Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html
Prednáška 7

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

30. októbra 2023

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

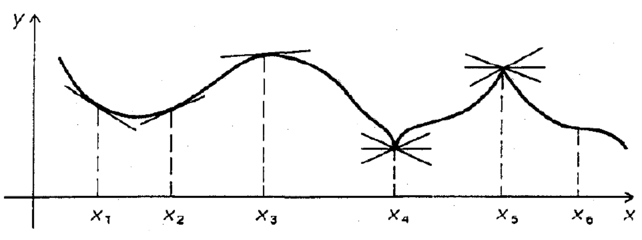
Definícia (rýdzokonvexnosti v bode)

Nech f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk graf f leží v blízkosti bodu x_0 nad grafom nejakej priamky p prechádzajúcej bodom $[x_0, f(x_0)]$.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > f(x_0) + m(x - x_0)$$



Poznámka: Ak nahradíme požiadavku „f leží nad priamkou p" za „f leží pod priamkou p", dostávame definíciu rýdzokonkávnej funkcie v bode. Analogicky zavedieme nerýdzu verziu týchto pojmov (konvexná/konkávna funkcia v bode).

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

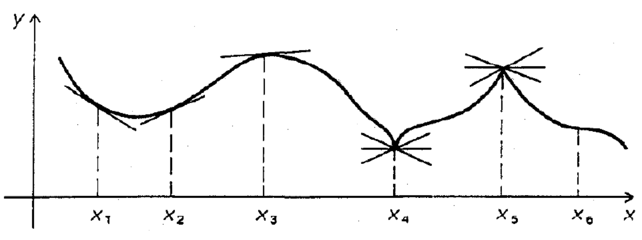
Definícia (rýdzokonvexnosti v bode)

Nech f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk graf f leží v blízkosti bodu x_0 nad grafom nejakej priamky p prechádzajúcej bodom $[x_0, f(x_0)]$.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > f(x_0) + m(x - x_0)$$



Poznámka: Ak nahradíme požiadavku „f leží nad priamkou p" za „f leží pod priamkou p", dostávame definíciu rýdzokonkávnej funkcie v bode. Analogicky zavedieme nerýdzu verziu týchto pojmov (konvexná/konkávna funkcia v bode).

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

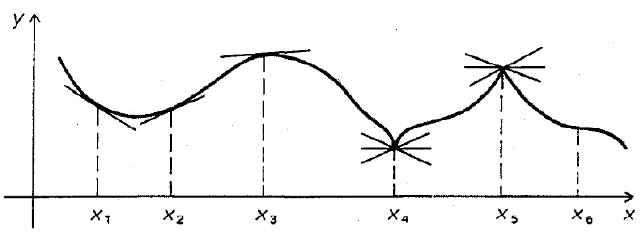
Definícia (rýdzokonvexnosti v bode)

Nech f je definovaná na intervale I. Hovoríme, že f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk graf f leží v blízkosti bodu x_0 nad grafom nejakej priamky p prechádzajúcej bodom $[x_0, f(x_0)]$.

Úloha: Zapíšte definíciu ako kvantifikovaný výrok!

Riešenie: Funkcia f je rýdzokonvexná v bode $x_0 \in I$, akk

$$(\exists \mathscr{O}(x_0))(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) > f(x_0) + m(x - x_0)$$



Poznámka: Ak nahradíme požiadavku „f leží nad priamkou p" za „f leží pod priamkou p", dostávame definíciu rýdzokonkávnej funkcie v bode. Analogicky zavedieme nerýdzu verziu týchto pojmov (konvexná/konkávna funkcia v bode).

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Veta (rýdzokonvexnosť versus rýdzomonotónnosť)

Nech f je diferencovateľná na $\mathscr{O}(x_0)$.

(i) Ak f' je rastúca v bode x_0, tak f je rýdzokonvexná v x_0.

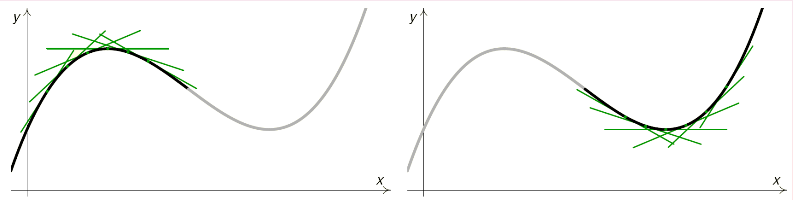
(ii) Ak f' je klesajúca v bode x_0, tak f je rýdzokonkávna v x_0.

Veta (konvexnosť v bode implikuje konvexnosť na intervale)

Nech f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] v každom bode $x_0 \in (a, b)$. Potom f je rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok (diferencovateľnosť a rýdzokonvexnosť na intervale)

Nech f má druhú deriváciu na (a, b) a $(\forall x \in (a, b))\ f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$. Potom f je rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] na (a, b).



b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Veta (rýdzokonvexnosť versus rýdzomonotónnosť)

Nech f je diferencovateľná na $\mathscr{O}(x_0)$.

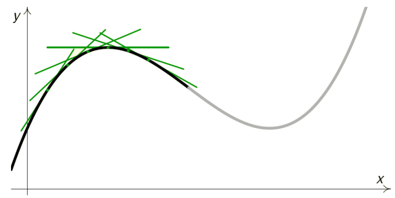
(i) Ak f' je rastúca v bode x_0, tak f je rýdzokonvexná v x_0.
(ii) Ak f' je klesajúca v bode x_0, tak f je rýdzokonkávna v x_0.

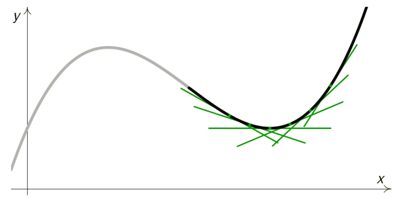
Veta (konvexnosť v bode implikuje konvexnosť na intervale)

Nech f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] v každom bode $x_0 \in (a, b)$. Potom f je rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok (diferencovateľnosť a rýdzokonvexnosť na intervale)

Nech f má druhú deriváciu na (a, b) a $(\forall x \in (a, b))\ f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$. Potom f je rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] na (a, b).





b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Veta (rýdzokonvexnosť versus rýdzomonotónnosť)

Nech f je diferencovateľná na $\mathscr{O}(x_0)$.

(i) Ak f' je rastúca v bode x_0, tak f je rýdzokonvexná v x_0.

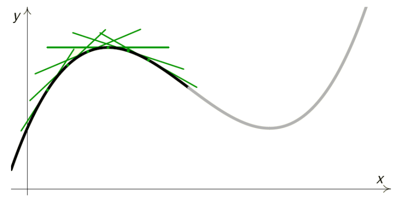
(ii) Ak f' je klesajúca v bode x_0, tak f je rýdzokonkávna v x_0.

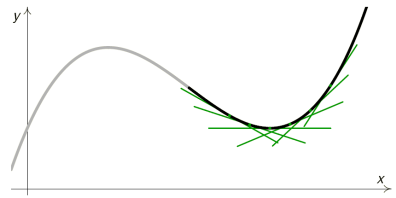
Veta (konvexnosť v bode implikuje konvexnosť na intervale)

Nech f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] v každom bode $x_0 \in (a, b)$. Potom f je rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok (diferencovateľnosť a rýdzokonvexnosť na intervale)

Nech f má druhú deriváciu na (a, b) a $(\forall x \in (a, b))\ f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$. Potom f je rýdzokonvexná [rýdzokonkávna] na (a, b).





b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Definícia (inflexný bod)

Bod $x_0 \in D_f$ nazývame inflexný bod funkcie f, akk f' je diferencovateľná na nejakom $\mathscr{O}(x_0)$ a f'' mení znamienko na $\mathscr{O}(x_0)$.

Poznámka: Inflexný bod funkcie f je bodom zvratu funkcie f', a preto môžeme použiť už známe výsledky pre body zvratu na určenie inflexných bodov!

Dôsledok (nutná/ postačujúca podmienka existencie inflexného bodu)

(i) Ak x_0 je inflexný bod funkcie f, tak $f''(x_0) = 0$.

(ii) Ak $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, tak x_0 je inflexný bod funkcie f.

Poznámka: Ako súvisí konvexnosť a predbiehanie?

Nech x_0 je inflexný bod funkcie f.

(i) Ak f'' mení znamienko zo záporného na kladné v bode x_0, tak f predbieha dotyčnicu $t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ v bode x_0.

(ii) Ak f'' mení znamienko z kladného na záporné v bode x_0, tak dotyčnica t predbieha funkciu f v bode x_0.

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Definícia (inflexný bod)

Bod $x_0 \in D_f$ nazývame inflexný bod funkcie f, akk f' je diferencovateľná na nejakom $\mathscr{O}(x_0)$ a f'' mení znamienko na $\mathscr{O}(x_0)$.

Poznámka: Inflexný bod funkcie f je bodom zvratu funkcie f', a preto môžeme použiť už známe výsledky pre body zvratu na určenie inflexných bodov!

Dôsledok (nutná/ postačujúca podmienka existencie inflexného bodu)

(i) Ak x_0 je inflexný bod funkcie f, tak $f''(x_0) = 0$.

(ii) Ak $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, tak x_0 je inflexný bod funkcie f.

Poznámka: Ako súvisí konvexnosť a predbiehanie?

Nech x_0 je inflexný bod funkcie f.

(i) Ak f'' mení znamienko zo záporného na kladné v bode x_0, tak f predbieha dotyčnicu $t: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ v bode x_0.

(ii) Ak f'' mení znamienko z kladného na záporné v bode x_0, tak dotyčnica t predbieha funkciu f v bode x_0.

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Definícia (inflexný bod)

Bod $x_0 \in D_f$ nazývame inflexný bod funkcie f, akk f' je diferencovateľná na nejakom $\mathscr{O}(x_0)$ a f'' mení znamienko na $\mathscr{O}(x_0)$.

Poznámka: Inflexný bod funkcie f je bodom zvratu funkcie f', a preto môžeme použiť už známe výsledky pre body zvratu na určenie inflexných bodov!

Dôsledok (nutná/ postačujúca podmienka existencie inflexného bodu)

(i) Ak x_0 je inflexný bod funkcie f, tak $f''(x_0) = 0$.

(ii) Ak $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, tak x_0 je inflexný bod funkcie f.

Poznámka: Ako súvisí konvexnosť a predbiehanie?

Nech x_0 je inflexný bod funkcie f.

(i) Ak f'' mení znamienko zo záporného na kladné v bode x_0, tak f predbieha dotyčnicu $t: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ v bode x_0.

(ii) Ak f'' mení znamienko z kladného na záporné v bode x_0, tak dotyčnica t predbieha funkciu f v bode x_0.

b) Konvexnosť a konkávnosť funkcie

Definícia (inflexný bod)

Bod $x_0 \in D_f$ nazývame inflexný bod funkcie f, akk f' je diferencovateľná na nejakom $\mathscr{O}(x_0)$ a f'' mení znamienko na $\mathscr{O}(x_0)$.

Poznámka: Inflexný bod funkcie f je bodom zvratu funkcie f', a preto môžeme použiť už známe výsledky pre body zvratu na určenie inflexných bodov!

Dôsledok (nutná/ postačujúca podmienka existencie inflexného bodu)

(i) Ak x_0 je inflexný bod funkcie f, tak $f''(x_0) = 0$.

(ii) Ak $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, tak x_0 je inflexný bod funkcie f.

Poznámka: Ako súvisí konvexnosť a predbiehanie?

Nech x_0 je inflexný bod funkcie f.

(i) Ak f'' mení znamienko zo záporného na kladné v bode x_0, tak f predbieha dotyčnicu $t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ v bode x_0.

(ii) Ak f'' mení znamienko z kladného na záporné v bode x_0, tak dotyčnica t predbieha funkciu f v bode x_0.

Aproximácia čísel

Potom (Šalamún) urobil more z liatiny, desať lakťov od jedného okraja k druhému, dookola okrúhle, päť lakťov vysoké; dookola ho mohla obopäť tridsaťlakťová stuha.

Prvá kniha kráľov (7. kapitola, 23. verš), okolo roku 1000 p.n.l.

Iba Chuck Norris pozná poslednú cifru Ludolfovho čísla...

História aproximácie (čísla $\pi = 3{,}14159265358979323846264\ldots$):

- prvá zmienka o aproximácii čísla π je v Biblii, kde $\pi \approx 3$;
- Archimedes zo Syrakúz (287–212 p.n.l.) okolo roku 250 p.n.l. použil aproximáciu $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$;
- indický matematik Aryabhata (476–550) používal vzorec

$$\frac{(4+100)\cdot 8 + 62000}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

- čínsky matematik Tsu Chung-Chia (429–500) používal aproximáciu $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$;
- okolo roku 1600 Adriaan Anthoniszoon (1529–1609) aproximoval číslo π pomocou zlomku $\frac{333}{106} = 3{,}14150943\ldots$;

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis?

Aproximácia čísel

Potom (Šalamún) urobil more z liatiny, desať lakťov od jedného okraja k druhému, dookola okrúhle, päť lakťov vysoké; dookola ho mohla obopäť tridsaťlakťová stuha.

Prvá kniha kráľov (7. kapitola, 23. verš), okolo roku 1000 p.n.l.

Iba Chuck Norris pozná poslednú cifru Ludolfovho čísla...

História aproximácie (čísla $\pi = 3{,}14159276535897932384626\ldots$):

- prvá zmienka o aproximácii čísla π je v Biblii, kde $\pi \approx 3$;
- Archimedes zo Syrakúz (287–212 p.n.l.) okolo roku 250 p.n.l. použil aproximáciu $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$;
- indický matematik Aryabhata (476–550) používal vzorec

$$\frac{(4+100)\cdot 8 + 62000}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

- čínsky matematik Tsu Chung-Chia (429–500) používal aproximáciu $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$;
- okolo roku 1600 Adriaan Anthoniszoon (1529–1609) aproximoval číslo π pomocou zlomku $\frac{333}{106} = 3{,}14150943\ldots$;

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis?

Aproximácia čísel

Potom (Šalamún) urobil more z liatiny, desať lakťov od jedného okraja k druhému, dookola okrúhle, päť lakťov vysoké; dookola ho mohla obopäť tridsaťlakťová stuha.

Prvá kniha kráľov (7. kapitola, 23. verš), okolo roku 1000 p.n.l.

Iba Chuck Norris pozná poslednú cifru Ludolfovho čísla...

História aproximácie (čísla $\pi = 3{,}14159265358979323846264\ldots$):

- prvá zmienka o aproximácii čísla π je v Biblii, kde $\pi \approx 3$;
- ARCHIMEDES ZO SYRAKÚZ (287–212 p.n.l.) okolo roku 250 p.n.l. použil aproximáciu $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$;
- indický matematik ARYABHATA (476–550) používal vzorec

$$\frac{(4+100)\cdot 8 + 62000}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

- čínsky matematik TSU CHUNG-CHIA (429–500) používal aproximáciu $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$;
- okolo roku 1600 ADRIAAN ANTHONISZOON (1529–1609) aproximoval číslo π pomocou zlomku $\frac{333}{106} = 3{,}14150943\ldots$;

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis?

Aproximácia čísel

Potom (Šalamún) urobil more z liatiny, desať lakťov od jedného okraja k druhému, dookola okrúhle, päť lakťov vysoké; dookola ho mohla obopäť tridsaťlakťová stuha.

Prvá kniha kráľov (7. kapitola, 23. verš), okolo roku 1000 p.n.l.

Iba Chuck Norris pozná poslednú cifru Ludolfovho čísla...

História aproximácie (čísla $\pi = 3{,}14159265358979323846264\ldots$):

- prvá zmienka o aproximácii čísla π je v Biblii, kde $\pi \approx 3$;
- Archimedes zo Syrakúz (287–212 p.n.l.) okolo roku 250 p.n.l. použil aproximáciu $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$;
- indický matematik Aryabhata (476–550) používal vzorec
$$\frac{(4+100)\cdot 8 + 62000}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$
- čínsky matematik Tsu Chung-Chia (429–500) používal aproximáciu $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$;
- okolo roku 1600 Adriaan Anthoniszoon (1529–1609) aproximoval číslo π pomocou zlomku $\frac{333}{106} = 3{,}14150943\ldots$;

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis?

Aproximácia čísel

Potom (Šalamún) urobil more z liatiny, desať lakťov od jedného okraja k druhému, dookola okrúhle, päť lakťov vysoké; dookola ho mohla obopäť tridsaťlakťová stuha.

Prvá kniha kráľov (7. kapitola, 23. verš), okolo roku 1000 p.n.l.

Iba Chuck Norris pozná poslednú cifru Ludolfovho čísla...

História aproximácie (čísla $\pi = 3{,}1415926535897932384626 4...$):

- prvá zmienka o aproximácii čísla π je v Biblii, kde $\pi \approx 3$;
- ARCHIMEDES ZO SYRAKÚZ (287–212 p.n.l.) okolo roku 250 p.n.l. použil aproximáciu $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$;
- indický matematik ARYABHATA (476–550) používal vzorec

$$\frac{(4+100)\cdot 8 + 62000}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

- čínsky matematik TSU CHUNG-CHIA (429–500) používal aproximáciu $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$;
- okolo roku 1600 ADRIAAN ANTHONISZOON (1529–1609) aproximoval číslo π pomocou zlomku $\frac{333}{106} = 3{,}14150943\ldots$;

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis?

Aproximácia čísel

Potom (Šalamún) urobil more z liatiny, desať lakťov od jedného okraja k druhému, dookola okrúhle, päť lakťov vysoké; dookola ho mohla obopäť tridsaťlakťová stuha.

Prvá kniha kráľov (7. kapitola, 23. verš), okolo roku 1000 p.n.l.

Iba Chuck Norris pozná poslednú cifru Ludolfovho čísla...

História aproximácie (čísla $\pi = 3{,}14159265358979323846264\ldots$):

- prvá zmienka o aproximácii čísla π je v Biblii, kde $\pi \approx 3$;
- ARCHIMEDES ZO SYRAKÚZ (287–212 p.n.l.) okolo roku 250 p.n.l. použil aproximáciu $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$;
- indický matematik ARYABHATA (476–550) používal vzorec

$$\frac{(4+100)\cdot 8 + 62000}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

- čínsky matematik TSU CHUNG-CHIA (429–500) používal aproximáciu $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$;
- okolo roku 1600 ADRIAAN ANTHONISZOON (1529–1609) aproximoval číslo π pomocou zlomku $\frac{333}{106} = 3{,}14150943\ldots$;

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis?

Aproximácia čísel

> Potom (Šalamún) urobil more z liatiny, desať lakťov od jedného okraja k druhému, dookola okrúhle, päť lakťov vysoké; dookola ho mohla obopäť tridsaťlakťová stuha.
>
> *Prvá kniha kráľov* (7. kapitola, 23. verš), okolo roku 1000 p.n.l.

> Iba Chuck Norris pozná poslednú cifru Ludolfovho čísla...

História aproximácie (čísla $\pi = 3{,}14159265358979323846264\ldots$):

- prvá zmienka o aproximácii čísla π je v Biblii, kde $\pi \approx 3$;
- ARCHIMEDES ZO SYRAKÚZ (287–212 p.n.l.) okolo roku 250 p.n.l. použil aproximáciu $\frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$;
- indický matematik ARYABHATA (476–550) používal vzorec
$$\frac{(4+100)\cdot 8 + 62000}{20000} = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$
- čínsky matematik TSU CHUNG-CHIA (429–500) používal aproximáciu $\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$;
- okolo roku 1600 ADRIAAN ANTHONISZOON (1529–1609) aproximoval číslo π pomocou zlomku $\frac{333}{106} = 3{,}14150943\ldots$;

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis?

Aproximácia čísel

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis? Použitím Euklidovho algoritmu máme

$$\begin{aligned}
\pi &= 3 + \frac{1}{\alpha_0} &&\Rightarrow \quad a_0 = 3,\\
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi - 3} = 7 + \frac{1}{\alpha_1} &&\Rightarrow \quad a_1 = 7,\\
\alpha_1 &= \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} = 15 + \frac{1}{\alpha_2} &&\Rightarrow \quad a_2 = 15,\\
\alpha_2 &= \frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} = 1 + \frac{1}{\alpha_3} &&\Rightarrow \quad a_3 = 1,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dostávame tak vyjadrenie čísla π pomocou (nekonečného) reťazového zlomku

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

kde tzv. zblížené zlomky sú $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots$

Aproximácia čísel

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis? Použitím Euklidovho algoritmu máme

$$
\begin{aligned}
\pi &= 3 + \frac{1}{\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 3,\\
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi - 3} = 7 + \frac{1}{\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 7,\\
\alpha_1 &= \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} = 15 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 15,\\
\alpha_2 &= \frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} = 1 + \frac{1}{\alpha_3} \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dostávame tak vyjadrenie čísla π pomocou (nekonečného) reťazového zlomku

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \dots}}},$$

kde tzv. zblížené zlomky sú $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots$

Aproximácia čísel

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis? Použitím Euklidovho algoritmu máme

$$
\begin{aligned}
\pi &= 3 + \frac{1}{\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 3, \\
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi - 3} = 7 + \frac{1}{\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 7, \\
\alpha_1 &= \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} = 15 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 15, \\
\alpha_2 &= \frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} = 1 + \frac{1}{\alpha_3} \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dostávame tak vyjadrenie čísla π pomocou (nekonečného) reťazového zlomku

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

kde tzv. zblížené zlomky sú $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots$

Aproximácia čísel

Otázka: ako sa dá dopracovať k číslam $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$? Majú nejaký hlbší súvis? Použitím Euklidovho algoritmu máme

$$\begin{aligned}
\pi &= 3 + \frac{1}{\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 3,\\
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi - 3} = 7 + \frac{1}{\alpha_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 7,\\
\alpha_1 &= \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} = 15 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 15,\\
\alpha_2 &= \frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} = 1 + \frac{1}{\alpha_3} \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dostávame tak vyjadrenie čísla π pomocou (nekonečného) reťazového zlomku

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

kde tzv. zblížené zlomky sú $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots$

Aproximácia funkcie

Aproximovať = riešiť zložitú matematickú úlohu postupnými približovacími krokmi.

online *Slovník cudzích slov* (2016)

Taylorova aproximácia:

- je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1+x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1+x+\frac{x^2}{2}$ je lepšia $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia;

Dôvody štúdia Taylorovej aproximácie:

- kvantitatívne: Taylorove aproximácie sú veľmi praktickým spôsobom výpočtu funkcií ako sú e^x alebo $\cos x$ ručne alebo počítačom = ako sa dopracovať k hodnotám za desatinnou čiarkou pre čísla e alebo π?
- kvalitatívne: vrhajú nové svetlo na dve otázky:
  - (i) Koľko zo správania sa funkcie je zakódované iba v jej deriváciách v samotnom bode?
  - (ii) Ako dobre sa dá správanie funkcie modelovať pomocou polynómu?

Aproximácia funkcie

Aproximovat' = riešiť zložitú matematickú úlohu postupnými približovacími krokmi.

online *Slovník cudzích slov* (2016)

Taylorova aproximácia:

- je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1 + x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1 + x + \frac{x^2}{2}$ je lepšia $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia;

Dôvody štúdia Taylorovej aproximácie:

- kvantitatívne: Taylorove aproximácie sú veľmi praktickým spôsobom výpočtu funkcií ako sú e^x alebo $\cos x$ ručne alebo počítačom = ako sa dopracovať k hodnotám za desatinnou čiarkou pre čísla e alebo π?
- kvalitatívne: vrhajú nové svetlo na dve otázky:
  - (i) Koľko zo správania sa funkcie je zakódované iba v jej deriváciách v samotnom bode?
  - (ii) Ako dobre sa dá správanie funkcie modelovať pomocou polynómu?

Aproximácia funkcie

> *Aproximovať* = riešiť zložitú matematickú úlohu postupnými približovacími krokmi.
>
> online *Slovník cudzích slov* (2016)

Taylorova aproximácia:

- je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1+x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1+x+\frac{x^2}{2}$ je lepšia $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia;

Dôvody štúdia Taylorovej aproximácie:

- kvantitatívne: Taylorove aproximácie sú veľmi praktickým spôsobom výpočtu funkcií ako sú e^x alebo $\cos x$ ručne alebo počítačom = ako sa dopracovať k hodnotám za desatinnou čiarkou pre čísla e alebo π?
- kvalitatívne: vrhajú nové svetlo na dve otázky:
  - (i) Koľko zo správania sa funkcie je zakódované iba v jej deriváciách v samotnom bode?
  - (ii) Ako dobre sa dá správanie funkcie modelovať pomocou polynómu?

Aproximácia funkcie

Aproximovať = riešiť zložitú matematickú úlohu postupnými približovacími krokmi.

online *Slovník cudzích slov* (2016)

Taylorova aproximácia:

- je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1 + x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1 + x + \frac{x^2}{2}$ je lepšia $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia;

Dôvody štúdia Taylorovej aproximácie:

- kvantitatívne: Taylorove aproximácie sú veľmi praktickým spôsobom výpočtu funkcií ako sú e^x alebo $\cos x$ ručne alebo počítačom = ako sa dopracovať k hodnotám za desatinnou čiarkou pre čísla e alebo π?
- kvalitatívne: vrhajú nové svetlo na dve otázky:
  - (i) Koľko zo správania sa funkcie je zakódované iba v jej deriváciách v samotnom bode?
  - (ii) Ako dobre sa dá správanie funkcie modelovať pomocou polynómu?

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 1. stupňa

Požiadavky: $P_1(x_0) = f(x_0)$ a $P_1'(x_0) = f'(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_1(x) := \alpha x + \beta$. Potom

$$P_1(x) = \alpha(x - x_0 + x_0) + \beta = \alpha(x - x_0) + \alpha x_0 + \beta = a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_1(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$
$$P_1'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$

Záver: $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, t.j. P_1 je dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0!!!

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 1. stupňa

Požiadavky: $P_1(x_0) = f(x_0)$ a $P_1'(x_0) = f'(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_1(x) := \alpha x + \beta$. Potom

$$P_1(x) = \alpha(x - x_0 + x_0) + \beta = \alpha(x - x_0) + \alpha x_0 + \beta = a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_1(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$
$$P_1'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$

Záver: $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, t.j. P_1 je dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0!!!

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 1. stupňa

Požiadavky: $P_1(x_0) = f(x_0)$ a $P_1'(x_0) = f'(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_1(x) := \alpha x + \beta$. Potom

$$P_1(x) = \alpha(x - x_0 + x_0) + \beta = \alpha(x - x_0) + \alpha x_0 + \beta = a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_1(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$
$$P_1'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$

Záver: $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, t.j. P_1 je dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0!!!

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 1. stupňa

Požiadavky: $P_1(x_0) = f(x_0)$ a $P_1'(x_0) = f'(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_1(x) := \alpha x + \beta$. Potom

$$P_1(x) = \alpha(x - x_0 + x_0) + \beta = \alpha(x - x_0) + \alpha x_0 + \beta = a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_1(x_0) = f(x_0) \iff a_0 = f(x_0)$$
$$P_1'(x_0) = f'(x_0) \iff a_1 = f'(x_0)$$

Záver: $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, t.j. P_1 je dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0!!!

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 1. stupňa

Požiadavky: $P_1(x_0) = f(x_0)$ a $P_1'(x_0) = f'(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_1(x) := \alpha x + \beta$. Potom

$$P_1(x) = \alpha(x - x_0 + x_0) + \beta = \alpha(x - x_0) + \alpha x_0 + \beta = a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_1(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$
$$P_1'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$

Záver: $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, t.j. P_1 je dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0!!!

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 1. stupňa

Požiadavky: $P_1(x_0) = f(x_0)$ a $P_1'(x_0) = f'(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_1(x) := \alpha x + \beta$. Potom

$$P_1(x) = \alpha(x - x_0 + x_0) + \beta = \alpha(x - x_0) + \alpha x_0 + \beta = a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$\begin{aligned} P_1(x_0) = f(x_0) &\;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0) \\ P_1'(x_0) = f'(x_0) &\;\Leftrightarrow\; a_1 = f'(x_0) \end{aligned}$$

Záver: $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, t.j. P_1 je dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0!!!

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 2. stupňa

Požiadavky: $P_2(x_0) = f(x_0)$, $P_2'(x_0) = f'(x_0)$ a $P_2''(x_0) = f''(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_2(x) := \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Potom

$$P_2(x) = \alpha(x - x_0 + x_0)^2 + \beta(x - x_0 + x_0) + \gamma = a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_2(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$

$$P_2'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2(x_0 - x_0) + a_1 = f'(x_0) \;\Rightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$

$$P_2''(x_0) = f''(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2 = f''(x_0) \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 2. stupňa

Požiadavky: $P_2(x_0) = f(x_0)$, $P_2'(x_0) = f'(x_0)$ a $P_2''(x_0) = f''(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_2(x) := \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Potom

$$P_2(x) = \alpha(x - x_0 + x_0)^2 + \beta(x - x_0 + x_0) + \gamma = a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_2(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$

$$P_2'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2(x_0 - x_0) + a_1 = f'(x_0) \;\Rightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$

$$P_2''(x_0) = f''(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2 = f''(x_0) \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Taylorov polynóm

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 2. stupňa

Požiadavky: $P_2(x_0) = f(x_0)$, $P_2'(x_0) = f'(x_0)$ a $P_2''(x_0) = f''(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_2(x) := \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Potom

$$P_2(x) = \alpha(x-x_0+x_0)^2+\beta(x-x_0+x_0)+\gamma = a_2(x-x_0)^2+a_1(x-x_0)+a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_2(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$

$$P_2'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2(x_0-x_0)+a_1 = f'(x_0) \;\Rightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$

$$P_2''(x_0) = f''(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2 = f''(x_0) \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Taylorov polynóm

I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 2. stupňa

Požiadavky: $P_2(x_0) = f(x_0)$, $P_2'(x_0) = f'(x_0)$ a $P_2''(x_0) = f''(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_2(x) := \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Potom

$$P_2(x) = \alpha(x - x_0 + x_0)^2 + \beta(x - x_0 + x_0) + \gamma = a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_2(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$

$$P_2'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2(x_0 - x_0) + a_1 = f'(x_0) \;\Rightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$

$$P_2''(x_0) = f''(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2 = f''(x_0) \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Taylorov polynóm

I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables, especially since the way is then open to more striking consequences... And just as the advantage of decimals consists in this, that when all fractions and roots have been reduced to them they take on in a certain measure the nature of integers; so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators and without the all but insuperable encumbrances which beset the others.

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Úloha: aproximujte funkciu f na okolí bodu x_0 polynómom 2. stupňa

Požiadavky: $P_2(x_0) = f(x_0)$, $P_2'(x_0) = f'(x_0)$ a $P_2''(x_0) = f''(x_0)$

Riešenie: označme hľadaný polynóm $P_2(x) := \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Potom

$$P_2(x) = \alpha(x - x_0 + x_0)^2 + \beta(x - x_0 + x_0) + \gamma = a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0.$$

Zo vstupných požiadaviek máme, že

$$P_2(x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; a_0 = f(x_0)$$
$$P_2'(x_0) = f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2(x_0 - x_0) + a_1 = f'(x_0) \;\Rightarrow\; a_1 = f'(x_0)$$
$$P_2''(x_0) = f''(x_0) \;\Leftrightarrow\; 2a_2 = f''(x_0) \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Veta (existencia a jednoznačnosť Taylorovho polynómu)

Nech f je n-krát diferencovateľná v bode x_0, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje práve jeden polynóm T_n stupňa nanajvýš n taký, že $\mathrm{T}_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pre $k = 0, 1, \ldots, n$.

Označenie a terminológia: polynóm tvaru

$$\mathrm{T}_n(f, x_0)(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie f v bode x_0

Brook Taylor (1685–1731)

Colin Maclaurin (1698–1746)

Veta (existencia a jednoznačnosť Taylorovho polynómu)

Nech f je n-krát diferencovateľná v bode x_0, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje práve jeden polynóm T_n stupňa nanajvýš n taký, že $\mathrm{T}_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pre $k = 0, 1, \ldots, n$.

Označenie a terminológia: polynóm tvaru

$$\mathrm{T}_n(f, x_0)(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie f v bode x_0

Brook Taylor (1685–1731)

Colin Maclaurin (1698–1746)

Niektoré Taylorove (Maclaurinove) polynómy:

$$\mathrm{T}_n(\exp, 0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{T}_n(\sin, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{T}_n(\ln(1+\cdot), 0)(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1\rangle;$$

Môžu vhodne poslúžiť na aproximáciu číselných hodnôt, napríklad

$$\mathrm{e} \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

Niektoré Taylorove (Maclaurinove) polynómy:

$$\mathrm{T}_n(\exp, 0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{T}_n(\sin, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{T}_n(\ln(1+\cdot), 0)(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1\rangle;$$

Môžu vhodne poslúžiť na aproximáciu číselných hodnôt, napríklad

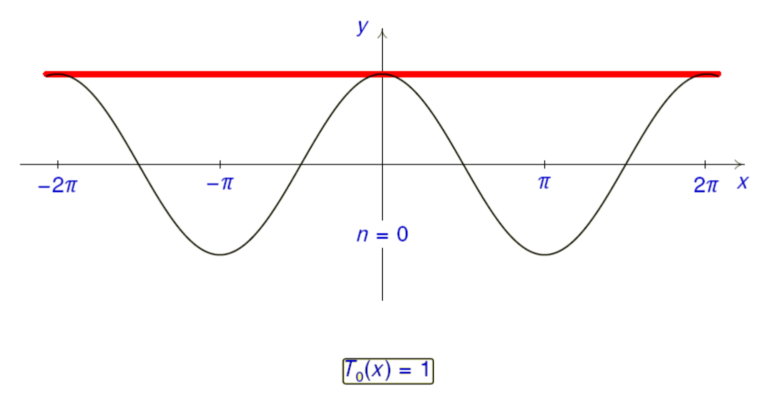
$$\mathrm{e} \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

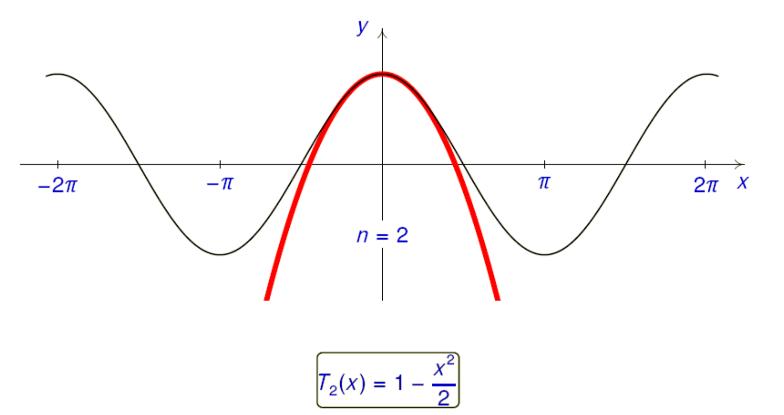
Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



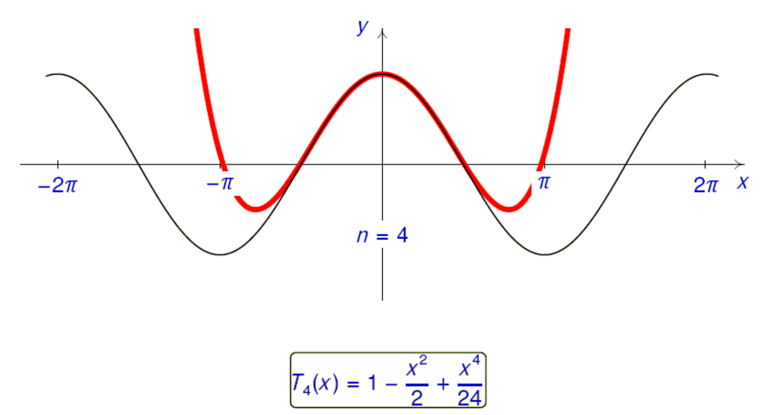
Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



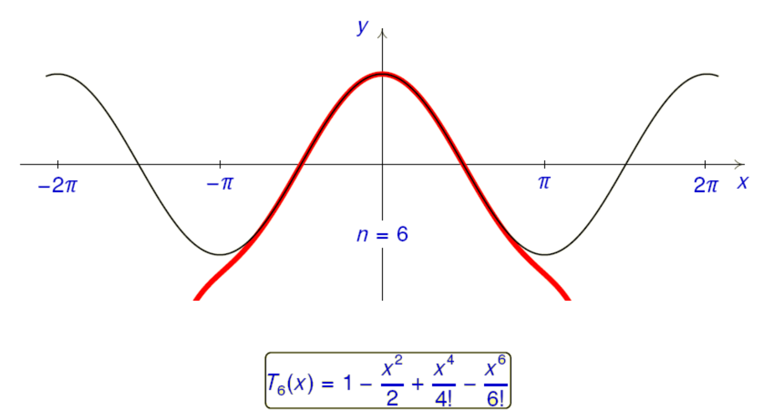
Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



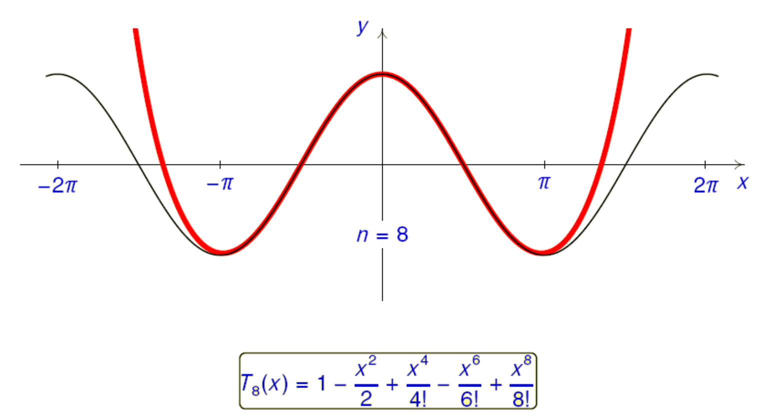
Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



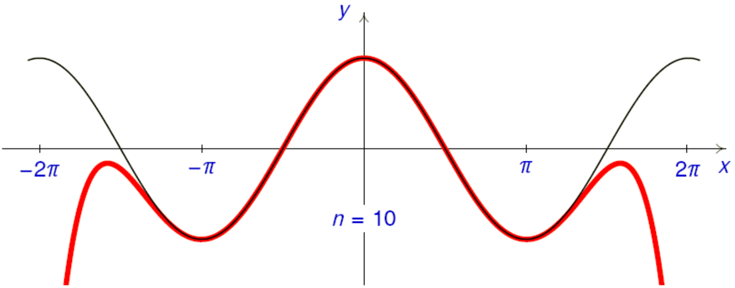
Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

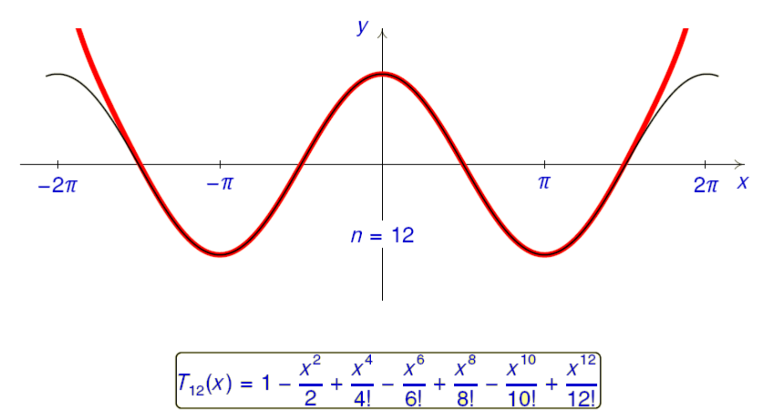
$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

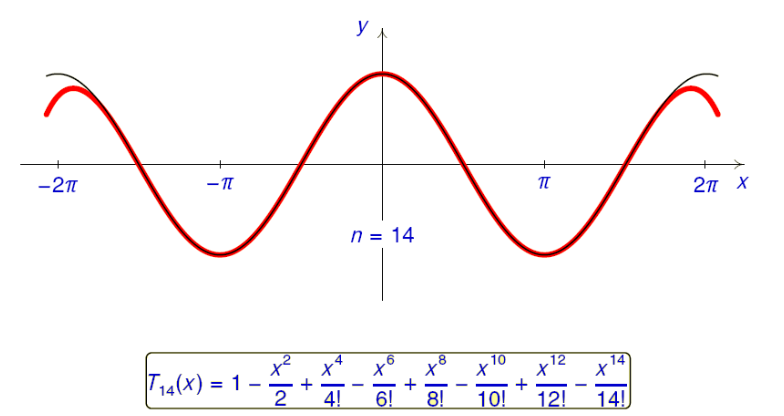
Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



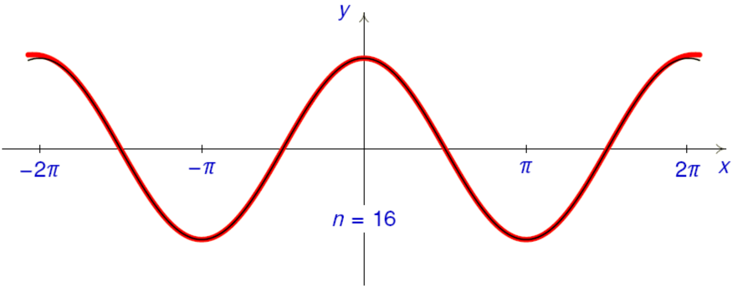
Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

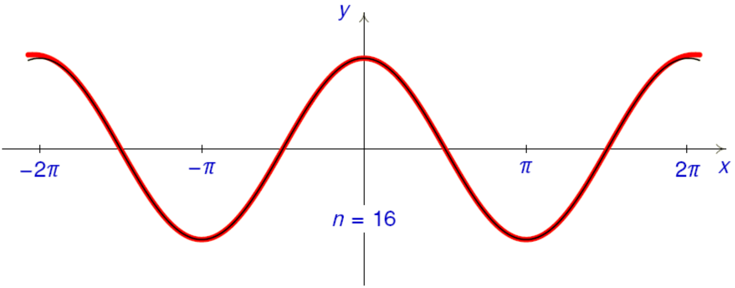
$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$T_{16}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{16!}$$

Príklad: Maclaurinov polynóm funkcie $f(x) = \cos x$

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$T_{16}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{16!}$$

Akej chyby sa dopustíme, keď namiesto f na okolí bodu x_0 vezmeme $\mathrm{T}_n(f, x_0)(x)$?

Chyba aproximácie Taylorovým polynómom

Príbeh zo života: Počas ruskej revolúcie bol Igor Tamm zatknutý anti-komunistickými povstalcami neďaleko Odesy ako anti-ukrajinský komunistický agitátor. Pri vypočúvaní sa ho vodca povstalcov pýtal, kde pracuje. Tamm odpovedal, že je matematik. „Ak je tak, napíš mi zvyšok po *n*-tom Taylorom polynóme. Ak to urobíš, si voľný, ak nie, zastrelíme ťa." Tamm napísal trasúcou rukou niekoľko formúl a podal ich vodcovi. Ten ho v zápätí prepustil na slobodu.

Igor Jevgenjevič TAMM (1895–1971)
nositeľ Nobelovej ceny za fyziku (1958)

Chyba aproximácie Taylorovým polynómom

> A study of *Brook Taylor's* life and work reveals that his contribution to the development of mathematics was substantially greater than the attachment of his name to one theorem would suggest. His work was concise and hard to follow. The surprising number of major concepts that he touched upon, initially developed, but failed to elaborate further leads one to regret that health, family concerns and sadness, or other unassessable factors, including wealth and parental dominance, restricted the mathematically productive portion of his relatively short life.
>
> Jones: *Dictionary of Scientific Biography* (1970)

Zvyšok po n-tom Taylorovom polynóme funkcie f v bode x_0

$$\mathrm{R}_n(f,x_0)(x) := f(x) - \mathrm{T}_n(f,x_0)(x), \quad x \in \mathscr{O}(x_0)$$

alebo tiež Taylorov vzorec $f(x) = \mathrm{T}_n(f,x_0)(x) + \mathrm{R}_n(f,x_0)(x)$

(i) Lagrangeov tvar zvyšku:

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0));$$

(ii) Cauchyho tvar zvyšku

$$\mathrm{C}_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0));$$

v oboch prípadoch θ je nejaké číslo z intervalu $(0,1)$

Chyba aproximácie Taylorovým polynómom

> A study of *Brook Taylor's* life and work reveals that his contribution to the development of mathematics was substantially greater than the attachment of his name to one theorem would suggest. His work was concise and hard to follow. The surprising number of major concepts that he touched upon, initially developed, but failed to elaborate further leads one to regret that health, family concerns and sadness, or other unassessable factors, including wealth and parental dominance, restricted the mathematically productive portion of his relatively short life.
>
> Jones: *Dictionary of Scientific Biography* (1970)

Zvyšok po n-tom Taylorovom polynóme funkcie f v bode x_0

$$\mathrm{R}_n(f, x_0)(x) := f(x) - \mathrm{T}_n(f, x_0)(x), \quad x \in \mathscr{O}(x_0)$$

alebo tiež Taylorov vzorec $f(x) = \mathrm{T}_n(f, x_0)(x) + \mathrm{R}_n(f, x_0)(x)$

(i) Lagrangeov tvar zvyšku:

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0));$$

(ii) Cauchyho tvar zvyšku

$$\mathrm{C}_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0));$$

v oboch prípadoch θ je nejaké číslo z intervalu $(0, 1)$

Aproximácia funkcie ešte raz – zhrnutie

I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

- Taylorova aproximácia je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1 + x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1 + x + \frac{x^2}{2}$ je lepšia $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia, pretože

$$\mathrm{T}_n(\exp, 0)(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Úloha

Určte hodnotu Eulerovho čísla s presnosťou 10^{-6}.

Úloha

Odhadnite chybu približného vzťahu $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Aproximácia funkcie ešte raz – zhrnutie

I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

- Taylorova aproximácia je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1+x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1+x+\frac{x^2}{2}$ je lepšia $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia, pretože

$$T_n(\exp,0)(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Úloha

Určte hodnotu Eulerovho čísla s presnosťou 10^{-6}.

Úloha

Odhadnite chybu približného vzťahu $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Aproximácia funkcie ešte raz – zhrnutie

I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

- Taylorova aproximácia je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1+x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1+x+\frac{x^2}{2}$ je lepšia $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia, pretože

$$\mathrm{T}_n(\exp,0)(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Úloha

Určte hodnotu Eulerovho čísla s presnosťou 10^{-6}.

Úloha

Odhadnite chybu približného vzťahu $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Aproximácia funkcie ešte raz – zhrnutie

> I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...
>
> Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

- Taylorova aproximácia je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1+x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1+x+\frac{x^2}{2}$ je lepšia $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia, pretože

$$\mathrm{T}_n(\exp,0)(x) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}, \quad x\in\mathbb{R}$$

Úloha

Určte hodnotu Eulerovho čísla s presnosťou 10^{-6}.

Úloha

Odhadnite chybu približného vzťahu $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $x\in\langle 0,1\rangle$.

Aproximácia funkcie ešte raz – zhrnutie

I am amazed that it occurred to no one (if you except N. Mercator with his quadrature of the hyperbola) to fit the doctrine recently established for decimal numbers in similar fashion to variables... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to the class of simple ones: that is, to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

- Taylorova aproximácia je pre funkcie tým, čím sú decimálne aproximácie pre čísla;
- napr. funkcia $1 + x$ je v celku dobrá aproximácia funkcie e^x, ale $1 + x + \frac{x^2}{2}$ je lepšia $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ je ešte lepšia, pretože

$$\mathrm{T}_n(\exp, 0)(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Úloha

Určte hodnotu Eulerovho čísla s presnosťou 10^{-6}.

Úloha

Odhadnite chybu približného vzťahu $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$.