Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html

Prednáška 6

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

23. októbra 2023

a) Význam znamienka prvej derivácie

> The extent of this calculus is immense: it applies to curves both mechanical and geometrical; radical signs cause it no difficulty, and even are often convenient; ... and it gives rise to an infinity of surprising discoveries concerning curved or straight tangents, questions *De maximis & minimis*, inflexion points...
>
> Marquis de L'Hospital: *Analyse des infiniment petits* (1696)

Definícia (rýdzomonotónnosti v bode)

Nech f je definovaná na nejakom okolí $\mathscr{O}(x_0)$. Hovoríme, že

(i) f je rastúca v bode x_0, akk f predbieha priamku $p : y = f(x_0)$ v bode x_0;

(ii) f je klesajúca v bode x_0, akk $p : y = f(x_0)$ predbieha f v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rastúca v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) < f(x_0)$
- $(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) > f(x_0)$.

Funkcia f je klesajúca v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) > f(x_0)$
- $(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) < f(x_0)$.

a) Význam znamienka prvej derivácie

> The extent of this calculus is immense: it applies to curves both mechanical and geometrical; radical signs cause it no difficulty, and even are often convenient; ... and it gives rise to an infinity of surprising discoveries concerning curved or straight tangents, questions *De maximis & minimis*, inflexion points...
>
> Marquis de L'Hospital: *Analyse des infiniment petits* (1696)

Definícia (rýdzomonotónnosti v bode)

Nech f je definovaná na nejakom okolí $\mathscr{O}(x_0)$. Hovoríme, že

(i) f je rastúca v bode x_0, akk f predbieha priamku $p : y = f(x_0)$ v bode x_0;

(ii) f je klesajúca v bode x_0, akk $p : y = f(x_0)$ predbieha f v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rastúca v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) < f(x_0)$
- $(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) > f(x_0)$.

Funkcia f je klesajúca v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) > f(x_0)$
- $(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) < f(x_0)$.

a) Význam znamienka prvej derivácie

The extent of this calculus is immense: it applies to curves both mechanical and geometrical; radical signs cause it no difficulty, and even are often convenient; ... and it gives rise to an infinity of surprising discoveries concerning curved or straight tangents, questions *De maximis & minimis*, inflexion points...

Marquis de L'Hospital: *Analyse des infiniment petits* (1696)

Definícia (rýdzomonotónnosti v bode)

Nech f je definovaná na nejakom okolí $\mathscr{O}(x_0)$. Hovoríme, že

(i) f je rastúca v bode x_0, akk f predbieha priamku $p : y = f(x_0)$ v bode x_0;

(ii) f je klesajúca v bode x_0, akk $p : y = f(x_0)$ predbieha f v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rastúca v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) < f(x_0)$
- $(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) > f(x_0)$.

Funkcia f je klesajúca v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) > f(x_0)$
- $(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) < f(x_0)$.

a) Význam znamienka prvej derivácie

> The extent of this calculus is immense: it applies to curves both mechanical and geometrical; radical signs cause it no difficulty, and even are often convenient; ... and it gives rise to an infinity of surprising discoveries concerning curved or straight tangents, questions *De maximis & minimis*, inflexion points...
>
> Marquis de L'Hospital: *Analyse des infiniment petits* (1696)

Definícia (rýdzomonotónnosti v bode)

Nech f je definovaná na nejakom okolí $\mathscr{O}(x_0)$. Hovoríme, že

(i) f je rastúca v bode x_0, akk f predbieha priamku $p : y = f(x_0)$ v bode x_0;

(ii) f je klesajúca v bode x_0, akk $p : y = f(x_0)$ predbieha f v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rastúca v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) < f(x_0)$
- $(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) > f(x_0)$.

Funkcia f je klesajúca v bode $x_0 \in D_f$, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) > f(x_0)$
- $(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) < f(x_0)$.

a) Význam znamienka prvej derivácie

> The extent of this calculus is immense: it applies to curves both mechanical and geometrical; radical signs cause it no difficulty, and even are often convenient; ... and it gives rise to an infinity of surprising discoveries concerning curved or straight tangents, questions *De maximis & minimis*, inflexion points...
>
> Marquis de L'Hospital: *Analyse des infiniment petits* (1696)

Definícia (rýdzomonotónnosti v bode)

Nech f je definovaná na nejakom okolí $\mathscr{O}(x_0)$. Hovoríme, že

(i) f je rastúca v bode x_0, akk f predbieha priamku $p : y = f(x_0)$ v bode x_0;

(ii) f je klesajúca v bode x_0, akk $p : y = f(x_0)$ predbieha f v bode x_0.

Veta (diferencovateľnosť a rýdzomonotónnosť v bode)

Nech f je diferencovateľná v x_0.

(i) Ak $f'(x_0) > 0$, tak f je rastúca v bode x_0.

(ii) Ak $f'(x_0) < 0$, tak f je klesajúca v bode x_0.

Geometrická interpretácia: Ak dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 je rastúca (klesajúca) funkcia, samotná funkcia f je v tomto bode rastúca (klesajúca). Ak $f'(x_0) = 0$, správanie sa funkcie f v bode x_0 nie je určené dotyčnicou.

a) Význam znamienka prvej derivácie

> The extent of this calculus is immense: it applies to curves both mechanical and geometrical; radical signs cause it no difficulty, and even are often convenient; ... and it gives rise to an infinity of surprising discoveries concerning curved or straight tangents, questions *De maximis & minimis*, inflexion points...
>
> Marquis de L'Hospital: *Analyse des infiniment petits* (1696)

Definícia (rýdzomonotónnosti v bode)

Nech f je definovaná na nejakom okolí $\mathscr{O}(x_0)$. Hovoríme, že

(i) f je rastúca v bode x_0, akk f predbieha priamku $p : y = f(x_0)$ v bode x_0;

(ii) f je klesajúca v bode x_0, akk $p : y = f(x_0)$ predbieha f v bode x_0.

Veta (diferencovateľnosť a rýdzomonotónnosť v bode)

Nech f je diferencovateľná v x_0.

(i) Ak $f'(x_0) > 0$, tak f je rastúca v bode x_0.

(ii) Ak $f'(x_0) < 0$, tak f je klesajúca v bode x_0.

Geometrická interpretácia: Ak dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 je rastúca (klesajúca) funkcia, samotná funkcia f je v tomto bode rastúca (klesajúca). Ak $f'(x_0) = 0$, správanie sa funkcie f v bode x_0 nie je určené dotyčnicou.

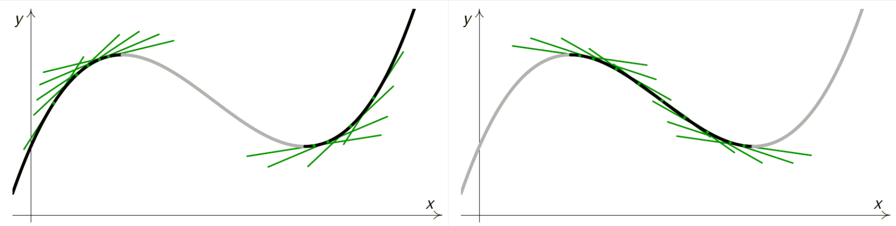
a) Význam znamienka prvej derivácie

Veta (monotónnosť v bode implikuje monotónnosť na intervale)

Nech f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a rastúca [klesajúca] v každom bode $x_0 \in (a, b)$. Potom f je rastúca je [klesajúca] na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok (diferencovateľnosť a rýdzomonotónnosť na intervale)

Nech f je diferencovateľná na (a, b) a $(\forall x \in (a, b))\; f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$. Potom f je rastúca [klesajúca] na (a, b).



Poznámka: dôsledok sa nedá obrátiť, pretože rastúca funkcia na (a, b) nemusí mať kladnú deriváciu na (a, b)! Napr. $f(x) = x^3$ na $\mathbb{R}$.

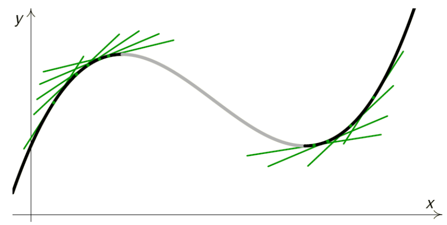
a) Význam znamienka prvej derivácie

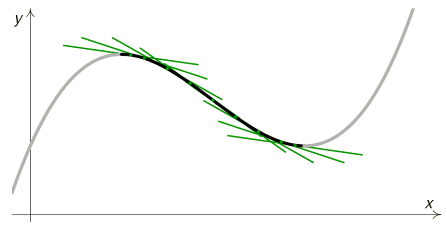
Veta (monotónnosť v bode implikuje monotónnosť na intervale)

Nech f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a rastúca [klesajúca] v každom bode $x_0 \in (a, b)$. Potom f je rastúca je [klesajúca] na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok (diferencovateľnosť a rýdzomonotónnosť na intervale)

Nech f je diferencovateľná na (a, b) a $(\forall x \in (a, b))\ f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$. Potom f je rastúca [klesajúca] na (a, b).





Poznámka: dôsledok sa nedá obrátiť, pretože rastúca funkcia na (a, b) nemusí mať kladnú deriváciu na (a, b)! Napr. $f(x) = x^3$ na $\mathbb{R}$.

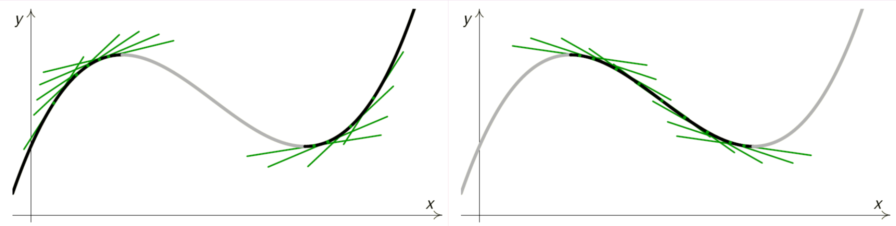
a) Význam znamienka prvej derivácie

Veta (monotónnosť v bode implikuje monotónnosť na intervale)

Nech f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a rastúca [klesajúca] v každom bode $x_0 \in (a, b)$. Potom f je rastúca je [klesajúca] na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok (diferencovateľnosť a rýdzomonotónnosť na intervale)

Nech f je diferencovateľná na (a, b) a $(\forall x \in (a, b))\ f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$. Potom f je rastúca [klesajúca] na (a, b).



Poznámka: dôsledok sa nedá obrátiť, pretože rastúca funkcia na (a, b) nemusí mať kladnú deriváciu na (a, b)! Napr. $f(x) = x^3$ na $\mathbb{R}$.

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (stacionárny bod a bod zvratu)

(i) Bod $x_0 \in D_f$, v ktorom $f'(x_0) = 0$, nazveme stacionárny bod funkcie f.
(ii) Nech f je diferencovateľná na nejakom $\mathscr{O}^*(x_0)$. Hovoríme, že bod $x_0 \in$ je bodom zvratu funkcie f, akk f' mení znamienko v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod $x_0 \in D_f$ je bodom zvratu diferencovateľnej funkcie f, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $[(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f'(x) < 0] \wedge [(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f'(x) > 0]$

alebo

- $[(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f'(x) > 0] \wedge [(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f'(x) < 0]$

Poznámky:

(i) Stacionárny bod funkcie nemusí byť bodom zvratu funkcie!
(ii) Ak však f' je spojitá v bode x_0, tak bod zvratu x_0 je aj stacionárny bod (prečo?)

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (stacionárny bod a bod zvratu)

(i) Bod $x_0 \in D_f$, v ktorom $f'(x_0) = 0$, nazveme stacionárny bod funkcie f.
(ii) Nech f je diferencovateľná na nejakom $\mathscr{O}^*(x_0)$. Hovoríme, že bod $x_0 \in$ je bodom zvratu funkcie f, akk f' mení znamienko v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod $x_0 \in D_f$ je bodom zvratu diferencovateľnej funkcie f, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $[(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f'(x) < 0] \wedge [(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f'(x) > 0]$

alebo

- $[(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f'(x) > 0] \wedge [(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f'(x) < 0]$

Poznámky:

(i) Stacionárny bod funkcie nemusí byť bodom zvratu funkcie!
(ii) Ak však f' je spojitá v bode x_0, tak bod zvratu x_0 je aj stacionárny bod (prečo?)

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (stacionárny bod a bod zvratu)

(i) Bod $x_0 \in D_f$, v ktorom $f'(x_0) = 0$, nazveme stacionárny bod funkcie f.
(ii) Nech f je diferencovateľná na nejakom $\mathscr{O}^*(x_0)$. Hovoríme, že bod $x_0 \in$ je bodom zvratu funkcie f, akk f' mení znamienko v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod $x_0 \in D_f$ je bodom zvratu diferencovateľnej funkcie f, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $[(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f'(x) < 0] \wedge [(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f'(x) > 0]$

alebo

- $[(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f'(x) > 0] \wedge [(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f'(x) < 0]$

Poznámky:

(i) Stacionárny bod funkcie nemusí byť bodom zvratu funkcie!
(ii) Ak však f' je spojitá v bode x_0, tak bod zvratu x_0 je aj stacionárny bod (prečo?)

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (stacionárny bod a bod zvratu)

(i) Bod $x_0 \in D_f$, v ktorom $f'(x_0) = 0$, nazveme stacionárny bod funkcie f.
(ii) Nech f je diferencovateľná na nejakom $\mathscr{O}^*(x_0)$. Hovoríme, že bod $x_0 \in$ je bodom zvratu funkcie f, akk f' mení znamienko v bode x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod $x_0 \in D_f$ je bodom zvratu diferencovateľnej funkcie f, akk $(\exists \mathscr{O}(x_0))$

- $[(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f'(x) < 0] \wedge [(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f'(x) > 0]$

alebo

- $[(\forall x \in \mathscr{O}^-(x_0))\, f'(x) > 0] \wedge [(\forall x \in \mathscr{O}^+(x_0))\, f'(x) < 0]$

Poznámky:

(i) Stacionárny bod funkcie nemusí byť bodom zvratu funkcie!
(ii) Ak však f' je spojitá v bode x_0, tak bod zvratu x_0 je aj stacionárny bod (prečo?)

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (ležať nad/ležať pod)

Nech f, g sú funkcie definované na M. Hovoríme, že graf f leží nad [pod] grafom g v blízkosti bodu $x_0 \in M$, akk existuje $\mathscr{O}(x_0)$ také, že $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))\ f(x) > g(x)$ $[f(x) < g(x)]$.

Definícia (ostrý lokálny extrém funkcie)

Hovoríme, že

(i) bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk graf f leží nad grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0;

(ii) bod x_0 je bodom lokálneho maxima funkcie f, akk graf f leží pod grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\ f(x) > f(x_0)$$

Poznámka: Analogicky sa dajú zaviesť neostré lokálne extrémy, ak umožníme v definícii $f(x) \geq g(x)$, resp. $f(x) \leq g(x)$ – so zmenou terminológie!

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (ležať nad/ležať pod)

Nech f, g sú funkcie definované na M. Hovoríme, že graf f leží nad [pod] grafom g v blízkosti bodu $x_0 \in M$, akk existuje $\mathscr{O}(x_0)$ také, že $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))\, f(x) > g(x)$ $[f(x) < g(x)]$.

Definícia (ostrý lokálny extrém funkcie)

Hovoríme, že

(i) bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk graf f leží nad grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0;

(ii) bod x_0 je bodom lokálneho maxima funkcie f, akk graf f leží pod grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > f(x_0)$$

Poznámka: Analogicky sa dajú zaviesť neostré lokálne extrémy, ak umožníme v definícii $f(x) \geq g(x)$, resp. $f(x) \leq g(x)$ – so zmenou terminológie!

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (ležať nad/ležať pod)

Nech f, g sú funkcie definované na M. Hovoríme, že graf f leží nad [pod] grafom g v blízkosti bodu $x_0 \in M$, akk existuje $\mathscr{O}(x_0)$ také, že $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))\, f(x) > g(x)$ $[f(x) < g(x)]$.

Definícia (ostrý lokálny extrém funkcie)

Hovoríme, že

(i) bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk graf f leží nad grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0;

(ii) bod x_0 je bodom lokálneho maxima funkcie f, akk graf f leží pod grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > f(x_0)$$

Poznámka: Analogicky sa dajú zaviesť neostré lokálne extrémy, ak umožníme v definícii $f(x) \geq g(x)$, resp. $f(x) \leq g(x)$ – so zmenou terminológie!

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (ležať nad/ležať pod)

Nech f, g sú funkcie definované na M. Hovoríme, že graf f leží nad [pod] grafom g v blízkosti bodu $x_0 \in M$, akk existuje $\mathscr{O}(x_0)$ také, že $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))\, f(x) > g(x)$ $[f(x) < g(x)]$.

Definícia (ostrý lokálny extrém funkcie)

Hovoríme, že

(i) bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk graf f leží nad grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0;

(ii) bod x_0 je bodom lokálneho maxima funkcie f, akk graf f leží pod grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > f(x_0)$$

Poznámka: Analogicky sa dajú zaviesť neostré lokálne extrémy, ak umožníme v definícii $f(x) \geq g(x)$, resp. $f(x) \leq g(x)$ – so zmenou terminológie!

a) Význam znamienka prvej derivácie

Definícia (ležať nad/ležať pod)

Nech f, g sú funkcie definované na M. Hovoríme, že graf f leží nad [pod] grafom g v blízkosti bodu $x_0 \in M$, akk existuje $\mathscr{O}(x_0)$ také, že $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))\ f(x) > g(x)$ $[f(x) < g(x)]$.

Definícia (ostrý lokálny extrém funkcie)

Hovoríme, že

(i) bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk graf f leží nad grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0;

(ii) bod x_0 je bodom lokálneho maxima funkcie f, akk graf f leží pod grafom funkcie $p : y = f(x_0)$ v blízkosti bodu x_0.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Bod x_0 je bodom lokálneho minima funkcie f, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > f(x_0)$$

Poznámka: Analogicky sa dajú zaviesť neostré lokálne extrémy, ak umožníme v definícii $f(x) \geq g(x)$, resp. $f(x) \leq g(x)$ – so zmenou terminológie!

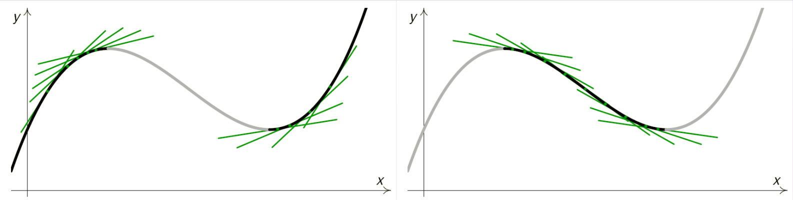
a) Význam znamienka prvej derivácie

Veta (body zvratu a lokálne extrémy)

Nech f je spojitá v bode x_0 a diferencovateľná na $\mathscr{O}^*(x_0)$. Ak x_0 je bod zvratu funkcie f, tak x_0 je bodom lokálneho extrému funkcie f. Presnejšie,

(i) ak f' mení znamienko zo záporného na kladné, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum;

(ii) ak f' mení znamienko z kladného na záporné, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.



Veta (lokálne extrémy cez druhú deriváciu)

Nech x_0 je stacionárny bod funkcie f a f je dvakrát diferencovateľná v x_0.

(i) Ak $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

(ii) Ak $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

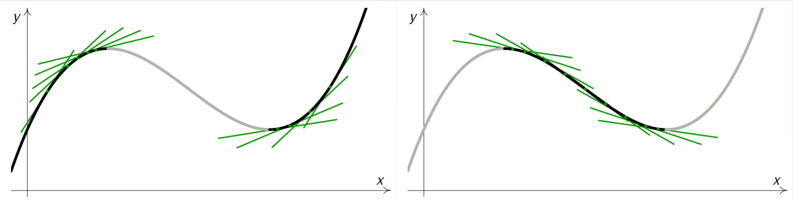
a) Význam znamienka prvej derivácie

Veta (body zvratu a lokálne extrémy)

Nech f je spojitá v bode x_0 a diferencovateľná na $\mathscr{O}^*(x_0)$. Ak x_0 je bod zvratu funkcie f, tak x_0 je bodom lokálneho extrému funkcie f. Presnejšie,

(i) ak f' mení znamienko zo záporného na kladné, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum;

(ii) ak f' mení znamienko z kladného na záporné, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.



Veta (lokálne extrémy cez druhú deriváciu)

Nech x_0 je stacionárny bod funkcie f a f je dvakrát diferencovateľná v x_0.

(i) Ak $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

(ii) Ak $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

There are in a plane certain terminated bent lines, which either lie wholly on the same side of the straight lines joining their extremities, or have not part of them on the other side.

Archimedes: *On the sphere and cylinder*

It seems to me that the notion of convex function is just as fundamental as positive function or increasing function. If am not mistaken in this, the notion ought to find its place in elementary expositions of the theory of real functions

Jensen: *Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdie* (1905)

Superkrátka história konvexnosti:

- staroveké Grécko: objav pravidelných konvexných mnohostenov = Platónske telesá (kocka, štvorsten, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten)
- Leonhard Euler (1707–1783): v uzavretom konvexnom mnohostene platí $V - E + F = 2$
- Otto Stolz (1842–1905) poznal už roku 1893 vzťah medzi konvexnou a diferencovateľnou funkciou
- konvexná funkcia má v rodnom liste oficiálne rok narodenia 1906 a otca Johana L. W. V. Jensena (1859–1925)

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

There are in a plane certain terminated bent lines, which either lie wholly on the same side of the straight lines joining their extremities, or have not part of them on the other side.

Archimedes: *On the sphere and cylinder*

It seems to me that the notion of convex function is just as fundamental as positive function or increasing function. If am not mistaken in this, the notion ought to find its place in elementary expositions of the theory of real functions

Jensen: *Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdie* (1905)

Superkrátka história konvexnosti:

- staroveké Grécko: objav pravidelných konvexných mnohostenov = Platónske telesá (kocka, štvorsten, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten)
- LEONHARD EULER (1707–1783): v uzavretom konvexnom mnohostene platí $V - E + F = 2$
- OTTO STOLZ (1842–1905) poznal už roku 1893 vzťah medzi konvexnou a diferencovateľnou funkciou
- konvexná funkcia má v rodnom liste oficiálne rok narodenia 1906 a otca JOHANA L. W. V. JENSENA (1859–1925)

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

There are in a plane certain terminated bent lines, which either lie wholly on the same side of the straight lines joining their extremities, or have not part of them on the other side.

Archimedes: *On the sphere and cylinder*

It seems to me that the notion of convex function is just as fundamental as positive function or increasing function. If am not mistaken in this, the notion ought to find its place in elementary expositions of the theory of real functions

Jensen: *Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdie* (1905)

Superkrátka história konvexnosti:

- staroveké Grécko: objav pravidelných konvexných mnohostenov = Platónske telesá (kocka, štvorsten, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten)
- LEONHARD EULER (1707–1783): v uzavretom konvexnom mnohostene platí $V - E + F = 2$
- OTTO STOLZ (1842–1905) poznal už roku 1893 vzťah medzi konvexnou a diferencovateľnou funkciou
- konvexná funkcia má v rodnom liste oficiálne rok narodenia 1906 a otca JOHANA L. W. V. JENSENA (1859–1925)

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

There are in a plane certain terminated bent lines, which either lie wholly on the same side of the straight lines joining their extremities, or have not part of them on the other side.

Archimedes: *On the sphere and cylinder*

It seems to me that the notion of convex function is just as fundamental as positive function or increasing function. If am not mistaken in this, the notion ought to find its place in elementary expositions of the theory of real functions

Jensen: *Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdie* (1905)

Superkrátka história konvexnosti:

- staroveké Grécko: objav pravidelných konvexných mnohostenov = Platónske telesá (kocka, štvorsten, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten)
- LEONHARD EULER (1707–1783): v uzavretom konvexnom mnohostene platí $V - E + F = 2$
- OTTO STOLZ (1842–1905) poznal už roku 1893 vzťah medzi konvexnou a diferencovateľnou funkciou
- konvexná funkcia má v rodnom liste oficiálne rok narodenia 1906 a otca JOHANA L. W. V. JENSENA (1859–1925)

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

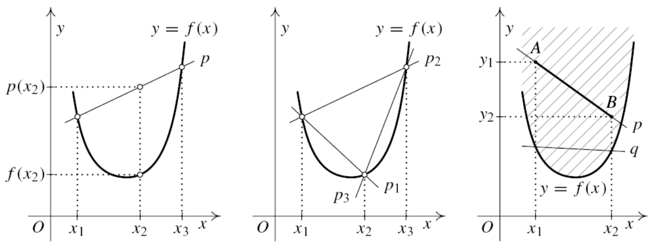
Definícia (rýdzokonvexnosti v bode)

Nech f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk graf f leží v blízkosti bodu x_0 nad grafom nejakej priamky p prechádzajúcej bodom $[x_0, f(x_0)]$.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk

$$(\exists \mathcal{O}(x_0))(\exists p : y = f(x_0) + m(x - x_0))(\forall x \in \mathcal{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > p(x)$$



Poznámka: Ak nahradíme požiadavku f leží nad priamkou p za f leží pod priamkou p, dostávame definíciu rýdzokonkávnej funkcie v bode. Analogicky zavedieme nerýdzu verziu týchto pojmov (konvexná/konkávna funkcia v bode).

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

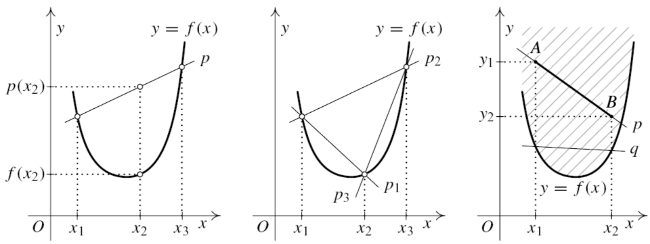
Definícia (rýdzokonvexnosti v bode)

Nech f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk graf f leží v blízkosti bodu x_0 nad grafom nejakej priamky p prechádzajúcej bodom $[x_0, f(x_0)]$.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\exists p : y = f(x_0) + m(x - x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > p(x)$$



Poznámka: Ak nahradíme požiadavku f leží nad priamkou p za f leží pod priamkou p, dostávame definíciu rýdzokonkávnej funkcie v bode. Analogicky zavedieme nerýdzu verziu týchto pojmov (konvexná/konkávna funkcia v bode).

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

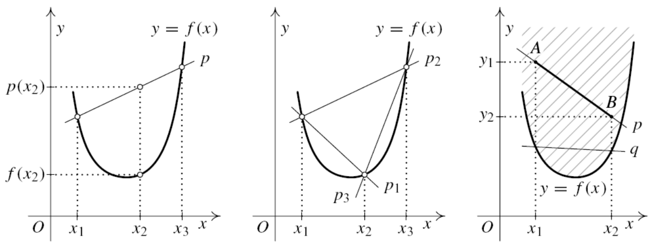
Definícia (rýdzokonvexnosti v bode)

Nech f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk graf f leží v blízkosti bodu x_0 nad grafom nejakej priamky p prechádzajúcej bodom $[x_0, f(x_0)]$.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\exists p : y = f(x_0) + m(x - x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > p(x)$$



Poznámka: Ak nahradíme požiadavku f leží nad priamkou p za f leží pod priamkou p, dostávame definíciu rýdzokonkávnej funkcie v bode. Analogicky zavedieme nerýdzu verziu týchto pojmov (konvexná/konkávna funkcia v bode).

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

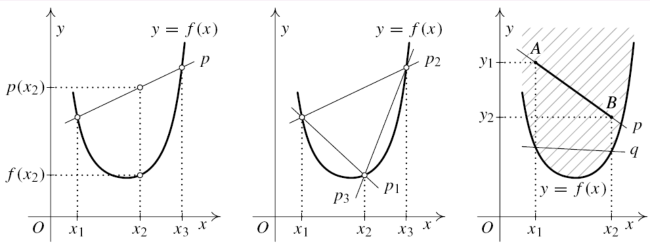
Definícia (rýdzokonvexnosti v bode)

Nech f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk graf f leží v blízkosti bodu x_0 nad grafom nejakej priamky p prechádzajúcej bodom $[x_0, f(x_0)]$.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\exists p : y = f(x_0) + m(x - x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > p(x)$$



Poznámka: Ak nahradíme požiadavku f leží nad priamkou p za f leží pod priamkou p, dostávame definíciu rýdzokonkávnej funkcie v bode. Analogicky zavedieme nerýdzu verziu týchto pojmov (konvexná/konkávna funkcia v bode).