Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html

Prednáška 5

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

16. októbra 2023

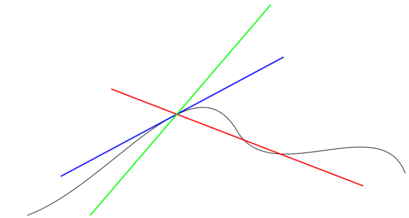
Derivácia funkcie – zopakovanie

Definícia (derivácie funkcie)

Hovoríme, že funkcia f má derivácia v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.



dotyčnica so smernicou $m_0 = f'(x_0)$
priamky so smernicou väčšou ako m_0
priamky so smernicou menšou ako m_0

Aplet: `http://danaernst.com/CalculusApplets/SecantTangent`

Pripomenutie: Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1: y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2: y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

His positis calculi regulae erunt tales:

Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimis...* (1684)

Zhrnutie – základné "pravidlá" o výpočte derivácie

Za príslušných podmienok (presné znenia jednotlivých viet pozri v predchádzajúcej prednáške) platí:

(i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$;

(iv) $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Príklad: Nájdite (a upravte!) deriváciu funkcie f na množine M, ak

$$f(x) = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12} \ln \frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{\sqrt{3}}, \quad M = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}.$$

Pripomenutie: Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že
(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;
(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

His positis calculi regulae erunt tales:

Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimis...* (1684)

Zhrnutie – základné "pravidlá" o výpočte derivácie

Za príslušných podmienok (presné znenia jednotlivých viet pozri v predchádzajúcej prednáške) platí:

(i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$;

(iv) $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Príklad: Nájdite (a upravte!) deriváciu funkcie f na množine M, ak

$$f(x) = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4x-1}{\sqrt{3}}, \quad M = \mathbb{R}\setminus\{-1/2\}.$$

Zhrnutie: derivácie základných elementárnych funkcií na množine*

- ✓ $(c)' = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$
- ✓ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$
- ✓ $(a^x)' = a^x \ln a$, kde $a > 0$, $a \neq 1$
- ✓ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, kde $a > 0$, $a \neq 1$
- ✓ $(\sin x)' = \cos x$
- ✓ $(\cos x)' = -\sin x$
- ✓ $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- ✓ $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- ✓ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1, 1)$
- ✓ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1, 1)$
- ✓ $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- ✓ $(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- ✓ $(\sinh x)' = \cosh x$ $\qquad (\mathrm{tgh}\, x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- ✓ $(\cosh x)' = \sinh x$ $\qquad (\mathrm{cotgh}\, x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

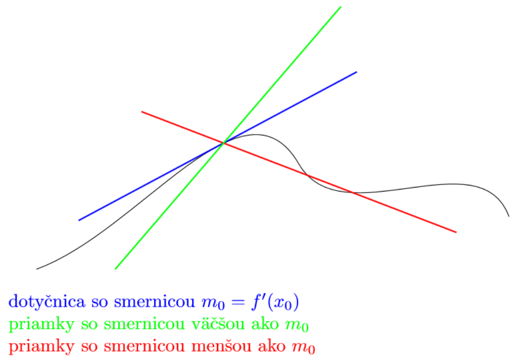
* ak nie je povedané inak, myslí sa tu na celom definičnom obore!

Geometrická interpretácia derivácie

Úloha: Nájdite rovnicu dotyčnice t ku grafu funkcie f v danom bode x_0.

Definícia (dotyčnica grafu funkcie v bode)

Nech f je diferencovateľná v bode x_0. Priamka $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ so smernicou $f'(x_0)$ prechádzajúca bodom $[x_0, f(x_0)]$ sa nazýva dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$.

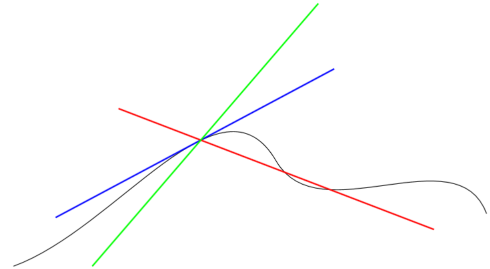


Geometrická interpretácia derivácie

Úloha: Nájdite rovnicu dotyčnice t ku grafu funkcie f v danom bode x_0.

Definícia (dotyčnica grafu funkcie v bode)

Nech f je diferencovateľná v bode x_0. Priamka $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ so smernicou $f'(x_0)$ prechádzajúca bodom $[x_0, f(x_0)]$ sa nazýva dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$.



dotyčnica so smernicou $m_0 = f'(x_0)$
priamky so smernicou väčšou ako m_0
priamky so smernicou menšou ako m_0

Infinitezimálny počet – okolnosti vzniku a motivácia

Derivácia zjednodušujúca:

– derivácia slúži na *aproximáciu funkcie*, ak ju nahradíme jej dotyčnicou
$\Rightarrow$ namiesto všeobecne komplikovaných závislostí medzi veličinami
pracujeme s lineárnymi funkciami a rovnicami

Ako spolu súvisia uvedené vzorce na obrázku?

Geometrická interpretácia derivácie

Pripomenutie: Hovoríme, že funkcia f má deriváciu v bode $x_0 \in D_f$, akk existuje $m_0 \in \mathbb{R}$ také, že

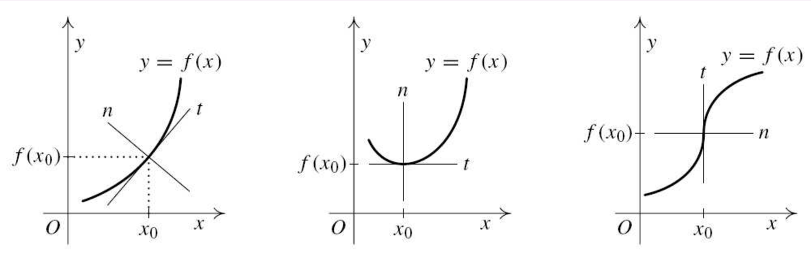
(i) pre každé $m_1 < m_0$ funkcia f predbieha priamku $p_1 : y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$ v bode x_0;

(ii) pre každé $m_2 > m_0$ priamka $p_2 : y = f(x_0) + m_2(x - x_0)$ predbieha funkciu f v bode x_0.

Definícia (dotyčnica grafu funkcie v bode)

Nech f je diferencovateľná v bode x_0. Priamka $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ so smernicou $f'(x_0)$ prechádzajúca bodom $[x_0, f(x_0)]$ sa nazýva dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$.

normála = priamka kolmá na dotyčnicu (ak existuje) prechádzajúca bodom $[x_0, f(x_0)]$



$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ $\quad$ $t : y = f(x_0)$ $\quad$ $t : x = x_0$

$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ $\quad$ $n : x = x_0$ $\quad$ $n : y = f(x_0)$

Derivácie vyšších rádov

But the velocities of the velocities, the second, third, fourth, and fifth velocities, etc., exceed, if I mistake not, all human understanding. The further the mind analyseth and pursueth these fugitive ideas the more it is lost and bewildered; ...

Bishop Berkeley: *The Analyst* (1734)

Definícia – n-tá derivácia funkcie v bode

Nech f má na množine $M \subseteq D_f$ derivácie $f', \dots, f^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ak $f^{(n-1)}$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in M$, tak jej deriváciu nazývame n-tou deriváciou funkcie f v bode $x_0 \in M$ a označujeme $f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0}$.

Príklad: Nájdite druhú deriváciu funkcie $f(x) = x|x|$ v bode $x_0 = 0$.

Veta (o narábaní s deriváciami vyšších rádov)

Nech $m, n \in \mathbb{N}_0$ a f, g sú diferencovateľné na $M \subseteq D_f \cap D_g$ do takého rádu, aby derivácie v tvrdení existovali. Potom pre každé $x \in M$ platí

(i) $\left(f^{(m)}\right)^{(n)}(x) = f^{(m+n)}(x)$;

(ii) $(f \pm g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;

(iii) $(\alpha \cdot f)^{(n)}(x) = \alpha \cdot f^{(n)}(x)$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) **Leibnizovo pravidlo** $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$.

Derivácie vyšších rádov

But the velocities of the velocities, the second, third, fourth, and fifth velocities, etc., exceed, if I mistake not, all human understanding. The further the mind analyseth and pursueth these fugitive ideas the more it is lost and bewildered; ...

Bishop Berkeley: *The Analyst* (1734)

Definícia – n-tá derivácia funkcie v bode

Nech f má na množine $M \subseteq D_f$ derivácie $f', \dots, f^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ak $f^{(n-1)}$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in M$, tak jej deriváciu nazývame n-tou deriváciou funkcie f v bode $x_0 \in M$ a označujeme $f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0}$.

Príklad: Nájdite druhú deriváciu funkcie $f(x) = x|x|$ v bode $x_0 = 0$.

Veta (o narábaní s deriváciami vyšších rádov)

Nech $m, n \in \mathbb{N}_0$ a f, g sú diferencovateľné na $M \subseteq D_f \cap D_g$ do takého rádu, aby derivácie v tvrdení existovali. Potom pre každé $x \in M$ platí

(i) $\left(f^{(m)}\right)^{(n)}(x) = f^{(m+n)}(x)$;

(ii) $(f \pm g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;

(iii) $(\alpha \cdot f)^{(n)}(x) = \alpha \cdot f^{(n)}(x)$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) **Leibnizovo pravidlo** $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$.

Derivácie vyšších rádov

But the velocities of the velocities, the second, third, fourth, and fifth velocities, etc., exceed, if I mistake not, all human understanding. The further the mind analyseth and pursueth these fugitive ideas the more it is lost and bewildered; ...

Bishop Berkeley: *The Analyst* (1734)

Definícia – n-tá derivácia funkcie v bode

Nech f má na množine $M \subseteq D_f$ derivácie $f', \dots, f^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ak $f^{(n-1)}$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in M$, tak jej deriváciu nazývame n-tou deriváciou funkcie f v bode $x_0 \in M$ a označujeme $f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0}$.

Príklad: Nájdite druhú deriváciu funkcie $f(x) = x|x|$ v bode $x_0 = 0$.

Veta (o narábaní s deriváciami vyšších rádov)

Nech $m, n \in \mathbb{N}_0$ a f, g sú diferencovateľné na $M \subseteq D_f \cap D_g$ do takého rádu, aby derivácie v tvrdení existovali. Potom pre každé $x \in M$ platí

(i) $\left(f^{(m)}\right)^{(n)}(x) = f^{(m+n)}(x)$;

(ii) $(f \pm g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$;

(iii) $(\alpha \cdot f)^{(n)}(x) = \alpha \cdot f^{(n)}(x)$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$;

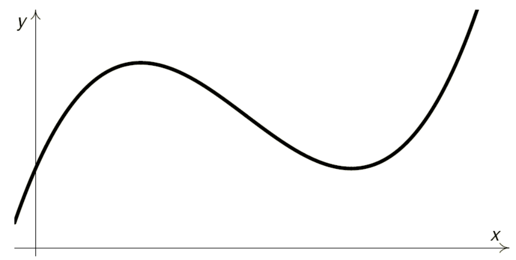
(iv) **Leibnizovo pravidlo** $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$.

Využitie derivácie pri vyšetrovaní správania sa funkcie

... Iní učení muži museli zložitými cestami hľadať to, čo človek skúsený v pomto počte urobí na troch riadkoch...

Leibniz

- predstavenie základných myšlienok



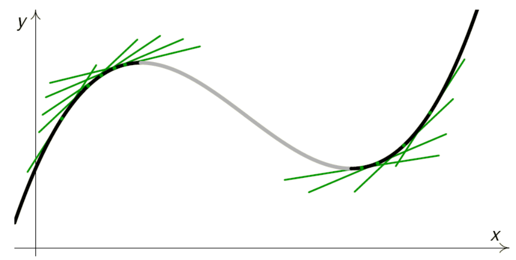
♡ uvažujme funkciu $y = f(x)$

Využitie derivácie pri vyšetrovaní správania sa funkcie

... Iní učení muži museli zložitými cestami hľadať to, čo človek skúsený v pomto počte urobí na troch riadkoch...

Leibniz

- predstavenie základných myšlienok



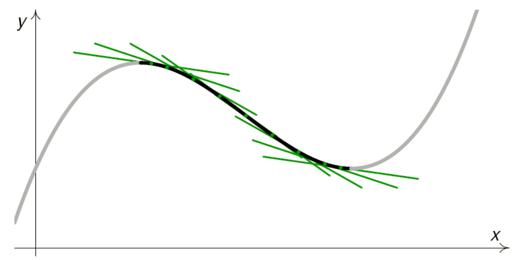
✓ derivácia $y = f'(x) > 0$ (t.j. smernica dotyčnice $\operatorname{tg} \varphi$ je kladná)
= dotyčnica zviera s osou o_x uhol $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$
$\Rightarrow$ funkcia $y = f(x)$ je rastúca

Využitie derivácie pri vyšetrovaní správania sa funkcie

... Iní učení muži museli zložitými cestami hľadať to, čo človek skúsený v pomto počte urobí na troch riadkoch...

Leibniz

- predstavenie základných myšlienok



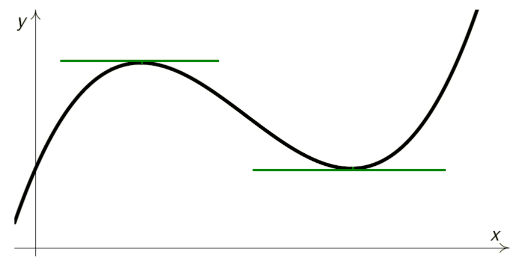
✓ derivácia $y = f'(x) < 0$ (t.j. smernica dotyčnice $\operatorname{tg}\varphi$ je záporná)
= dotyčnica zviera s osou o_x uhol $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$
$\Rightarrow$ funkcia $y = f(x)$ je klesajúca

Využitie derivácie pri vyšetrovaní správania sa funkcie

... Iní učení muži museli zložitými cestami hľadať to, čo človek skúsený v pomto počte urobí na troch riadkoch...

Leibniz

- predstavenie základných myšlienok



✓ lokálne maximum (= bod, v okolí ktorého nie je žiadna väčšia funkčná hodnota) má spojitá funkcia v bode, kde mení monotónnosť

✓ lokálne minimum (= bod, v okolí ktorého nie je žiadna menšia funkčná hodnota) má spojitá funkcia v bode, kde mení monotónnosť

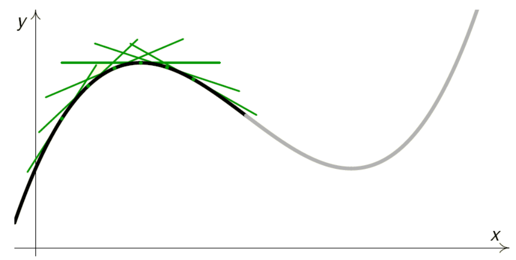
✓ ak f má v bode x_0 lokálny extrém, potom $f'(x_0) = 0$ alebo neexistuje

Využitie derivácie pri vyšetrovaní správania sa funkcie

... Iní učení muži museli zložitými cestami hľadať to, čo človek skúsený v pomto počte urobí na troch riadkoch...

Leibniz

- predstavenie základných myšlienok



✓ $y = f''(x) < 0$ (t.j. $y = f'(x)$ má zápornú deriváciu, teda f' klesá)
$\Rightarrow$ rast funkcie f sa spomaľuje, prípadne sa mení na pokles, ktorý sa zrýchľuje

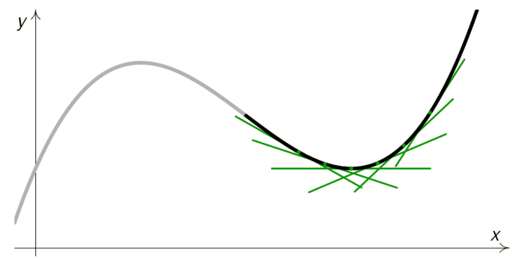
✓ graf funkcie f leží v okolí bodu dotyku pod svojou dotyčnicou, t.j. f je rýdzokonkávna

Využitie derivácie pri vyšetrovaní správania sa funkcie

... Iní učení muži museli zložitými cestami hl'adat' to, čo človek skúsený v pomto počte urobí na troch riadkoch...

Leibniz

```
- predstavenie základných myšlienok
```



✓ $y = f''(x) > 0$ (t.j. $y = f'(x)$ má kladnú deriváciu, teda f' rastie)
$\Rightarrow$ pokles funkcie f sa spomaľuje, prípadne sa mení na rast, ktorý sa zrýchľuje

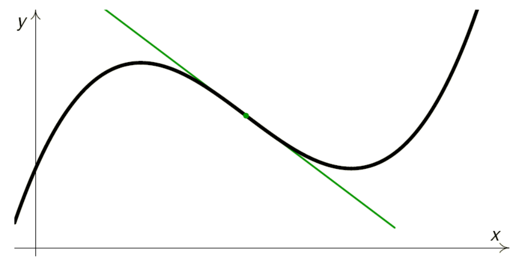
✓ graf funkcie f leží v okolí bodu dotyku nad svojou dotyčnicou, t.j. f je rýdzokonvexná

Využitie derivácie pri vyšetrovaní správania sa funkcie

... Iní učení muži museli zložitými cestami hľadať to, čo človek skúsený v pomto počte urobí na troch riadkoch...

Leibniz

- predstavenie základných myšlienok



✓ konvexnosť sa mení na konkávnosť (a naopak) len v bode, kde sa mení znamienko druhej derivácie, t.j. v bode, kde je druhá derivácia nulová alebo má bod nespojitosti (teda druhá derivácia neexistuje)