kvantifikovane : $(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2$

- X nazývame definičný obor zobrazenia f, označujeme D_f;
- prvky z D_f nazývame argumenty/vzory/nezávislé premenné;
- prvok $y_0 \in Y$ priradený argumentu $x_0 \in X$ nazývame hodnotou zobrazenia f v bode x_0, označujeme ho $f(x_0)$;
- Y nazývame obor hodnôt zobrazenia f, označujeme H_f;
- prvky z H_f nazývame obrazy/závislé premenné;
- množinu všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcia ako zobrazenie – základné pojmy

> If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.
>
> Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že **na množine X je definované zobrazenie** f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

$$\text{kvantifikovane}: \quad (\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2$$

- X nazývame **definičný obor** zobrazenia f, označujeme D_f;
- prvky z D_f nazývame **argumenty**/vzory/nezávislé premenné;
- prvok $y_0 \in Y$ priradený argumentu $x_0 \in X$ nazývame **hodnotou zobrazenia** f v bode x_0, označujeme ho $f(x_0)$;
- Y nazývame **obor hodnôt** zobrazenia f, označujeme H_f;
- prvky z H_f nazývame **obrazy**/závislé premenné;
- množinu všetkých funkcií $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcia ako zobrazenie – základné pojmy

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

kvantifikovane : $(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2$

- X nazývame definičný obor zobrazenia f, označujeme D_f;
- prvky z D_f nazývame argumenty/vzory/nezávislé premenné;
- prvok $y_0 \in Y$ priradený argumentu $x_0 \in X$ nazývame hodnotou zobrazenia f v bode x_0, označujeme ho $f(x_0)$;
- Y nazývame obor hodnôt zobrazenia f, označujeme H_f;
- prvky z H_f nazývame obrazy/závislé premenné;
- množinu všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcia ako zobrazenie – základné pojmy

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

kvantifikovane : $(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2$

- X nazývame definičný obor zobrazenia f, označujeme D_f;
- prvky z D_f nazývame argumenty/vzory/nezávislé premenné;
- prvok $y_0 \in Y$ priradený argumentu $x_0 \in X$ nazývame hodnotou zobrazenia f v bode x_0, označujeme ho $f(x_0)$;
- Y nazývame obor hodnôt zobrazenia f, označujeme H_f;
- prvky z H_f nazývame obrazy/závislé premenné;
- množinu všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcia ako zobrazenie – základné pojmy

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

kvantifikovane : $(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2$

- X nazývame definičný obor zobrazenia f, označujeme D_f;
- prvky z D_f nazývame argumenty/vzory/nezávislé premenné;
- prvok $y_0 \in Y$ priradený argumentu $x_0 \in X$ nazývame hodnotou zobrazenia f v bode x_0, označujeme ho $f(x_0)$;
- Y nazývame obor hodnôt zobrazenia f, označujeme H_f;
- prvky z H_f nazývame obrazy/závislé premenné;
- množinu všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcia ako zobrazenie – základné pojmy

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

$$\text{kvantifikovane}: \quad (\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2$$

- X nazývame definičný obor zobrazenia f, označujeme D_f;
- prvky z D_f nazývame argumenty/vzory/nezávislé premenné;
- prvok $y_0 \in Y$ priradený argumentu $x_0 \in X$ nazývame hodnotou zobrazenia f v bode x_0, označujeme ho $f(x_0)$;
- Y nazývame obor hodnôt zobrazenia f, označujeme H_f;
- prvky z H_f nazývame obrazy/závislé premenné;
- množinu všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcia ako zobrazenie – základné pojmy

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že **na množine X je definované zobrazenie** f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

kvantifikovane : $(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2$

- X nazývame **definičný obor** zobrazenia f, označujeme D_f;
- prvky z D_f nazývame **argumenty**/vzory/nezávislé premenné;
- prvok $y_0 \in Y$ priradený argumentu $x_0 \in X$ nazývame **hodnotou zobrazenia** f v bode x_0, označujeme ho $f(x_0)$;
- Y nazývame **obor hodnôt** zobrazenia f, označujeme H_f;
- prvky z H_f nazývame **obrazy**/závislé premenné;
- množinu všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcia ako zobrazenie – základné pojmy

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

kvantifikovane : $(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2$

- X nazývame definičný obor zobrazenia f, označujeme D_f;
- prvky z D_f nazývame argumenty/vzory/nezávislé premenné;
- prvok $y_0 \in Y$ priradený argumentu $x_0 \in X$ nazývame hodnotou zobrazenia f v bode x_0, označujeme ho $f(x_0)$;
- Y nazývame obor hodnôt zobrazenia f, označujeme H_f;
- prvky z H_f nazývame obrazy/závislé premenné;
- množinu všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme označovať $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcia ako zobrazenie – spôsoby zadania funkcie

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

- analyticky (explicitne): $f : \ell = \sqrt{s}$, $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$, $x > 0$
- implicitne: $xy + \ln xy = 0$
- parametricky: $x = 2\sin t - \sin 2t$, $y = 2\cos t - \cos 2t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ... `http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html`
- viacerými rovnicami:

$$\kappa(x) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

- tabuľkou, grafom, slovne ...

Funkcia ako zobrazenie – spôsoby zadania funkcie

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

- analyticky (explicitne): $f : \ell = \sqrt{s}$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$, $x > 0$
- implicitne: $xy + \ln xy = 0$
- parametricky: $x = 2\sin t - \sin 2t$, $y = 2\cos t - \cos 2t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ... `http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html`
- viacerými rovnicami:

$$\kappa(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

- tabuľkou, grafom, slovne ...

Funkcia ako zobrazenie – spôsoby zadania funkcie

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

- analyticky (explicitne): $f : \ell = \sqrt{s}$, $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, $x > 0$
- implicitne: $xy + \ln xy = 0$
- parametricky: $x = 2\sin t - \sin 2t$, $y = 2\cos t - \cos 2t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ ... `http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html`
- viacerými rovnicami:
$$\kappa(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$
- tabuľkou, grafom, slovne ...

Funkcia ako zobrazenie – spôsoby zadania funkcie

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

- analyticky (explicitne): $f : \ell = \sqrt{s}$, $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, $x > 0$
- implicitne: $xy + \ln xy = 0$
- parametricky: $x = 2\sin t - \sin 2t$, $y = 2\cos t - \cos 2t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ... `http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html`
- viacerými rovnicami:

$$\kappa(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

- tabuľkou, grafom, slovne ...

Funkcia ako zobrazenie – spôsoby zadania funkcie

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

- analyticky (explicitne): $f : \ell = \sqrt{s}$, $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t,\ x > 0$
- implicitne: $xy + \ln xy = 0$
- parametricky: $x = 2\sin t - \sin 2t$, $y = 2\cos t - \cos 2t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ... `http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html`
- viacerými rovnicami:

$$\kappa(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

- tabuľkou, grafom, slovne ...

Funkcia ako zobrazenie – spôsoby zadania funkcie

If now to any x there corresponds a unique, finite y, ... then y is called a function of x for this interval... This definition does not require a common rule for the different parts of the curve; one can imagine the curve as being composed of the most heterogeneous components or as being drawn without following any law.

Dirichlet: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837)

Definícia

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

- analyticky (explicitne): $f : \ell = \sqrt{s}$, $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t,\ x > 0$
- implicitne: $xy + \ln xy = 0$
- parametricky: $x = 2\sin t - \sin 2t$, $y = 2\cos t - \cos 2t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ... `http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html`
- viacerými rovnicami:

$$\kappa(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

- tabuľkou, grafom, slovne ...

Dôležité: Každá funkcia je jednoznačne určená definičným oborom a predpisom priradenia.

Definícia

Nech f a g sú funkcie s definičnými obormi D_f a D_g.

(i) Absolútna hodnota $|f|$ je funkcia definovaná na D_f predpisom
$$(\forall x \in D_f)\ |f|(x) = |f(x)|.$$

(ii) Súčet (rozdiel) $f \pm g$ je funkcia definovaná na $D_f \cap D_g$ predpisom
$$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

(iii) Súčin $f \cdot g$ je funkcia definovaná na $D_f \cap D_g$ predpisom
$$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

(iv) Podiel $\frac{f}{g}$ je funkcia definovaná na $D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\}$ predpisom
$$(\forall x \in D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\})\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definícia

Hovoríme, že funkcie f a g sa rovnajú, akk majú rovnaký definičný obor X a $(\forall x \in X)\ f(x) = g(x)$.

Dôležité: Každá funkcia je jednoznačne určená definičným oborom a predpisom priradenia.

Definícia

Nech f a g sú funkcie s definičnými obormi D_f a D_g.

(i) Absolútna hodnota $|f|$ je funkcia definovaná na D_f predpisom

$$(\forall x \in D_f)\ |f|(x) = |f(x)|.$$

(ii) Súčet (rozdiel) $f \pm g$ je funkcia definovaná na $D_f \cap D_g$ predpisom

$$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

(iii) Súčin $f \cdot g$ je funkcia definovaná na $D_f \cap D_g$ predpisom

$$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

(iv) Podiel $\frac{f}{g}$ je funkcia definovaná na $D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\}$ predpisom

$$(\forall x \in D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\})\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definícia

Hovoríme, že funkcie f a g sa rovnajú, akk majú rovnaký definičný obor X a $(\forall x \in X)\ f(x) = g(x)$.

Dôležité: Každá funkcia je jednoznačne určená definičným oborom a predpisom priradenia.

Definícia

Nech f a g sú funkcie s definičnými obormi D_f a D_g.

(i) Absolútna hodnota $|f|$ je funkcia definovaná na D_f predpisom
$$(\forall x \in D_f)\ |f|(x) = |f(x)|.$$

(ii) Súčet (rozdiel) $f \pm g$ je funkcia definovaná na $D_f \cap D_g$ predpisom
$$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

(iii) Súčin $f \cdot g$ je funkcia definovaná na $D_f \cap D_g$ predpisom
$$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

(iv) Podiel $\frac{f}{g}$ je funkcia definovaná na $D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\}$ predpisom
$$(\forall x \in D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\})\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definícia

Hovoríme, že funkcie f a g sa rovnajú, akk majú rovnaký definičný obor X a $(\forall x \in X)\ f(x) = g(x)$.

Operácie = mlynček na vytváranie nových funkcií

Quantitas constans est quantitas determinata, perpetuo eundem valorem servans.

Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **konštantná funkcia:** je funkcia C, ktorá každému reálnemu číslu priradzuje stále rovnakú (konštantnú) hodnotu, t.j. $\mathrm{C} : y = c$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, kde $c \in \mathbb{R}$;
- **identita:** je funkcia I, ktorá každému reálnemu číslu priradzuje to isté reálne číslo, t.j. $\mathrm{I} : y = x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;
- **polynóm:** je funkcia P definovaná na $\mathbb{R}$ predpisom

$$\mathrm{P}(x) := a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

- **racionálna lomená funkcia:** je funkcia R definovaná ako podiel dvoch polynómov, t.j.

$$\mathrm{R}(x) := \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}, \quad a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$$

kde aspoň jedno z čísel $b_j \neq 0$; zrejme $D_{\mathrm{R}} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \mathrm{Q}(x) = 0\}$

Operácie = mlynček na vytváranie nových funkcií

Quantitas constans est quantitas determinata, perpetuo eundem valorem servans.

Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **konštantná funkcia:** je funkcia C, ktorá každému reálnemu číslu priradzuje stále rovnakú (konštantnú) hodnotu, t.j. $\mathrm{C} : y = c$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, kde $c \in \mathbb{R}$;
- **identita:** je funkcia I, ktorá každému reálnemu číslu priradzuje to isté reálne číslo, t.j. $\mathrm{I} : y = x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;
- **polynóm:** je funkcia P definovaná na $\mathbb{R}$ predpisom

$$\mathrm{P}(x) := a_0 + a_1 x + \dots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$;

- **racionálna lomená funkcia:** je funkcia R definovaná ako podiel dvoch polynómov, t.j.

$$\mathrm{R}(x) := \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a_0 + a_1 x \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}, \quad a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$$

kde aspoň jedno z čísel $b_j \neq 0$; zrejme $D_\mathrm{R} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \mathrm{Q}(x) = 0\}$

Operácie = mlynček na vytváranie nových funkcií

Quantitas constans est quantitas determinata, perpetuo eundem valorem servans.

Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

- **konštantná funkcia:** je funkcia C, ktorá každému reálnemu číslu priradzuje stále rovnakú (konštantnú) hodnotu, t.j. $\mathrm{C} : y = c$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, kde $c \in \mathbb{R}$;
- **identita:** je funkcia I, ktorá každému reálnemu číslu priradzuje to isté reálne číslo, t.j. $\mathrm{I} : y = x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;
- **polynóm:** je funkcia P definovaná na $\mathbb{R}$ predpisom

$$\mathrm{P}(x) := a_0 + a_1 x + \dots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$;

- **racionálna lomená funkcia:** je funkcia R definovaná ako podiel dvoch polynómov, t.j.

$$\mathrm{R}(x) := \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}, \quad a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$$

kde aspoň jedno z čísel $b_j \neq 0$; zrejme $D_{\mathrm{R}} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \mathrm{Q}(x) = 0\}$

Operácie = mlynček na vytváranie nových funkcií

Quantitas constans est quantitas determinata, perpetuo eundem valorem servans.

Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

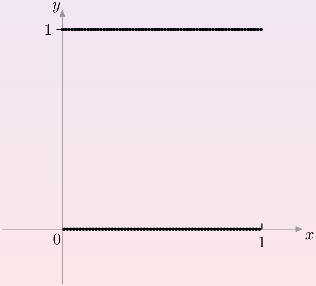
- **konštantná funkcia:** je funkcia C, ktorá každému reálnemu číslu priradzuje stále rovnakú (konštantnú) hodnotu, t.j. $\mathrm{C} : y = c$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, kde $c \in \mathbb{R}$;
- **identita:** je funkcia I, ktorá každému reálnemu číslu priradzuje to isté reálne číslo, t.j. $\mathrm{I} : y = x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;
- **polynóm:** je funkcia P definovaná na $\mathbb{R}$ predpisom
$$\mathrm{P}(x) := a_0 + a_1 x + \dots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$
kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$;
- **racionálna lomená funkcia:** je funkcia R definovaná ako podiel dvoch polynómov, t.j.
$$\mathrm{R}(x) := \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}, \quad a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$$
kde aspoň jedno z čísel $b_j \neq 0$; zrejme $D_{\mathrm{R}} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \mathrm{Q}(x) = 0\}$

Graf funkcie a jeho transformácie

Definícia

Grafom funkcie f definovanej na množine $X \neq \emptyset$ nazývame množinu $G_f = \{[x, y]; x \in X, y = f(x)\}$.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



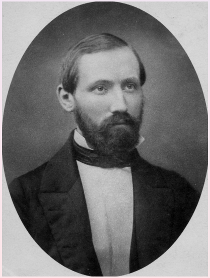
PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859)

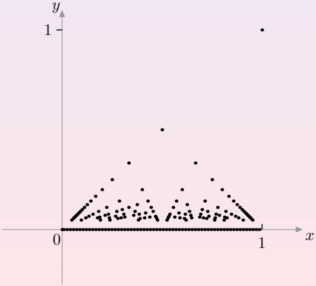
Graf funkcie a jeho transformácie

Definícia

Grafom funkcie f definovanej na množine $X \neq \emptyset$ nazývame množinu $G_f = \{[x,y]; x \in X, y = f(x)\}$.

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle \text{ alebo } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ je zlomok v základnom tvare} \end{cases}$$



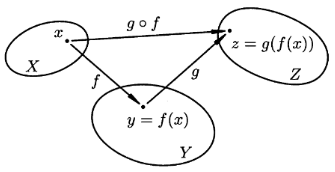


GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866)

Ďalšie operácie s funkciami – cestovanie s prestupom

Definícia

Nech f je funkcia definovaná na X a g je definovaná na Y. Zložená funkcia $g \circ f$ sa nazýva funkcia definovaná na množine $M = \{x \in X; f(x) \in Y\}$ predpisom $(\forall x \in M)\ (g \circ f)(x) := g(f(x))$.



- funkciu f nazývame vnútorná zložka a funkciu g vonkajšia zložka kompozície $g \circ f$;
- súčet a násobenie funkcií sú komutatívne operácie v $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ale operácia kompozície nie je komutatívna, t.j. $f \circ g \neq g \circ f$!

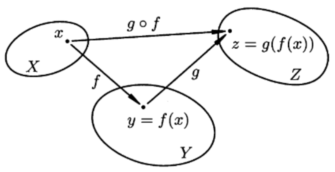
Veta (o asociativite skladania funkcií)

$(\forall f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}})\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Ďalšie operácie s funkciami – cestovanie s prestupom

Definícia

Nech f je funkcia definovaná na X a g je definovaná na Y. Zložená funkcia $g \circ f$ sa nazýva funkcia definovaná na množine $M = \{x \in X; f(x) \in Y\}$ predpisom $(\forall x \in M)\ (g \circ f)(x) := g(f(x))$.



- funkciu f nazývame vnútorná zložka a funkciu g vonkajšia zložka kompozície $g \circ f$;
- súčet a násobenie funkcií sú komutatívne operácie v $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ale operácia kompozície nie je komutatívna, t.j. $f \circ g \neq g \circ f$!

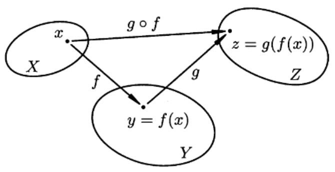
Veta (o asociativite skladania funkcií)

$(\forall f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}})\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Ďalšie operácie s funkciami – cestovanie s prestupom

Definícia

Nech f je funkcia definovaná na X a g je definovaná na Y. Zložená funkcia $g \circ f$ sa nazýva funkcia definovaná na množine $M = \{x \in X; f(x) \in Y\}$ predpisom $(\forall x \in M)\ (g \circ f)(x) := g(f(x))$.



- funkciu f nazývame vnútorná zložka a funkciu g vonkajšia zložka kompozície $g \circ f$;
- súčet a násobenie funkcií sú komutatívne operácie v $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ale operácia kompozície nie je komutatívna, t.j. $f \circ g \neq g \circ f$!

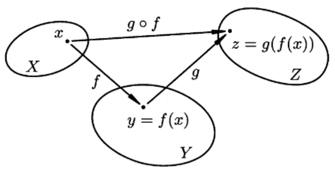
Veta (o asociativite skladania funkcií)

$(\forall f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}})\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Ďalšie operácie s funkciami – cestovanie s prestupom

Definícia

Nech f je funkcia definovaná na X a g je definovaná na Y. Zložená funkcia $g \circ f$ sa nazýva funkcia definovaná na množine $M = \{x \in X; f(x) \in Y\}$ predpisom $(\forall x \in M)\ (g \circ f)(x) := g(f(x))$.



- funkciu f nazývame vnútorná zložka a funkciu g vonkajšia zložka kompozície $g \circ f$;
- súčet a násobenie funkcií sú komutatívne operácie v $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ale operácia kompozície nie je komutatívna, t.j. $f \circ g \neq g \circ f$!

Veta (o asociativite skladania funkcií)

$(\forall f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}})\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Ohraničené a neohraničené funkcie

Keďže funkcia $f : X \to Y$ je zobrazenie medzi dvoma množinami, môžeme na niektoré vlastnosti tohto zobrazenia nahliadať cez vlastnosti, ktoré má jeho obor hodnôt Y.

Definícia

Nech $f : X \to Y$ je funkcia.

(i) Hovoríme, že f je ohraničená zhora na množine $M \subseteq D_f$, akk $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ f(x) \leq H$.

(ii) Hovoríme, že f je ohraničená zdola na množine $M \subseteq D_f$, akk $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ D \leq f(x)$.

(iii) Funkcia f sa nazýva ohraničená na $M \subseteq D_f$, akk je na $M \subseteq D_f$ ohraničená zhora aj zdola.

(iv) Funkciu f nazývame neohraničená na $M \subseteq D_f$, akk na $M \subseteq D_f$ nie je ohraničená.

Veta (nutná a postačujúca podmienka ohraničenosti funkcie)

Funkcia f je ohraničená na $M \subseteq D_f$ práve vtedy, keď

$$(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)(\forall x \in M)\ |f(x)| \leq K.$$

Ohraničené a neohraničené funkcie

Keďže funkcia $f : X \to Y$ je zobrazenie medzi dvoma množinami, môžeme na niektoré vlastnosti tohto zobrazenia nahliadať cez vlastnosti, ktoré má jeho obor hodnôt Y.

Definícia

Nech $f : X \to Y$ je funkcia.

(i) Hovoríme, že f je ohraničená zhora na množine $M \subseteq D_f$, akk $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ f(x) \leq H$.

(ii) Hovoríme, že f je ohraničená zdola na množine $M \subseteq D_f$, akk $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ D \leq f(x)$.

(iii) Funkcia f sa nazýva ohraničená na $M \subseteq D_f$, akk je na $M \subseteq D_f$ ohraničená zhora aj zdola.

(iv) Funkciu f nazývame neohraničená na $M \subseteq D_f$, akk na $M \subseteq D_f$ nie je ohraničená.

Veta (nutná a postačujúca podmienka ohraničenosti funkcie)

Funkcia f je ohraničená na $M \subseteq D_f$ práve vtedy, keď

$$(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)(\forall x \in M)\ |f(x)| \leq K.$$

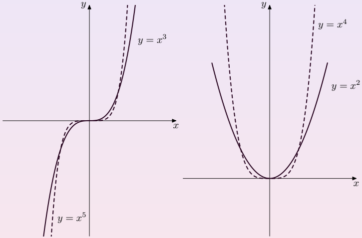
Párne, nepárne a periodické funkcie

Definícia

Funkcia f definovaná na M sa nazýva párna, akk

(i) $(\forall x \in M)\ \ -x \in M$;

(ii) $(\forall x \in M)\ f(-x) = f(x)$.



Poznámky a príklady:

- graf G_f párnej funkcie f je osovo súmerný podľa y-ovej osi, pretože ak $P = [x, f(x)] \in G_f$, tak aj $P' = [-x, f(x)] \in G_f$;
- Dirichletova funkcia χ je párna;

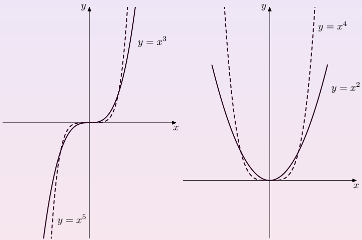
Párne, nepárne a periodické funkcie

Definícia

Funkcia f definovaná na M sa nazýva nepárna, akk

(i) $(\forall x \in M) \ -x \in M$;

(ii) $(\forall x \in M) \ f(-x) = -f(x)$.



Poznámky a príklady:

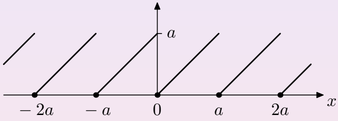
- graf G_f nepárnej funkcie f je stredovo súmerný podľa počiatku;
- funkcia sgn je nepárna;
- existuje nekonečne veľa funkcií, ktoré sú párne a nepárne zároveň – všetky sú však len zúžením funkcie $C(x) = 0$ na vhodnú množinu

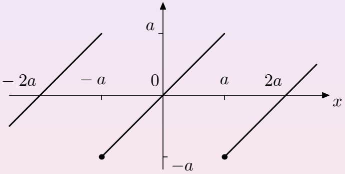
Párne, nepárne a periodické funkcie

Definícia

Funkciu f nazývame periodická, akk existuje $p \in \mathbb{R}, p > 0$, pre ktoré platí
(i) $(\forall x \in D_f)\ x + p \in D_f \wedge x - p \in D_f$;
(ii) $(\forall x \in D_f)\ f(x+p) = f(x)$.

Najmenšie číslo $p > 0$ s touto vlastnosťou sa nazýva perióda funkcie f.





Poznámky a príklady:

- každá konštatná funkcia C je periodická, ale nemá periódu (podobne to platí pre Dirichletovu funkciu χ);
- najznámejšie periodické funkcie sin, cos, tg, cotg (už čoskoro!)
- Riemannova funkcia ρ sa dá periodicky rozšíriť na $\mathbb{R}$, pričom jej perióda bude $p = 1$;

Monotónne funkcie

> Monotony is the law of nature. Look at the monotonous manner in which the sun rises. The monotony of necessary occupation is exhilarating and life giving.
>
> Mahatma Gandhi

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je na množine $M \subseteq D_f$

(i) rastúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) klesajúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_2) < f(x_1)$;

(iii) neklesajúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) \leq f(x_2)$;

(iv) nerastúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_2) \leq f(x_1)$.

Poznámky a príklady:

- rastúce a klesajúce funkcie nazývame rýdzomonotónne, nerastúce a neklesajúce nazývame monotónne funkcie;
- funkcia je konštantná práve vtedy, keď je nerastúca a neklesajúca zároveň;
- prázdna funkcia, t.j. funkcia f s $D_f = \emptyset$, ako aj každá funkcia definovaná na jednoprvkovej množine sú monotónne;

Monotónne funkcie

> Monotony is the law of nature. Look at the monotonous manner in which the sun rises. The monotony of necessary occupation is exhilarating and life giving.
>
> Mahatma Gandhi

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je na množine $M \subseteq D_f$

(i) rastúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) klesajúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_2) < f(x_1)$;

(iii) neklesajúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) \leq f(x_2)$;

(iv) nerastúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_2) \leq f(x_1)$.

Poznámky a príklady:

- neexistuje funkcia definovaná na aspoň dvojprvkovej množine, ktorá by bola rastúca a klesajúca zároveň!

Veta (o vzťahu monotónnosti a ohraničenost)i

Každá monotónna funkcia na uzavretom intervale je na tomto intervale ohraničená.

Monotónne funkcie

Monotony is the law of nature. Look at the monotonous manner in which the sun rises. The monotony of necessary occupation is exhilarating and life giving.

Mahatma Gandhi

Definícia

Hovoríme, že funkcia f je na množine $M \subseteq D_f$

(i) rastúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) klesajúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_2) < f(x_1)$;

(iii) neklesajúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) \leq f(x_2)$;

(iv) nerastúca, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_2) \leq f(x_1)$.

Poznámky a príklady:

- neexistuje funkcia definovaná na aspoň dvojprvkovej množine, ktorá by bola rastúca a klesajúca zároveň!

Veta (o vzťahu monotónnosti a ohraničenost)i

Každá monotónna funkcia na uzavretom intervale je na tomto intervale ohraničená.

Injekcia alebo netreba sa báť doktorov (matematiky)

Pripomenutie: Funkcia $f : X \longrightarrow Y$ je zobrazenie medzi dvoma množinami – vzormi a obrazmi.

Definícia

Obrazom množiny $M \subseteq X$ pri zobrazení $f : X \to Y$ nazývame množinu

$$f(M) := \Big\{ y \in Y ; \exists x \, \big((x \in M) \wedge (y = f(x)) \big) \Big\}.$$

Poznámka: množina $f(M)$ teda obsahuje tie prvky oboru hodnôt Y, ktoré sú obrazmi prvkov z M

Definícia

Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame

(i) injektívne, akk $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2)\ f(x_1) \neq f(x_2)$;

(ii) surjektívne, akk $f(X) = Y$;

(iii) bijektívne, akk je injektívne a surjektívne zároveň.

Poznámky:

- injektívne zobrazenie sa nazýva aj prosté, surjektívne sa zvykne označovať aj spojením "f je na" (množinu Y);
- $f : X \to Y$ je surjektívne práve vtedy, keď $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$;

Injekcia alebo netreba sa báť doktorov (matematiky)

Pripomenutie: Funkcia $f : X \to Y$ je zobrazenie medzi dvoma množinami – vzormi a obrazmi.

Definícia

Obrazom množiny $M \subseteq X$ pri zobrazení $f : X \to Y$ nazývame množinu

$$f(M) := \Big\{ y \in Y; \exists x \,\Big((x \in M) \wedge (y = f(x)) \Big) \Big\}.$$

Poznámka: množina $f(M)$ teda obsahuje tie prvky oboru hodnôt Y, ktoré sú obrazmi prvkov z M

Definícia

Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame

(i) injektívne, akk $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2)\ f(x_1) \neq f(x_2)$;

(ii) surjektívne, akk $f(X) = Y$;

(iii) bijektívne, akk je injektívne a surjektívne zároveň.

Poznámky:

- injektívne zobrazenie sa nazýva aj prosté, surjektívne sa zvykne označovať aj spojením "f je na" (množinu Y);
- $f : X \to Y$ je surjektívne práve vtedy, keď $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$;

Injekcia alebo netreba sa báť doktorov (matematiky)

Pripomenutie: Funkcia $f : X \to Y$ je zobrazenie medzi dvoma množinami – vzormi a obrazmi.

Definícia

Obrazom množiny $M \subseteq X$ pri zobrazení $f : X \to Y$ nazývame množinu

$$f(M) := \Big\{ y \in Y; \exists x \Big((x \in M) \wedge (y = f(x)) \Big) \Big\}.$$

Poznámka: množina $f(M)$ teda obsahuje tie prvky oboru hodnôt Y, ktoré sú obrazmi prvkov z M

Definícia

Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame

(i) injektívne, akk $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2)\ f(x_1) \neq f(x_2)$;

(ii) surjektívne, akk $f(X) = Y$;

(iii) bijektívne, akk je injektívne a surjektívne zároveň.

Poznámky:

- injektívne zobrazenie sa nazýva aj prosté, surjektívne sa zvykne označovať aj spojením "f je na" (množinu Y);
- $f : X \to Y$ je surjektívne práve vtedy, keď $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$;

Injekcia alebo netreba sa báť doktorov (matematiky)

Pripomenutie: Funkcia $f : X \to Y$ je zobrazenie medzi dvoma množinami – vzormi a obrazmi.

Definícia

Obrazom množiny $M \subseteq X$ pri zobrazení $f : X \to Y$ nazývame množinu

$$f(M) := \Big\{ y \in Y; \exists x \, \Big((x \in M) \wedge (y = f(x)) \Big) \Big\}.$$

Poznámka: množina $f(M)$ teda obsahuje tie prvky oboru hodnôt Y, ktoré sú obrazmi prvkov z M

Definícia

Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame

(i) injektívne, akk $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2)\ f(x_1) \neq f(x_2)$;

(ii) surjektívne, akk $f(X) = Y$;

(iii) bijektívne, akk je injektívne a surjektívne zároveň.

Poznámky:

- injektívne zobrazenie sa nazýva aj prosté, surjektívne sa zvykne označovať aj spojením "f je na" (množinu Y);
- $f : X \to Y$ je surjektívne práve vtedy, keď $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x)$;

Injekcia alebo netreba sa báť doktorov (matematiky)

Pripomenutie: Funkcia $f : X \longrightarrow Y$ je zobrazenie medzi dvoma množinami – vzormi a obrazmi.

Definícia

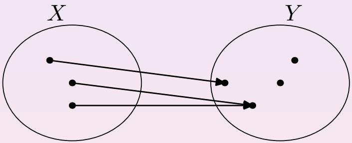
Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame

(i) injektívne, akk $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2)\ f(x_1) \neq f(x_2)$;

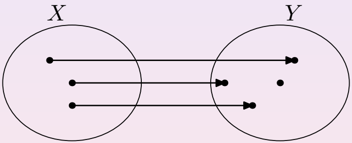
(ii) surjektívne, akk $f(X) = Y$;

(iii) bijektívne, akk je injektívne a surjektívne zároveň.

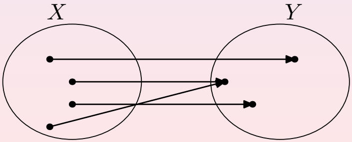
A:



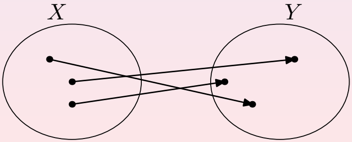
B:



C:



D:



Injekcia alebo netreba sa báť doktorov (matematiky)

Pripomenutie: Funkcia $f : X \to Y$ je zobrazenie medzi dvoma množinami – vzormi a obrazmi.

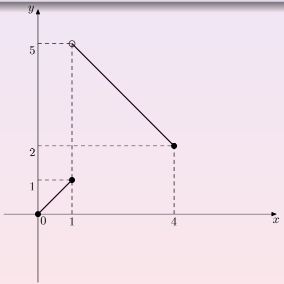
Definícia

Zobrazenie $f : X \to Y$ nazývame

(i) injektívne, akk $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2)\ f(x_1) \neq f(x_2)$;

(ii) surjektívne, akk $f(X) = Y$;

(iii) bijektívne, akk je injektívne a surjektívne zároveň.



Veta (o vzťahu rýdzomonotónnosti a injekcie)

Ak f je rýdzomonotónna na $M \subseteq D_f$, tak f je injektívna na M.