Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html

Prednáška 3

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

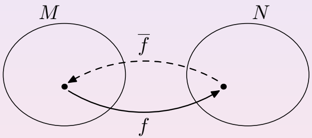
2. októbra 2023

Inverzná funkcia = šťastný návrat domov

Globálny predpoklad: f je injektívna na $M \subseteq D_f$ a $N = f(M)$

Definícia

Inverznou funkciou k injektívnej funkcii f na množine M nazývame funkciu definovanú na N, ktorá každému $y \in N$ priradí číslo $x \in M$ také, že $y = f(x)$.



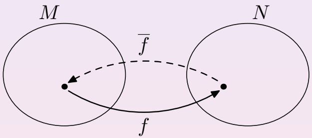
- inverznú funkciu k funkcii f označujeme $\overline{f}$;
- označenie f^{-1} nepoužívame, pretože je mätúce, môže spôsobiť pomýlenie s prevrátenou hodnotou;
- keďže pracujeme len s reálnymi funkciami, nemôže dôjsť k spleteniu s komplexne združenou hodnotou!

Inverzná funkcia = šťastný návrat domov

Globálny predpoklad: f je injektívna na $M \subseteq D_f$ a $N = f(M)$

Definícia

Inverznou funkciou k injektívnej funkcii f na množine M nazývame funkciu definovanú na N, ktorá každému $y \in N$ priradí číslo $x \in M$ také, že $y = f(x)$.



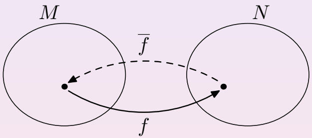
- inverznú funkciu k funkcii f označujeme $\overline{f}$;
- označenie f^{-1} nepoužívame, pretože je mätúce, môže spôsobiť pomýlenie s prevrátenou hodnotou;
- keďže pracujeme len s reálnymi funkciami, nemôže dôjsť k spleteniu s komplexne združenou hodnotou!

Inverzná funkcia = šťastný návrat domov

Globálny predpoklad: f je injektívna na $M \subseteq D_f$ a $N = f(M)$

Definícia

Inverznou funkciou k injektívnej funkcii f na množine M nazývame funkciu definovanú na N, ktorá každému $y \in N$ priradí číslo $x \in M$ také, že $y = f(x)$.



- inverznú funkciu k funkcii f označujeme $\overline{f}$;
- označenie f^{-1} nepoužívame, pretože je mätúce, môže spôsobiť pomýlenie s prevrátenou hodnotou;
- keďže pracujeme len s reálnymi funkciami, nemôže dôjsť k spleteniu s komplexne združenou hodnotou!

Inverzná funkcia = šťastný návrat domov

Globálny predpoklad: f je injektívna na $M \subseteq D_f$ a $N = f(M)$

Definícia

Inverznou funkciou k injektívnej funkcii f na množine M nazývame funkciu definovanú na N, ktorá každému $y \in N$ priradí číslo $x \in M$ také, že $y = f(x)$.

Veta (o vzťahu f a $\overline{f}$)

Nech f je injektívna na $M \subseteq D_f$, nech $N = f(M)$ a $\overline{f}$ je inverzná funkcia k f. Potom $(\forall x \in M)\ (\overline{f} \circ f)(x) = x$ a $(\forall y \in N)\ (f \circ \overline{f})(y) = y$.

Poznámky:

- zloženie inverznej a pôvodnej funkcie je identita (iné množiny!);
- vzťah „byť inverzný“ je vzájomný, t.j. $\overline{(\overline{f})} = f$;
- geometrická interpretácia: ak $G_f = \{[x, f(x)]; x \in D_f\}$, tak $G_{\overline{f}} = \{[f(x), x], x \in D_f\}$, t.j. ak $[a, b] \in G_f$, tak $[b, a] \in G_{\overline{f}}$ – osová súmernosť cez priamku $y = x$!

Inverzná funkcia = šťastný návrat domov

Globálny predpoklad: f je injektívna na $M \subseteq D_f$ a $N = f(M)$

Definícia

Inverznou funkciou k injektívnej funkcii f na množine M nazývame funkciu definovanú na N, ktorá každému $y \in N$ priradí číslo $x \in M$ také, že $y = f(x)$.

Veta (o vzťahu f a $\bar{f}$)

Nech f je injektívna na $M \subseteq D_f$, nech $N = f(M)$ a $\bar{f}$ je inverzná funkcia k f. Potom $(\forall x \in M)$ $(\bar{f} \circ f)(x) = x$ a $(\forall y \in N)$ $(f \circ \bar{f})(y) = y$.

Poznámky:

- zloženie inverznej a pôvodnej funkcie je identita (iné množiny!);
- vzťah „byť inverzný“ je vzájomný, t.j. $\overline{(\bar{f})} = f$;
- geometrická interpretácia: ak $G_f = \{[x, f(x)]; x \in D_f\}$, tak $G_{\bar{f}} = \{[f(x), x], x \in D_f\}$, t.j. ak $[a, b] \in G_f$, tak $[b, a] \in G_{\bar{f}}$ – osová súmernosť cez priamku $y = x$!

Elementárne versus neelementárne funkcie

Elementárnou funkciou nazývame každú funkciu, ktoré vznikne zo základných elementárnych funkcií konečným počtom operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania

Základné elementárne funkcie:

- konštantná funkcia
- polynóm
- racionálna lomená funkcia
- mocninná funkcia
- exponenciálna a logaritmická funkcia
- goniometrické a cyklometrické funkcie
- hyperbolické a hyperbolometrické funkcie

Funkcie, ktoré nie sú elementárne, nazývame neelementárne. Napr. celá časť E, signum sgn, integrálny sínus, Eulerova gama funkcia, atď.

Elementárne versus neelementárne funkcie

Elementárnou funkciou nazývame každú funkciu, ktoré vznikne zo základných elementárnych funkcií konečným počtom operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania

Základné elementárne funkcie:

- konštantná funkcia
- polynóm
- racionálna lomená funkcia
- mocninná funkcia
- exponenciálna a logaritmická funkcia
- goniometrické a cyklometrické funkcie
- hyperbolické a hyperbolometrické funkcie

Funkcie, ktoré nie sú elementárne, nazývame neelementárne. Napr. celá časť E, signum sgn, integrálny sínus, Eulerova gama funkcia, atď.

Elementárne versus neelementárne funkcie

Elementárnou funkciou nazývame každú funkciu, ktoré vznikne zo základných elementárnych funkcií konečným počtom operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania

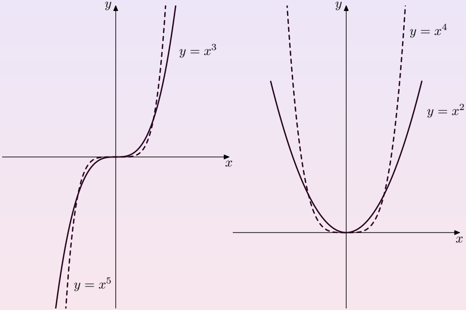
Základné elementárne funkcie:

- konštantná funkcia
- polynóm
- racionálna lomená funkcia
- mocninná funkcia
- exponenciálna a logaritmická funkcia
- goniometrické a cyklometrické funkcie
- hyperbolické a hyperbolometrické funkcie

Funkcie, ktoré nie sú elementárne, nazývame neelementárne. Napr. celá časť E, signum sgn, integrálny sínus, Eulerova gama funkcia, atď.

Základné elementárne funkcie – pripomenutie

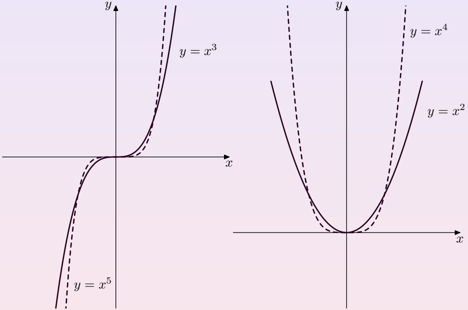
Ak v mocnine s prirodzeným exponentom ponecháme exponent pevný a základ bude premenná veličina, dostávame funkciu $\mathrm{moc}_n : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ktorú nazývame mocninná funkcia s prirodzeným exponentom.



- $D_{\mathrm{moc}_n} = \mathbb{R}$;
- ak $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, tak $H_{\mathrm{moc}_n} = \mathbb{R}$ a funkcia moc_n je nepárna a rastúca na $\mathbb{R}$;
- pre $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, je $H_{\mathrm{moc}_n} = \langle 0, +\infty)$ a funkcia moc_n je párna na $\mathbb{R}$, rastúca na $\langle 0, +\infty)$ a klesajúca na $(-\infty, 0)$;

Základné elementárne funkcie – pripomenutie

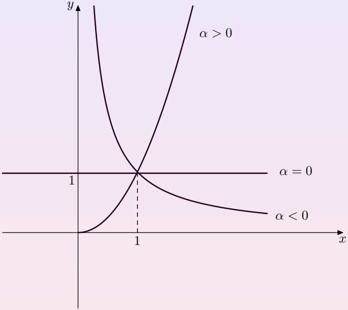
Ak v mocnine s prirodzeným exponentom ponecháme exponent pevný a základ bude premenná veličina, dostávame funkciu $\mathrm{moc}_n : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ktorú nazývame mocninná funkcia s prirodzeným exponentom.



- $D_{\mathrm{moc}_n} = \mathbb{R}$;
- ak $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, tak $H_{\mathrm{moc}_n} = \mathbb{R}$ a funkcia moc_n je nepárna a rastúca na $\mathbb{R}$;
- pre $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, je $H_{\mathrm{moc}_n} = \langle 0, +\infty)$ a funkcia moc_n je párna na $\mathbb{R}$, rastúca na $\langle 0, +\infty)$ a klesajúca na $(-\infty, 0)$;

Základné elementárne funkcie – pripomenutie

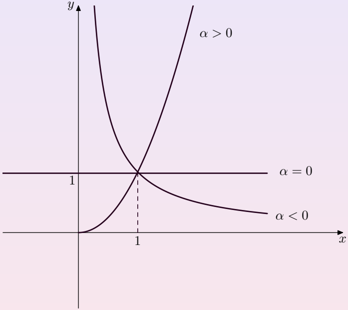
Všeobecnú mocninnú funkciu (s reálnym exponentom) získame z definície mocniny s reálnym exponentom tak, že exponent ponecháme pevný a základ budeme považovať za premennú veličinu, t.j. $\mathrm{moc}_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.



- $D_{\mathrm{moc}_\alpha} = \langle 0, +\infty)$ a $H_{\mathrm{moc}_\alpha} = \langle 0, +\infty)$ pre $\alpha > 0$;
- $D_{\mathrm{moc}_\alpha} = (0, +\infty)$ a $H_{\mathrm{moc}_\alpha} = (0, +\infty)$ pre $\alpha < 0$;
- $D_{\mathrm{moc}_\alpha} = \mathbb{R}$ a a $H_{\mathrm{moc}_\alpha} = \{1\}$ pre $\alpha = 0$;

Základné elementárne funkcie – pripomenutie

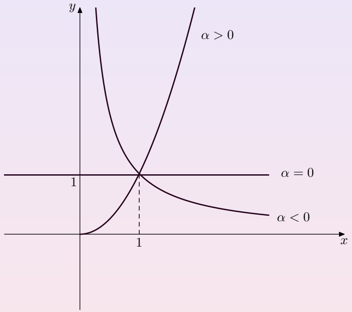
Všeobecnú mocninnú funkciu (s reálnym exponentom) získame z definície mocniny s reálnym exponentom tak, že exponent ponecháme pevný a základ budeme považovať za premennú veličinu, t.j. $\mathrm{moc}_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.



- $D_{\mathrm{moc}_\alpha} = \langle 0, +\infty)$ a $H_{\mathrm{moc}_\alpha} = \langle 0, +\infty)$ pre $\alpha > 0$;
- $D_{\mathrm{moc}_\alpha} = (0, +\infty)$ a $H_{\mathrm{moc}_\alpha} = (0, +\infty)$ pre $\alpha < 0$;
- $D_{\mathrm{moc}_\alpha} = \mathbb{R}$ a a $H_{\mathrm{moc}_\alpha} = \{1\}$ pre $\alpha = 0$;

Základné elementárne funkcie – pripomenutie

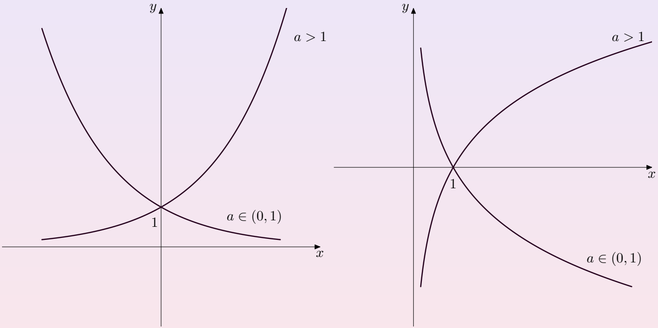
Všeobecnú mocninnú funkciu (s reálnym exponentom) získame z definície mocniny s reálnym exponentom tak, že exponent ponecháme pevný a základ budeme považovať za premennú veličinu, t.j. $\mathrm{moc}_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.



- moc_α je rastúca na $\langle 0, +\infty)$ pre $\alpha > 0$;
- moc_α je klesajúca na $(0, +\infty)$ pre $\alpha < 0$;
- moc_α je konštantná na $\mathbb{R}$ pre $\alpha = 0$;

Základné elementárne funkcie – pripomenutie

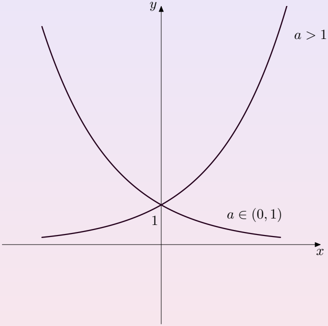
Exponenciálnu funkciu získame z definície mocniny s reálnym exponentom tak, že základ $a > 0$, $a \neq 1$ ponecháme pevný a exponent bude premenná veličina, t.j. $\exp_a : x \mapsto a^x$.

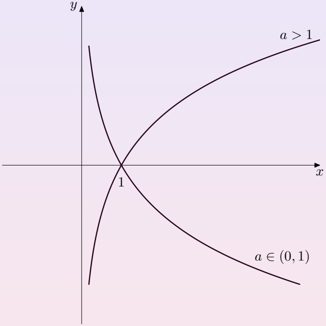


- $D_{\exp_a} = \mathbb{R}$ a $H_{\exp_a} = (0, +\infty)$ pre každé $a > 0$, $a \neq 1$;
- $\exp_a$ je rastúca na $\mathbb{R}$ pre $a > 1$;
- $\exp_a$ je klesajúca na $\mathbb{R}$ pre $a \in (0, 1)$;

Základné elementárne funkcie – pripomenutie

Logaritmickou funkciou $\log_a$ nazývame inverznú funkciu k funkcii $\exp_a : y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.





- $D_{\log_a} = (0, +\infty)$ a $H_{\log_a} = \mathbb{R}$ pre každé $a > 0$, $a \neq 1$;
- $\log_a$ je rastúca na $\mathbb{R}$ pre $a > 1$;
- $\log_a$ je klesajúca na $\mathbb{R}$ pre $a \in (0, 1)$;

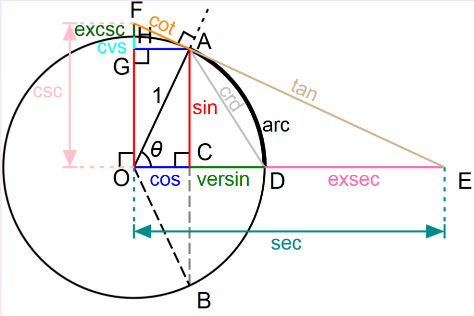
Základné elementárne funkcie – pripomenutie

Sybil: It goes back to the dawn of civilization.

J. Cleese & C. Booth: *Fawlty Towers, The Psychiatrists* (1979)

Indický prínos:

- MUHAMMAD IBN JABIR AL-HARRANI AL-BATTANI (853–929) objavil funkcie sekans a kosekans a vypracoval pre ne prvú tabuľku hodnôt;
- do 10. storočia moslimskí matematici vo svojich prácach používali všetkých 6 goniometrických funkcií – ale predsa existujú aj ďalšie!

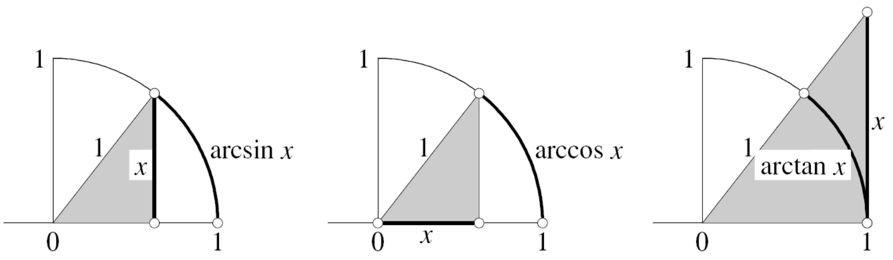


Cyklometrické funkcie

Sit arcus z infinite parvus; erit $\sin z = z$ et $\cos z = 1$...

Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

Pozorovanie: ak sa vrátime ku geometrickej predstave zobrazenia goniometrických funkcií na jednotkovej kružnici, t.j. prislúchajúce súradnice obrazu čísla x na oblúku jednotkovej kružnice, ľahko vieme určiť „inverzný smer“, t.j. aká dĺžka oblúka prislúcha hodnote $\sin x$, $\cos x$ a $\operatorname{tg} x$



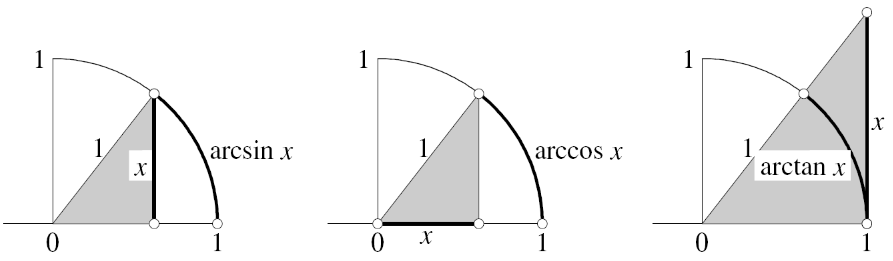
Problém: Inverznú funkciu sme však definovali len pre injektívnu funkciu a goniometrické funkcie sú predsa periodické, a teda nie injektívne!!!

Cyklometrické funkcie

Sit arcus z infinite parvus; erit $\sin z = z$ et $\cos z = 1$...

Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

Pozorovanie: ak sa vrátime ku geometrickej predstave zobrazenia goniometrických funkcií na jednotkovej kružnici, t.j. prislúchajúce súradnice obrazu čísla x na oblúku jednotkovej kružnice, ľahko vieme určiť „inverzný smer“, t.j. aká dĺžka oblúka prislúcha hodnote $\sin x$, $\cos x$ a $\operatorname{tg} x$

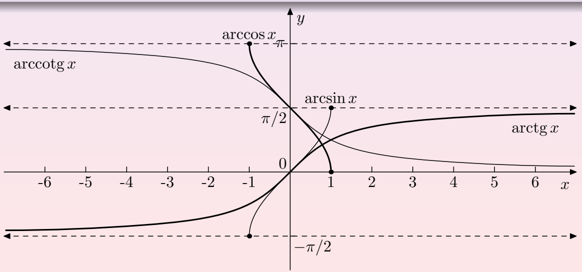


Problém: Inverznú funkciu sme však definovali len pre injektívnu funkciu a goniometrické funkcie sú predsa periodické, a teda nie injektívne!!!

Cyklometrické funkcie

Definícia

(i) Funkciou arkussínus nazývame inverznú funkciu k zúženiu funkcie sin na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Označujeme $\arcsin : \langle -1, 1\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.
(ii) Funkciou arkuskosínus nazývame inverznú funkciu k zúženiu funkcie cos na interval $\langle 0, \pi\rangle$. Označujeme $\arccos : \langle -1, 1\rangle \to \langle 0, \pi\rangle$.
(iii) Funkciou arkustangens nazývame inverznú funkciu k zúženiu funkcie tg na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Označujeme $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
(iv) Funkciou arkuskotangens nazývame inverznú funkciu k zúženiu funkcie cotg na interval $(0, \pi)$. Označujeme $\mathrm{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.



Spojitosť funkcie

Spojitosť je to, čo v procese pohybu neprejavuje prerušenia. Spojitosť – to je absolútne spojenie nasledujúceho s predchádzajúcim.

Aristoteles (384 – 322 p.n.l.)

Správnym výkladom tvrdenia, že sa funkcia $f(x)$ pre všetky hodnoty x, ktoré ležia zvnútra alebo zvonku istých medzí, mení podľa zákona spojitosti, totiž rozumieme len toľko, že ak x je taká hodnota, potom rozdiel $f(x+u)-f(x)$ je možné urobiť menším než každá daná veličina, keď je možné brať u také malé, ako len chceme.

Bernard Bolzano (1817)

... $f(x)$ will be called a *continuous* function, if ... the numerical values of the difference $f(x+\alpha)-f(x)$ decrease indefinitely with those of α ...

Augustin Louis Cauchy (1821)

Pod a a b budeme rozumieť dve pevné hodnoty a pod x premennú veličinu nadobúdajúcu všetky hodnoty medzi a a b. Ak teraz každému x odpovedá jedno jediné konečné y tak, že ak x spojite prebieha interval od a do b, tak sa $y=f(x)$ mení rovnako spojite, potom y sa nazýva spojitou funkciou x pre tento interval.

Peter Gustave Lejeune Dirichlet (1837)

Here we call a quantity y a continuous function of x, if after choosing a quantity ε the existence of δ can be proved, such that for any value between $x_0-\delta$ and $x_0+\delta$ the corresponding value of y lies between $y_0-\varepsilon$ and $y_0+\varepsilon$.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1874)

Pojem spojitosti je nesmierne dôležitý. Ide o ústredný koncept matematickej analýzy umožňujúci matematickými metódami analyzovať procesy a závislosti, s ktorými sa stretávame v iných vedných odboroch i bežnom živote.

Igor Kluvánek

Zopár elementárnych topologických pojmov na reálnej osi

- okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}(x_0)$

– je ľubovoľný otvorený interval obsahujúci bod x_0

- δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$

- pravé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+(x_0)$

– $\mathscr{O}^+(x_0) := (x_0, a)$, kde $a > x_0$

- pravé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta^+(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta^+(x_0) := (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$

- ľavé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-(x_0)$

– $\mathscr{O}^-(x_0) := (b, x_0)$, kde $b < x_0$

- ľavé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta^-(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta, x_0)$, kde $\delta > 0$

Elementárne pozorovania:

– $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}^+(x_0) \cup \mathscr{O}^-(x_0) \cup \{x_0\}$

– ak $\mathscr{O}_1(x_0)$ a $\mathscr{O}_2(x_0)$ sú okolia bodu x_0, tak $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$ je tiež okolie bodu x_0

Zopár elementárnych topologických pojmov na reálnej osi

- okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}(x_0)$

– je ľubovoľný otvorený interval obsahujúci bod x_0

- δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$

- pravé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+(x_0)$

– $\mathscr{O}^+(x_0) := (x_0, a)$, kde $a > x_0$

- pravé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta^+(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta^+(x_0) := (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$

- ľavé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-(x_0)$

– $\mathscr{O}^-(x_0) := (b, x_0)$, kde $b < x_0$

- ľavé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta^-(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta, x_0)$, kde $\delta > 0$

Elementárne pozorovania:

– $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}^+(x_0) \cup \mathscr{O}^-(x_0) \cup \{x_0\}$

– ak $\mathscr{O}_1(x_0)$ a $\mathscr{O}_2(x_0)$ sú okolia bodu x_0, tak $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$ je tiež okolie bodu x_0

Zopár elementárnych topologických pojmov na reálnej osi

- okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}(x_0)$

– je ľubovoľný otvorený interval obsahujúci bod x_0

- δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$

- pravé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+(x_0)$

– $\mathscr{O}^+(x_0) := (x_0, a)$, kde $a > x_0$

- pravé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}^+_\delta(x_0) := (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$

- ľavé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-(x_0)$

– $\mathscr{O}^-(x_0) := (b, x_0)$, kde $b < x_0$

- ľavé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}^-_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0)$, kde $\delta > 0$

Elementárne pozorovania:

– $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}^+(x_0) \cup \mathscr{O}^-(x_0) \cup \{x_0\}$

– ak $\mathscr{O}_1(x_0)$ a $\mathscr{O}_2(x_0)$ sú okolia bodu x_0, tak $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$ je tiež okolie bodu x_0

Zopár elementárnych topologických pojmov na reálnej osi

- okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}(x_0)$

– je ľubovoľný otvorený interval obsahujúci bod x_0

- δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$

- pravé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+(x_0)$

– $\mathscr{O}^+(x_0) := (x_0, a)$, kde $a > x_0$

- pravé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}^+_\delta(x_0) := (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$

- ľavé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-(x_0)$

– $\mathscr{O}^-(x_0) := (b, x_0)$, kde $b < x_0$

- ľavé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}^-_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0)$, kde $\delta > 0$

Elementárne pozorovania:

– $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}^+(x_0) \cup \mathscr{O}^-(x_0) \cup \{x_0\}$

– ak $\mathscr{O}_1(x_0)$ a $\mathscr{O}_2(x_0)$ sú okolia bodu x_0, tak $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$ je tiež okolie bodu x_0

Zopár elementárnych topologických pojmov na reálnej osi

- okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}(x_0)$
– je ľubovoľný otvorený interval obsahujúci bod x_0
- δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta(x_0)$
– $\mathscr{O}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$
- pravé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+(x_0)$
– $\mathscr{O}^+(x_0) := (x_0, a)$, kde $a > x_0$
- pravé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+_\delta(x_0)$
– $\mathscr{O}^+_\delta(x_0) := (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$
- ľavé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-(x_0)$
– $\mathscr{O}^-(x_0) := (b, x_0)$, kde $b < x_0$
- ľavé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-_\delta(x_0)$
– $\mathscr{O}^-_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0)$, kde $\delta > 0$

Elementárne pozorovania:

– $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}^+(x_0) \cup \mathscr{O}^-(x_0) \cup \{x_0\}$
– ak $\mathscr{O}_1(x_0)$ a $\mathscr{O}_2(x_0)$ sú okolia bodu x_0, tak $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$ je tiež okolie bodu x_0

Zopár elementárnych topologických pojmov na reálnej osi

- okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}(x_0)$

– je ľubovoľný otvorený interval obsahujúci bod x_0

- δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$

- pravé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+(x_0)$

– $\mathscr{O}^+(x_0) := (x_0, a)$, kde $a > x_0$

- pravé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}^+_\delta(x_0) := (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$

- ľavé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-(x_0)$

– $\mathscr{O}^-(x_0) := (b, x_0)$, kde $b < x_0$

- ľavé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}^-_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0)$, kde $\delta > 0$

Elementárne pozorovania:

– $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}^+(x_0) \cup \mathscr{O}^-(x_0) \cup \{x_0\}$

– ak $\mathscr{O}_1(x_0)$ a $\mathscr{O}_2(x_0)$ sú okolia bodu x_0, tak $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$ je tiež okolie bodu x_0

Zopár elementárnych topologických pojmov na reálnej osi

- okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}(x_0)$

– je ľubovoľný otvorený interval obsahujúci bod x_0

- δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$

- pravé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^+(x_0)$

– $\mathscr{O}^+(x_0) := (x_0, a)$, kde $a > x_0$

- pravé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta^+(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta^+(x_0) := (x_0, x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$

- ľavé okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^-(x_0)$

– $\mathscr{O}^-(x_0) := (b, x_0)$, kde $b < x_0$

- ľavé δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta^-(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta, x_0)$, kde $\delta > 0$

Elementárne pozorovania:

– $\mathscr{O}(x_0) = \mathscr{O}^+(x_0) \cup \mathscr{O}^-(x_0) \cup \{x_0\}$

– ak $\mathscr{O}_1(x_0)$ a $\mathscr{O}_2(x_0)$ sú okolia bodu x_0, tak $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0)$ je tiež okolie bodu x_0

Ťažkosti s definíciou = kvantifikovanie výroku

„Malým zmenám veličiny x odpovedajú malé zmeny veličiny $f(x)$."

Definícia – spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ také, že $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dôležité pozorovania:

(i) aby sme mohli hovoriť o spojitosti, funkcia f musí byť v bode x_0 definovaná, t.j. $x_0 \in D_f$, aby existovala funkčná hodnota $f(x_0)$;

(ii) pomocou okolí vieme definíciu spojitosti prepísať do tvaru

$$(\forall \mathcal{O}_\varepsilon(f(x_0)))(\exists \mathcal{O}_\delta(x_0))(\forall x \in D_f)\,[x \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(f(x_0))]$$

(iii) v tzv. izolovanom bode $x_0 \in D_f$, t.j. $(\exists \mathcal{O}(x_0))\; D_f \cap \mathcal{O}(x_0)) = \emptyset)$, je každá funkcia spojitá!!!

Ťažkosti s definíciou = kvantifikovanie výroku
„Malým zmenám veličiny x odpovedajú malé zmeny veličiny $f(x)$.“

Definícia – spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ také, že $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dôležité pozorovania:

(i) aby sme mohli hovoriť o spojitosti, funkcia f musí byť v bode x_0 definovaná, t.j. $x_0 \in D_f$, aby existovala funkčná hodnota $f(x_0)$;

(ii) pomocou okolí vieme definíciu spojitosti prepísať do tvaru

$$(\forall \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))(\exists \mathscr{O}_\delta(x_0))(\forall x \in D_f)\,[x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0))]$$

(iii) v tzv. izolovanom bode $x_0 \in D_f$, t.j. $(\exists \mathscr{O}(x_0))\ D_f \cap \mathscr{O}(x_0)) = \emptyset)$, je každá funkcia spojitá!!!

Ťažkosti s definíciou = kvantifikovanie výroku
„Malým zmenám veličiny x odpovedajú malé zmeny veličiny $f(x)$."

Definícia – spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ také, že $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dôležité pozorovania:

(i) aby sme mohli hovoriť o spojitosti, funkcia f musí byť v bode x_0 definovaná, t.j. $x_0 \in D_f$, aby existovala funkčná hodnota $f(x_0)$;

(ii) pomocou okolí vieme definíciu spojitosti prepísať do tvaru

$$(\forall \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))(\exists \mathscr{O}_\delta(x_0))(\forall x \in D_f)\,[x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0))]$$

(iii) v tzv. izolovanom bode $x_0 \in D_f$, t.j. $(\exists \mathscr{O}(x_0))\; D_f \cap \mathscr{O}(x_0)) = \emptyset)$, je každá funkcia spojitá!!!

Ťažkosti s definíciou = kvantifikovanie výroku
„Malým zmenám veličiny x odpovedajú malé zmeny veličiny $f(x)$."

Definícia – spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ také, že $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dôležité pozorovania:

(i) aby sme mohli hovoriť o spojitosti, funkcia f musí byť v bode x_0 definovaná, t.j. $x_0 \in D_f$, aby existovala funkčná hodnota $f(x_0)$;

(ii) pomocou okolí vieme definíciu spojitosti prepísať do tvaru

$$(\forall \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))(\exists \mathscr{O}_\delta(x_0))(\forall x \in D_f)\,[x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0))]$$

(iii) v tzv. izolovanom bode $x_0 \in D_f$, t.j. $(\exists \mathscr{O}(x_0))\, D_f \cap \mathscr{O}(x_0)) = \emptyset)$, je každá funkcia spojitá!!!

Ťažkosti s definíciou = kvantifikovanie výroku
„Malým zmenám veličiny x odpovedajú malé zmeny veličiny $f(x)$.“

Definícia – spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ také, že $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dôležité pozorovania:

(i) aby sme mohli hovoriť o spojitosti, funkcia f musí byť v bode x_0 definovaná, t.j. $x_0 \in D_f$, aby existovala funkčná hodnota $f(x_0)$;

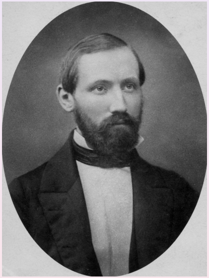
(ii) pomocou okolí vieme definíciu spojitosti prepísať do tvaru

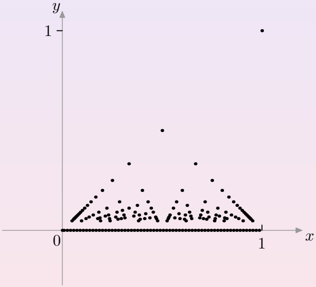
$$(\forall \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))(\exists \mathscr{O}_\delta(x_0))(\forall x \in D_f)\,[x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0))]$$

(iii) v tzv. izolovanom bode $x_0 \in D_f$, t.j. $(\exists \mathscr{O}(x_0))\; D_f \cap \mathscr{O}(x_0)) = \emptyset)$, je každá funkcia spojitá!!!

Riemannova funkcia

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle \text{ alebo } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ je zlomok v základnom tvare } (p, q \in \mathbb{N} \text{ sú nesúdeliteľné}) \end{cases};$$



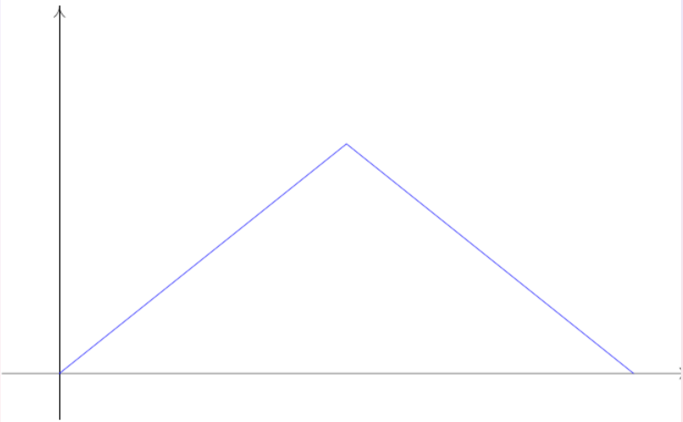


BERNHARD RIEMANN (1826–1866)

Môže byť také niečo spojité?

Nakresliteľnosť grafu funkcie jedným ťahom versus spojitosť

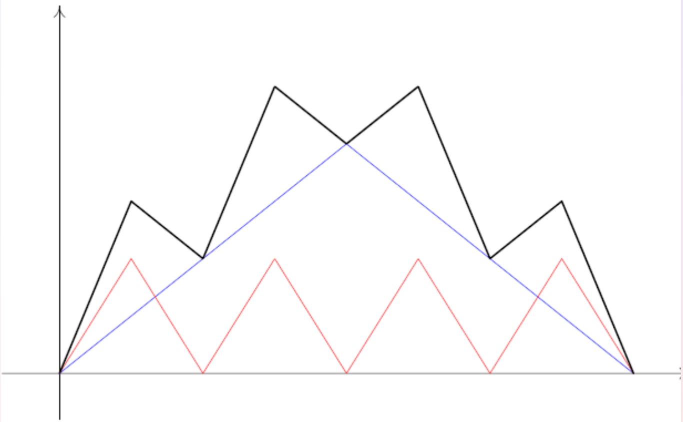
Bolzanova funkcia (1830):



Pohrajte sa: `https://www.geogebra.org/m/cdBzkaXP`

Nakresliteľnosť grafu funkcie jedným ťahom versus spojitosť

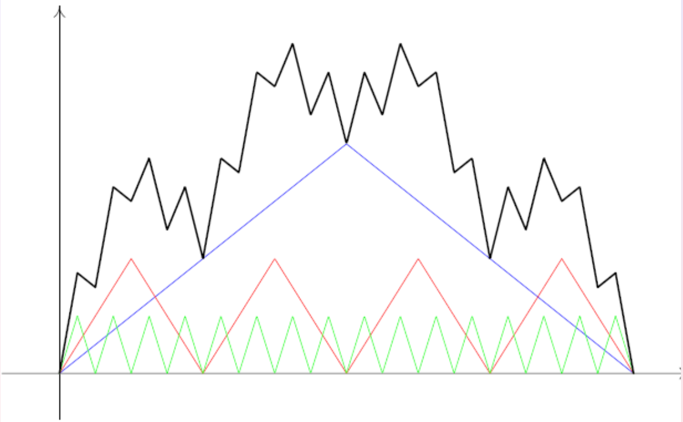
Bolzanova funkcia (1830):



Pohrajte sa: `https://www.geogebra.org/m/cdBzkaXP`

Nakresliteľnosť grafu funkcie jedným ťahom versus spojitosť

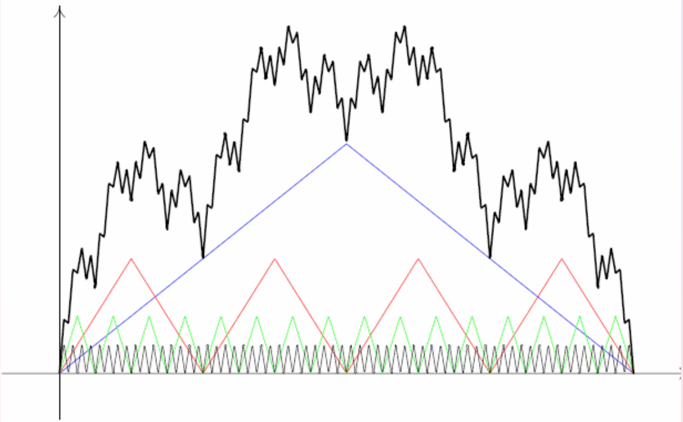
Bolzanova funkcia (1830):



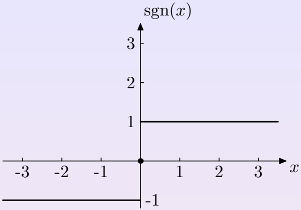
Pohrajte sa: `https://www.geogebra.org/m/cdBzkaXP`

Nakresliteľnosť grafu funkcie jedným ťahom versus spojitosť

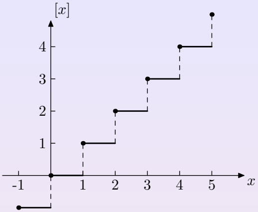
Bolzanova funkcia (1830):



Pohrajte sa: `https://www.geogebra.org/m/cdBzkaXP`



„hrubo“ nespojitá



„jednostranne“ nespojitá

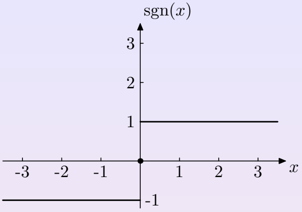
Definícia – jednostranná spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$ sprava [zľava], akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ platí, že ak $x \in \langle x_0, x_0 + \delta)$ [$x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle$], tak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

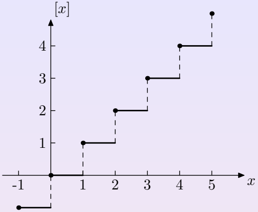
Dôležité pozorovania:

(i) ak f je definovaná len na nejakom pravom [ľavom] okolí bodu $x_0 \in D_f$, tak spojitosť f v bode x_0 je ekvivalentná spojitosti f sprava [zľava] v x_0;

(ii) ak $x_0 \in D_f$ je izolovaný bod, tak podľa definície f je zrejme spojitá sprava aj zľava v bode x_0 (a už vieme, že je tam aj spojitá!).



„hrubo“ nespojitá



„jednostranne“ nespojitá

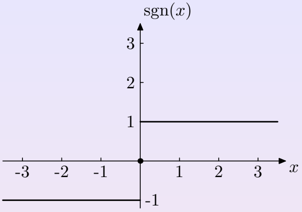
Definícia – jednostranná spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$ sprava [zľava], akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ platí, že ak $x \in \langle x_0, x_0 + \delta)$ $[x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle]$, tak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

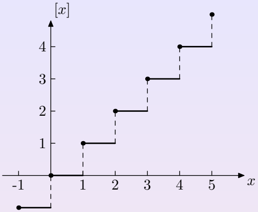
Dôležité pozorovania:

(i) ak f je definovaná len na nejakom pravom [ľavom] okolí bodu $x_0 \in D_f$, tak spojitosť f v bode x_0 je ekvivalentná spojitosti f sprava [zľava] v x_0;

(ii) ak $x_0 \in D_f$ je izolovaný bod, tak podľa definície f je zrejme spojitá sprava aj zľava v bode x_0 (a už vieme, že je tam aj spojitá!).



„hrubo“ nespojitá



„jednostranne“ nespojitá

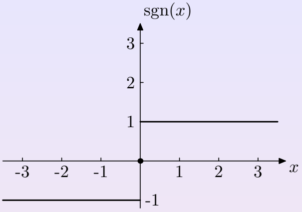
Definícia – jednostranná spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$ sprava [zľava], akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ platí, že ak $x \in \langle x_0, x_0 + \delta)$ $[x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle]$, tak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

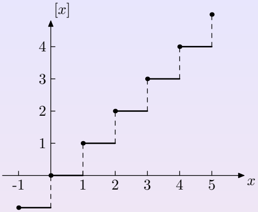
Dôležité pozorovania:

(i) ak f je definovaná len na nejakom pravom [ľavom] okolí bodu $x_0 \in D_f$, tak spojitosť f v bode x_0 je ekvivalentná spojitosti f sprava [zľava] v x_0;

(ii) ak $x_0 \in D_f$ je izolovaný bod, tak podľa definície f je zrejme spojitá sprava aj zľava v bode x_0 (a už vieme, že je tam aj spojitá!).



„hrubo“ nespojitá



„jednostranne“ nespojitá

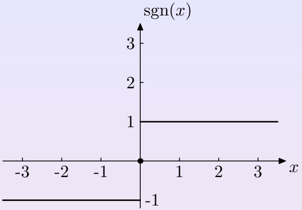
Definícia – jednostranná spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$ sprava [zľava], akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ platí, že ak $x \in \langle x_0, x_0 + \delta)$ $[x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle]$, tak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

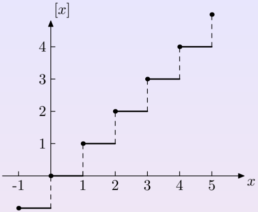
Dôležité pozorovania:

(i) ak f je definovaná len na nejakom pravom [ľavom] okolí bodu $x_0 \in D_f$, tak spojitosť f v bode x_0 je ekvivalentná spojitosti f sprava [zľava] v x_0;

(ii) ak $x_0 \in D_f$ je izolovaný bod, tak podľa definície f je zrejme spojitá sprava aj zľava v bode x_0 (a už vieme, že je tam aj spojitá!).



„hrubo“ nespojitá



„jednostranne“ nespojitá

Definícia – jednostranná spojitosť funkcie v bode

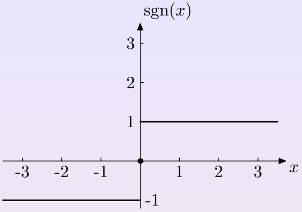
Hovoríme, že f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$ sprava [zľava], akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ platí, že ak $x \in \langle x_0, x_0 + \delta)$ $[x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle]$, tak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

— ako súvisí jednostranná spojitosť a spojitosť funkcie v bode?

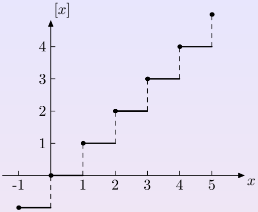
— pre izolované body oba pojmy splývajú!!! A pre ostatné?

Veta (vzťah spojitosti a jednostrannej spojitosti)

Nech f je definovaná na okolí bodu x_0. Funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď f je spojitá v x_0 sprava a súčasne zľava.



„hrubo“ nespojitá



„jednostranne“ nespojitá

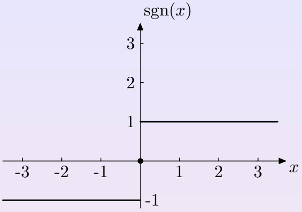
Definícia – jednostranná spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$ sprava [zľava], akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ platí, že ak $x \in \langle x_0, x_0 + \delta)$ [$x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle$], tak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

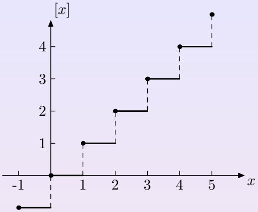
— ako súvisí jednostranná spojitosť a spojitosť funkcie v bode?
— pre izolované body oba pojmy splývajú!!! A pre ostatné?

Veta (vzťah spojitosti a jednostrannej spojitosti)

Nech f je definovaná na okolí bodu x_0. Funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď f je spojitá v x_0 sprava a súčasne zľava.



„hrubo“ nespojitá



„jednostranne“ nespojitá

Definícia – jednostranná spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$ sprava [zľava], akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ platí, že ak $x \in \langle x_0, x_0 + \delta)$ $[x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle]$, tak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

— ako súvisí jednostranná spojitosť a spojitosť funkcie v bode?

— pre izolované body oba pojmy splývajú!!! A pre ostatné?

Veta (vzťah spojitosti a jednostrannej spojitosti)

Nech f je definovaná na okolí bodu x_0. Funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď f je spojitá v x_0 sprava a súčasne zľava.