Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

`umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html`

Prednáška 4

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

9. októbra 2023

Operácie so spojitými funkciami

Zopakovanie: funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))$

Veta (algebrické operácie so spojitosťou funkcie)

Nech f, g sú spojité v bode $x_0 \in D_f \cap D_g$. Potom $f \pm g$, $f \cdot g$ a $|f|$ sú spojité v bode x_0. Ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak aj $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode x_0.

Poznámky a príklady:

– konštantná funkcia $\mathrm{konst} : x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$, je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;
– identita $\mathrm{id} : x \mapsto x$ je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;
– mocninná funkcia $\mathrm{moc}_m : x \mapsto x^m$, $m \in \mathbb{Z}$, je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (výnimky!);
– polynóm $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je spojitá funkcia v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;
– racionálna funkcia $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je spojitá v každom $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{z \in \mathbb{R}; Q(z) = 0\}$;

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Pozor: Veta o spojitosti zloženej funkcie dáva iba postačujúcu podmienku spojitosti kompozície, nie však nutnú (stačí uvažovať funkcie $f = g = \chi$)!

Operácie so spojitými funkciami

Zopakovanie: funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))$

Veta (algebrické operácie so spojitosťou funkcie)

Nech f, g sú spojité v bode $x_0 \in D_f \cap D_g$. Potom $f \pm g$, $f \cdot g$ a $|f|$ sú spojité v bode x_0. Ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak aj $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode x_0.

Poznámky a príklady:

– konštantná funkcia $\mathrm{konst} : x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$, je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;
– identita $\mathrm{id} : x \mapsto x$ je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;
– mocninná funkcia $\mathrm{moc}_m : x \mapsto x^m$, $m \in \mathbb{Z}$, je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (výnimky!);
– polynóm $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je spojitá funkcia v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;
– racionálna funkcia $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je spojitá v každom $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{z \in \mathbb{R}; Q(z) = 0\}$;

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Pozor: Veta o spojitosti zloženej funkcie dáva iba postačujúcu podmienku spojitosti kompozície, nie však nutnú (stačí uvažovať funkcie $f = g = \chi$)!

Operácie so spojitými funkciami

Zopakovanie: funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))$

Veta (algebrické operácie so spojitosťou funkcie)

Nech f, g sú spojité v bode $x_0 \in D_f \cap D_g$. Potom $f \pm g$, $f \cdot g$ a $|f|$ sú spojité v bode x_0. Ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak aj $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode x_0.

Poznámky a príklady:

– konštantná funkcia $\mathrm{konst} : x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$, je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;

– identita $\mathrm{id} : x \mapsto x$ je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;

– mocninná funkcia $\mathrm{moc}_m : x \mapsto x^m$, $m \in \mathbb{Z}$, je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (výnimky!);

– polynóm $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je spojitá funkcia v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;

– racionálna funkcia $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je spojitá v každom $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{z \in \mathbb{R}; Q(z) = 0\}$;

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Pozor: Veta o spojitosti zloženej funkcie dáva iba postačujúcu podmienku spojitosti kompozície, nie však nutnú (stačí uvažovať funkcie $f = g = \chi$)!

Operácie so spojitými funkciami

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Veta (o spojitosti základných elementárnych funkcií)

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

Čo už sme a čo ešte nie sme schopní zdôvodniť:

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ? exponenciálna funkcia e^x
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ? funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Veta (o spojitosti základných elementárnych funkcií)

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

Čo už sme a čo ešte nie sme schopní zdôvodniť:

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ? exponenciálna funkcia e^x
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ? funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Veta (o spojitosti základných elementárnych funkcií)

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

Čo už sme a čo ešte nie sme schopní zdôvodniť:

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ? exponenciálna funkcia e^x
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = e^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ? funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Veta (o spojitosti základných elementárnych funkcií)

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

Čo už sme a čo ešte nie sme schopní zdôvodniť:

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ? exponenciálna funkcia e^x
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ? funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Veta (o spojitosti základných elementárnych funkcií)

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

Čo už sme a čo ešte nie sme schopní zdôvodniť:

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ? exponenciálna funkcia e^x
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ? funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Veta (o spojitosti základných elementárnych funkcií)

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

Čo už sme a čo ešte nie sme schopní zdôvodniť:

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ? exponenciálna funkcia e^x
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ? funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Veta (o spojitosti základných elementárnych funkcií)

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

Čo už sme a čo ešte nie sme schopní zdôvodniť:

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ? exponenciálna funkcia e^x
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ? funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

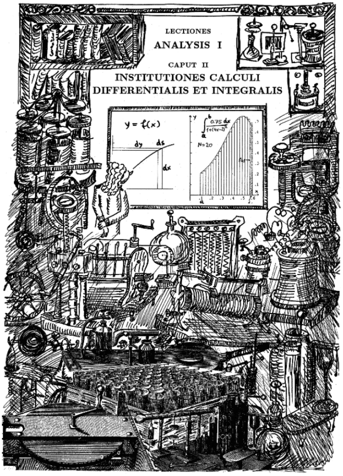
Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Veta (o spojitosti základných elementárnych funkcií)

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

Čo už sme a čo ešte nie sme schopní zdôvodniť:

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ? exponenciálna funkcia e^x
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ? funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie



The extent of this calculus is immense: it applies to curves both mechanical and geometrical; radical signs cause it no difficulty, and even are often convenient; it extends to as many variables as one wishes; the comparison of infinitely small quantities of all sorts is easy. And it gives rise to an infinity of surprising discoveries concerning curved or straight tangents, questions *De maximis & minimis*, inflexion points and cusps of curves, envelopes, caustics from reflexion or refraction, &c. as we shall see in this work.

Marquis de L'Hospital: *Analyse des infiniment petits* (1696)

Infinitezimálny počet – motivácia

> And I dare say that this is not only the most useful and most general problem in geometry that I know, but even that I ever desired to know.
>
> Descartes: *La Geometrie*, Appendix to the *Discours de la methode* (1637)

> What contempt for the non-English! We have found these methods, without any help from the English.
>
> Joh. Bernoulli: *Opera*, vol. IV (1735), p. 70

> Isaac Newton was not a pleasant man. His relations with other academics were notorious, with most of his later life spent embroiled in heated disputes... A serious dispute arose with the German philosopher Gottfried Leibniz. Both Leibniz and Newton had independently developed a branch of mathematics called calculus, which underlies most of modern physics...
>
> Hawking: *A Brief History of Time* (1988)

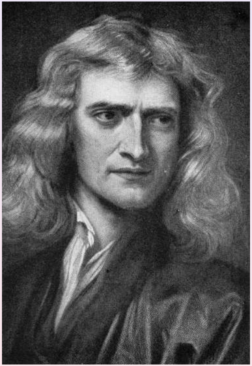
Problém: Nech $y = f(x)$ je daná krivka. V každom bode x chceme poznať sklon krivky, dotyčnicu ku krivke a normálu ku krivke.

Motivácie:

— výpočet uhla, pod ktorým sa dve krivky pretínajú (Descartes);
— konštrukcia ďalekohľadov (Galilei) a hodín (Huygens 1673);
— nájdenie maxima a minima funkcie (Fermat 1638);
— rýchlosť a zrýchlenie pohybu (Galilei 1638, Newton 1686);
— astronómia, overenie gravitačného zákona (Kepler, Newton).

Derivácia rodiaca sa:

– derivácia umožňuje popis fyzikálnych dejov a geometrické správanie sa funkcií



ISAAC NEWTON (1643–1727)

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716)

Derivácia uháňajúca:

– derivácia udáva *rýchlosť zmien fyzikálnych veličín* $\Rightarrow$ derivácia umožňuje merať rýchlosť dejov najrôznejšieho druhu

Derivácia tvarujúca:

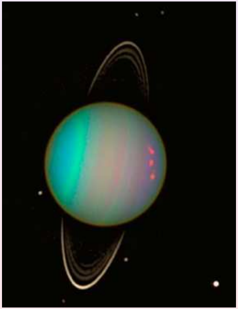
– derivácia funkcie v bode je *smernica jej dotyčnice* v danom bode, t.j. udáva ako rýchlo funkcia rastie alebo klesá
– druhá derivácia udává *mieru konvexnosti či konkávnosti* $\Rightarrow$ derivácia je vhodný nástroj pre popis kriviek najrôznejšieho druhu

Derivácia zjednodušujúca:

– derivácia slúži na *aproximáciu funkcie*, ak ju nahradíme jej dotyčnicou $\Rightarrow$ namiesto všeobecne komplikovaných závislostí medzi veličinami pracujeme s lineárnymi funkciami a rovnicami

Derivácia všeobklopujúca:

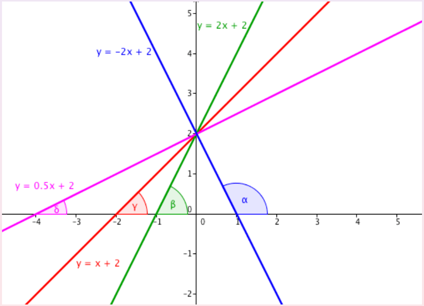
– keďže väčšina fyzikálnych dejov prebieha tak, že zmena jednej veličiny vyvoláva zmenu či prítomnosť inej veličiny, je derivácia *ideálnym prostriedkom pre formulovanie fyzikálnych zákonov* $\Rightarrow$ popisuje všetko, čo nás obklopuje



Maličké pripomenutie z geometrie

Všeobecný tvar priamky: $ax + by + c = 0$
Smernicový tvar priamky: $y = kx + q$, kde $k = -\frac{a}{b}$ a $q = -\frac{c}{b}$ pre $b \neq 0$
– k nazývame smernica, pričom $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je smerový uhol priamky
– koeficient $|q|$ udáva veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi o_y

Špeciálne: rovnica priamky so smernicou m a prechádzajúca bodom $[x_0, y_0]$ má tvar $y = y_0 + m(x - x_0)$.

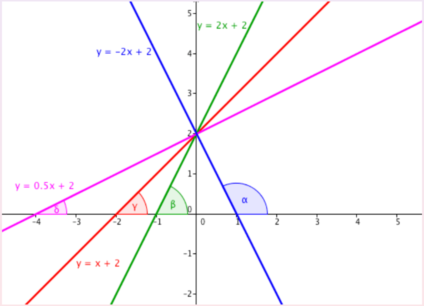


Úloha: Pre danú funkciu f a bod $x_0 \in D_f$ chceme nájsť dotyčnicu ku grafu funkcie v bode $[x_0, f(x_0)]$.

Maličké pripomenutie z geometrie

Všeobecný tvar priamky: $ax + by + c = 0$
Smernicový tvar priamky: $y = kx + q$, kde $k = -\frac{a}{b}$ a $q = -\frac{c}{b}$ pre $b \neq 0$
– k nazývame smernica, pričom $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je smerový uhol priamky
– koeficient $|q|$ udáva veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi o_y

Špeciálne: rovnica priamky so smernicou m a prechádzajúca bodom $[x_0, y_0]$ má tvar $y = y_0 + m(x - x_0)$.



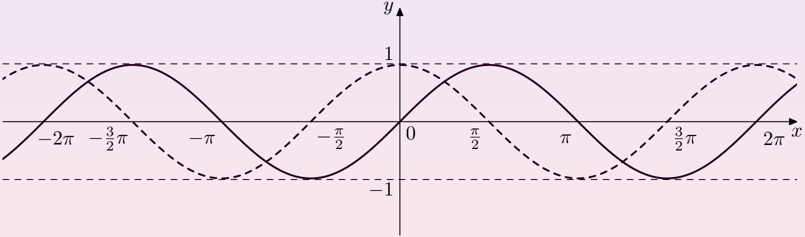
Úloha: Pre danú funkciu f a bod $x_0 \in D_f$ chceme nájsť dotyčnicu ku grafu funkcie v bode $[x_0, f(x_0)]$.

Pozor na predbiehanie (hlavne cez plnú čiaru)!

Pripomenutie: pravé okolie $\mathscr{O}^+(x_0)$ a ľavé okolie $\mathscr{O}^-(x_0)$ bodu x_0

Definícia (f predbieha g v bode x_0)

Nech $I = D_f \cap D_g$. Hovoríme, že funkcia f predbieha funkciu g v bode $x_0 \in I$, akk existuje $\mathscr{O}(x_0)$ také, že pre všetky $x \in I \cap \mathscr{O}^-(x_0)$ je $f(x) < g(x)$ a pre všetky $x \in I \cap \mathscr{O}^+(x_0)$ je $f(x) > g(x)$.



Príklady:

(i) funkcia sin predbieha cos v bode $\frac{\pi}{4}$;

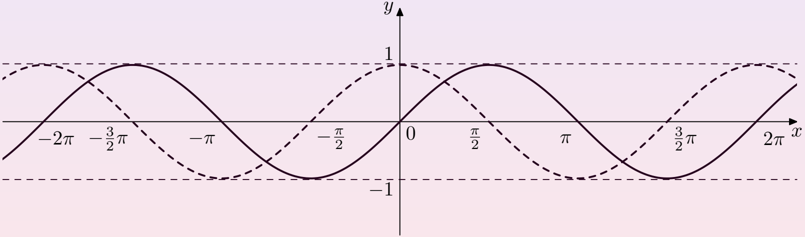
(ii) priamka $y = 0$ predbieha funkciu sin v bode π;

Pozor na predbiehanie (hlavne cez plnú čiaru)!

Pripomenutie: pravé okolie $\mathscr{O}^+(x_0)$ a ľavé okolie $\mathscr{O}^-(x_0)$ bodu x_0

Definícia (f predbieha g v bode x_0)

Nech $I = D_f \cap D_g$. Hovoríme, že funkcia f predbieha funkciu g v bode $x_0 \in I$, akk existuje $\mathscr{O}(x_0)$ také, že pre všetky $x \in I \cap \mathscr{O}^-(x_0)$ je $f(x) < g(x)$ a pre všetky $x \in I \cap \mathscr{O}^+(x_0)$ je $f(x) > g(x)$.



Príklady:

(i) funkcia sin predbieha cos v bode $\frac{\pi}{4}$;

(ii) priamka $y = 0$ predbieha funkciu sin v bode π;

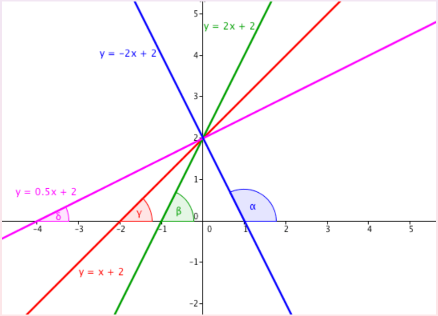
Derivácia funkcie

Definícia (derivácie funkcie)

Hovoríme, že funkcia f má **deriváciu** v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.



Aplet: `http://danaernst.com/CalculusApplets/SecantTangent`

Derivácia funkcie

Definícia (derivácie funkcie)

Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists m_0 \in \mathbb{R})$
(i)$(\forall m_1 < m_0)(\exists \mathcal{O}_1(x_0))$

- $(\forall x \in \mathcal{O}_1^-(x_0))\, f(x) - (f(x_0) + m_1(x - x_0)) < 0$
- $(\forall x \in \mathcal{O}_1^+(x_0))\, f(x) - (f(x_0) + m_1(x - x_0)) > 0$

(ii) $(\forall m_2 > m_0)(\exists \mathcal{O}_2(x_0))$

- $(\forall x \in \mathcal{O}_2^-(x_0))\, f(x) - (f(x_0) + m_2(x - x_0)) > 0$
- $(\forall x \in \mathcal{O}_2^+(x_0))\, f(x) - (f(x_0) + m_2(x - x_0)) < 0$

Derivácia funkcie

Definícia (derivácie funkcie)

Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists m_0 \in \mathbb{R})$
(i)$(\forall m_1 < m_0)(\exists \mathscr{O}_1(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}_1^-(x_0))\, f(x) - (f(x_0) + m_1(x - x_0)) < 0$
- $(\forall x \in \mathscr{O}_1^+(x_0))\, f(x) - (f(x_0) + m_1(x - x_0)) > 0$

(ii) $(\forall m_2 > m_0)(\exists \mathscr{O}_2(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}_2^-(x_0))\, f(x) - (f(x_0) + m_2(x - x_0)) > 0$
- $(\forall x \in \mathscr{O}_2^+(x_0))\, f(x) - (f(x_0) + m_2(x - x_0)) < 0$

Derivácia funkcie

Definícia (derivácie funkcie)

Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

Poznámky:

(a) Ak existuje také m_0 z definície, funkciu f sa nazývame diferencovateľná v bode x_0 a píšeme $m_0 = f'(x_0)$. Ak f je diferencovateľná v každom bode množiny, hovoríme, že je diferencovateľná na množine.

(b) Jednoznačnosť: ak také m_0 existuje, tak je jediné!

Príklady a kontrapríklady:

(i) Nájdite deriváciu funkcie $f(x) = x^2$ v bode $x_0 = 3$.

(ii) Je funkcia $f(x) = |x|$ diferencovateľná v bode $x_0 = 0$?

Derivácia funkcie

Definícia (derivácie funkcie)

Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

Poznámky:

(a) Ak existuje také m_0 z definície, funkciu f sa nazývame diferencovateľná v bode x_0 a píšeme $m_0 = f'(x_0)$. Ak f je diferencovateľná v každom bode množiny, hovoríme, že je diferencovateľná na množine.

(b) Jednoznačnosť: ak také m_0 existuje, tak je jediné!

Príklady a kontrapríklady:

(i) Nájdite deriváciu funkcie $f(x) = x^2$ v bode $x_0 = 3$.

(ii) Je funkcia $f(x) = |x|$ diferencovateľná v bode $x_0 = 0$?

Derivácia funkcie

Definícia (derivácie funkcie)

Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

Poznámky:

(a) Ak existuje také m_0 z definície, funkciu f sa nazývame diferencovateľná v bode x_0 a píšeme $m_0 = f'(x_0)$. Ak f je diferencovateľná v každom bode množiny, hovoríme, že je diferencovateľná na množine.

(b) Jednoznačnosť: ak také m_0 existuje, tak je jediné!

Príklady a kontrapríklady:

(i) Nájdite deriváciu funkcie $f(x) = x^2$ v bode $x_0 = 3$.

(ii) Je funkcia $f(x) = |x|$ diferencovateľná v bode $x_0 = 0$?

Derivácia funkcie

Definícia (derivácie funkcie)

Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

Poznámky:

(a) Ak existuje také m_0 z definície, funkciu f sa nazývame diferencovateľná v bode x_0 a píšeme $m_0 = f'(x_0)$. Ak f je diferencovateľná v každom bode množiny, hovoríme, že je diferencovateľná na množine.

(b) Jednoznačnosť: ak také m_0 existuje, tak je jediné!

Príklady a kontrapríklady:

(i) Nájdite deriváciu funkcie $f(x) = x^2$ v bode $x_0 = 3$.

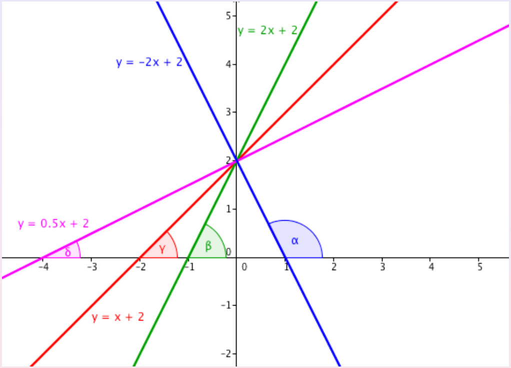
(ii) Je funkcia $f(x) = |x|$ diferencovateľná v bode $x_0 = 0$?

Derivácia funkcie

Pripomenutie: Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.



Definícia (dotyčnica grafu funkcie v bode)

Nech f je diferencovateľná v bode x_0. Priamka $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ so smernicou $f'(x_0)$ prechádzajúca bodom $[x_0, f(x_0)]$ sa nazýva dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$.

His positis calculi regulae erunt tales:

Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimis...* (1684)

Veta (o základných aritmetických operáciách s deriváciami)

Nech f a g majú deriváciu v bode x_0. Potom funkcie $f \pm g$ a $f \cdot g$ majú deriváciu v bode x_0 a platí

(i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak funkcia $\frac{f}{g}$ má deriváciu v bode x_0 a platí

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Veta (o derivácii zloženej funkcie)

Nech g má deriváciu v bode x_0 a f má deriváciu v bode $y_0 = g(x_0)$. Potom funkcia $f \circ g$ má deriváciu v bode x_0 a platí

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Intelektuálna ukážka (Shrek): *Shrek*: Zlobri sú ako cibule... *Oslík*: Smrdia? *Shrek*: Nie, majú vrstvy!

His positis calculi regulae erunt tales:

Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimis...* (1684)

Veta (o základných aritmetických operáciách s deriváciami)

Nech f a g majú deriváciu v bode x_0. Potom funkcie $f \pm g$ a $f \cdot g$ majú deriváciu v bode x_0 a platí

(i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak funkcia $\frac{f}{g}$ má deriváciu v bode x_0 a platí

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Veta (o derivácii zloženej funkcie)

Nech g má deriváciu v bode x_0 a f má deriváciu v bode $y_0 = g(x_0)$. Potom funkcia $f \circ g$ má deriváciu v bode x_0 a platí

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Intelektuálna ukážka (Shrek): *Shrek*: Zlobri sú ako cibule... *Oslík*: Smrdia? *Shrek*: Nie, majú vrstvy!

His positis calculi regulae erunt tales:

Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimis...* (1684)

Veta (o základných aritmetických operáciách s deriváciami)

Nech f a g majú deriváciu v bode x_0. Potom funkcie $f \pm g$ a $f \cdot g$ majú deriváciu v bode x_0 a platí

(i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak funkcia $\frac{f}{g}$ má deriváciu v bode x_0 a platí

(iii) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Veta (o derivácii zloženej funkcie)

Nech g má deriváciu v bode x_0 a f má deriváciu v bode $y_0 = g(x_0)$. Potom funkcia $f \circ g$ má deriváciu v bode x_0 a platí

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Intelektuálna ukážka (Shrek): *Shrek*: Zlobri sú ako cibule... *Oslík*: Smrdia? *Shrek*: Nie, majú vrstvy!

His positis calculi regulae erunt tales:

Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimis...* (1684)

Veta (o základných aritmetických operáciách s deriváciami)

Nech f a g majú deriváciu v bode x_0. Potom funkcie $f \pm g$ a $f \cdot g$ majú deriváciu v bode x_0 a platí

(i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak funkcia $\frac{f}{g}$ má deriváciu v bode x_0 a platí

(iii) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Veta (o derivácii zloženej funkcie)

Nech g má deriváciu v bode x_0 a f má deriváciu v bode $y_0 = g(x_0)$. Potom funkcia $f \circ g$ má deriváciu v bode x_0 a platí

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Intelektuálna ukážka (Shrek): *Shrek*: Zlobri sú ako cibule... *Oslík*: Smrdia? *Shrek*: Nie, majú vrstvy!

Derivácie základných elementárnych funkcií na množine*

- ✓ $(c)' = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$
- ✓ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$
- ✓ $(a^x)' = a^x \ln a$, kde $a > 0$, $a \neq 1$
- ✓ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, kde $a > 0$, $a \neq 1$
- ✓ $(\sin x)' = \cos x$
- ✓ $(\cos x)' = -\sin x$
- ✓ $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- ✓ $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- ✓ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1, 1)$
- ✓ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1, 1)$
- ✓ $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- ✓ $(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- ✓ $(\sinh x)' = \cosh x$ $\qquad (\mathrm{tgh}\, x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- ✓ $(\cosh x)' = \sinh x$ $\qquad (\mathrm{cotgh}\, x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

* ak nie je povedané inak, myslí sa tu na celom definičnom obore!