Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html

Prednáška 8

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

6. novembra 2023

Integrálny počet

- integrálny počet je omnoho starší ako diferenciálny počet, pretože výpočty obsahov, objemov, povrchov, dĺžok kriviek, atď. siahajú až do starovekého Grécka
- významné postavy dejín, ktoré prispeli k riešeniu týchto úloh: ARCHIMEDES, KEPLER, CAVALIERI, VIVIANI, FERMAT, GULDIN, GREGORY, BARROW...
- NEWTON, LEIBNIZ a JOHANN BERNOULLI nezávile na sebe objavili, že integrovanie je opačná operácia k derivovaniu = snahy mnohých učencov sa tak redukujú na zopár pravidiel derivovania!!!

Motivácia alebo Načo je to dobré?

Ak sa hmotný bod pohybuje po číselnej osi tak, že v čase t je jeho súradnica $s(t)$, potom jeho rýchlosť v čase t je $v(t) = s'(t)$. Ak však poznáme závislosť $v = v(t)$ rýchlosti bodu od času, chceme nájsť závislosť $s = s(t)$ jeho súradnice od času, čiže hľadáme funkciu $s(t)$ s vlastnosťou $s'(t) = v(t)$, t.j. antideriváciu k funkcii $v(t)$.

Integrálny počet

- integrálny počet je omnoho starší ako diferenciálny počet, pretože výpočty obsahov, objemov, povrchov, dĺžok kriviek, atď. siahajú až do starovekého Grécka
- významné postavy dejín, ktoré prispeli k riešeniu týchto úloh: ARCHIMEDES, KEPLER, CAVALIERI, VIVIANI, FERMAT, GULDIN, GREGORY, BARROW...
- NEWTON, LEIBNIZ a JOHANN BERNOULLI nezávile na sebe objavili, že integrovanie je opačná operácia k derivovaniu = snahy mnohých učencov sa tak redukujú na zopár pravidiel derivovania!!!

Motivácia alebo Načo je to dobré?

Ak sa hmotný bod pohybuje po číselnej osi tak, že v čase t je jeho súradnica $s(t)$, potom jeho rýchlosť v čase t je $v(t) = s'(t)$. Ak však poznáme závislosť $v = v(t)$ rýchlosti bodu od času, chceme nájsť závislosť $s = s(t)$ jeho súradnice od času, čiže hľadáme funkciu $s(t)$ s vlastnosťou $s'(t) = v(t)$, t.j. antideriváciu k funkcii $v(t)$.

Integrálny počet

- integrálny počet je omnoho starší ako diferenciálny počet, pretože výpočty obsahov, objemov, povrchov, dĺžok kriviek, atď. siahajú až do starovekého Grécka
- významné postavy dejín, ktoré prispeli k riešeniu týchto úloh: ARCHIMEDES, KEPLER, CAVALIERI, VIVIANI, FERMAT, GULDIN, GREGORY, BARROW...
- NEWTON, LEIBNIZ a JOHANN BERNOULLI nezávile na sebe objavili, že integrovanie je opačná operácia k derivovaniu = snahy mnohých učencov sa tak redukujú na zopár pravidiel derivovania!!!

Motivácia alebo Načo je to dobré?

Ak sa hmotný bod pohybuje po číselnej osi tak, že v čase t je jeho súradnica $s(t)$, potom jeho rýchlosť v čase t je $v(t) = s'(t)$. Ak však poznáme závislosť $v = v(t)$ rýchlosti bodu od času, chceme nájsť závislosť $s = s(t)$ jeho súradnice od času, čiže hľadáme funkciu $s(t)$ s vlastnosťou $s'(t) = v(t)$, t.j. antideriváciu k funkcii $v(t)$.

Integrálny počet

- integrálny počet je omnoho starší ako diferenciálny počet, pretože výpočty obsahov, objemov, povrchov, dĺžok kriviek, atď. siahajú až do starovekého Grécka
- významné postavy dejín, ktoré prispeli k riešeniu týchto úloh: ARCHIMEDES, KEPLER, CAVALIERI, VIVIANI, FERMAT, GULDIN, GREGORY, BARROW...
- NEWTON, LEIBNIZ a JOHANN BERNOULLI nezávile na sebe objavili, že integrovanie je opačná operácia k derivovaniu = snahy mnohých učencov sa tak redukujú na zopár pravidiel derivovania!!!

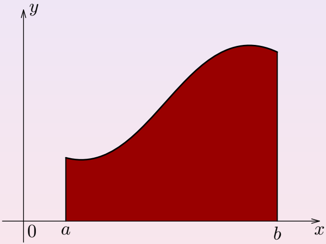
Motivácia alebo Načo je to dobré?

Ak sa hmotný bod pohybuje po číselnej osi tak, že v čase t je jeho súradnica $s(t)$, potom jeho rýchlosť v čase t je $v(t) = s'(t)$. Ak však poznáme závislosť $v = v(t)$ rýchlosti bodu od času, chceme nájsť závislosť $s = s(t)$ jeho súradnice od času, čiže hľadáme funkciu $s(t)$ s vlastnosťou $s'(t) = v(t)$, t.j. antideriváciu k funkcii $v(t)$.

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, chceme určiť plochu "krivočiareho lichobežníka" ohraničeného osou x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f.

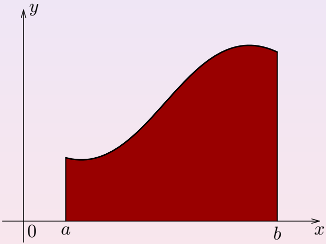


Jedna cesta je použiť tzv. exhaustačnú metódu: "vyčerpať" plochu. Spresnením tejto myšlienky vznikol **Riemannov určitý integrál**.

Ako však riešil problém Newton vo svojom „Annus mirabilis“?

> All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.
>
> Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$, chceme určiť plochu "krivočiareho lichobežníka" ohraničeného osou x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f.



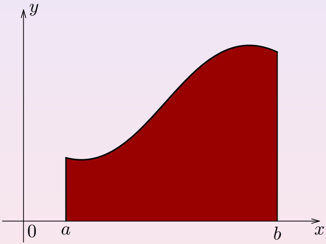
Jedna cesta je použiť tzv. exhaustačnú metódu: "vyčerpať" plochu. Spresnením tejto myšlienky vznikol **Riemannov určitý integrál**.

Ako však riešil problém Newton vo svojom „Annus mirabilis“?

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$, chceme určiť plochu "krivočiareho lichobežníka" ohraničeného osou x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f.



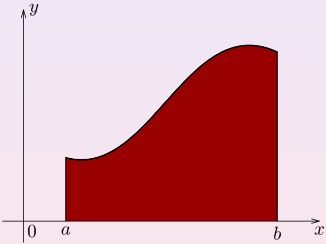
Jedna cesta je použiť tzv. exhaustačnú metódu: "vyčerpať" plochu. Spresnením tejto myšlienky vznikol **Riemannov určitý integrál**.

Ako však riešil problém Newton vo svojom „Annus mirabilis“?

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$, chceme určiť plochu "krivočiareho lichobežníka" ohraničeného osou x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f.

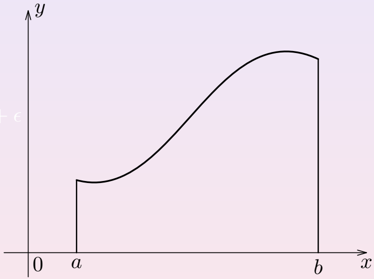


Jedna cesta je použiť tzv. exhaustačnú metódu: "vyčerpať" plochu. Spresnením tejto myšlienky vznikol **Riemannov určitý integrál**.

Ako však riešil problém Newton vo svojom „Annus mirabilis“?

> All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.
>
> Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in < a, b)$ označíme $P(t)$ plochu

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v t

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

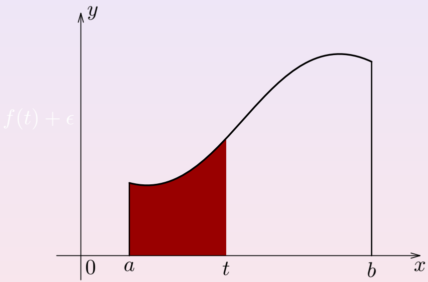
$$(t < x < t + \delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in< a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru

$\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v t

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

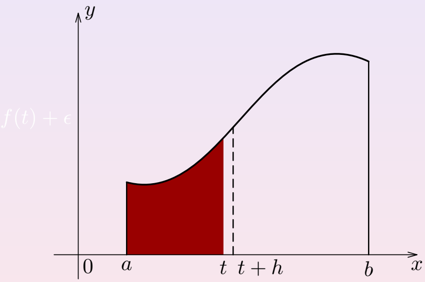
$(t < x < t + \delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in < a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru

$\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

ak x vzrastie z t na $t+h$, (malé $h > 0$)

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v t

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

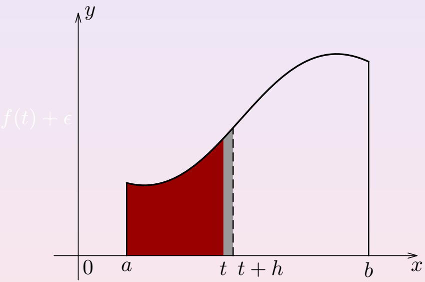
$$(t < x < t + \delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in < a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru

$\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

ak x vzrastie z t na $t+h$, (malé $h > 0$)

zmení sa obsah o... $P(t+h) - P(t)$

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v t

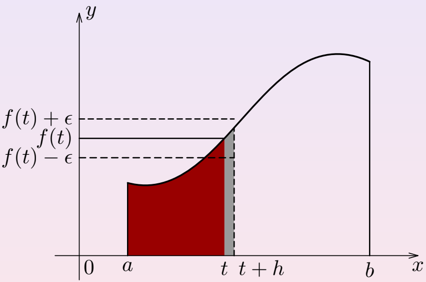
$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

$(t < x < t + \delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

> All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.
>
> Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in < a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru

$\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

ak x vzrastie z t na $t+h$, (malé $h > 0$)

zmení sa obsah o... $P(t+h) - P(t)$

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f

v bode t..$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

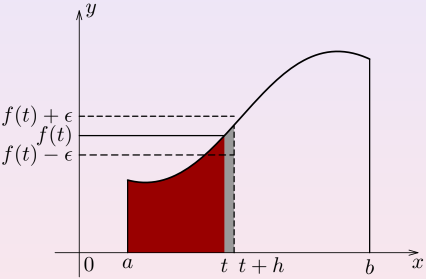
$$(t < x < t + \delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in < a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru $\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

ak x vzrastie z t na $t+h$, (malé $h > 0$) zmení sa obsah o... $P(t+h) - P(t)$

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v bode t..$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

$(t < x < t + \delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$

pre $h < \delta$

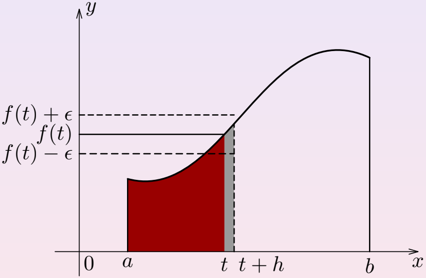
$$h(f(t) - \epsilon) < P(t+h) - P(t) < h(f(t) + \epsilon)$$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in < a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru $\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

ak x vzrastie z t na $t + h$, (malé $h > 0$)

zmení sa obsah o... $P(t + h) - P(t)$

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v bode t..$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

$(t < x < t + \delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$

pre $h < \delta$

$$h(f(t) - \epsilon) < P(t + h) - P(t) < h(f(t) + \epsilon)$$

$$\left|\frac{P(t+h)-P(t)}{h} - f(t)\right| < \epsilon \quad \text{t.j. } \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = f(t)$$

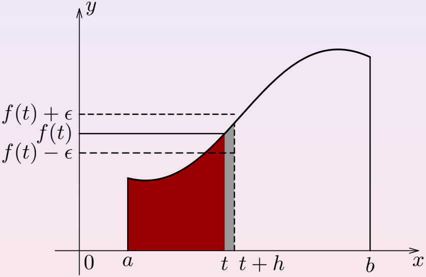
$$P'(t) = f(t),\ t \in < a, b)$$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in < a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru

$\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

ak x vzrastie z t na $t+h$, (malé $h > 0$)

zmení sa obsah o... $P(t+h) - P(t)$

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v bode t..$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

$(t < x < t+\delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$

pre $h < \delta$

$$h(f(t) - \epsilon) < P(t+h) - P(t) < h(f(t) + \epsilon)$$

$$\left|\frac{P(t+h)-P(t)}{h} - f(t)\right| < \epsilon \quad \text{t.j. } \lim_{h \to 0^+} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = f(t)$$

$$P'(t) = f(t),\ t \in < a, b)$$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Príklady:

(i) Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$. Ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna...

(ii) Funkcia $G(x) = 3\sqrt[3]{x}$ je primitívna funkcia k $g(x) = x^{-2/3}$ na $(0, 1)$.

(ii) Funkcia

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je primitívna funkcia k funkcii

$$h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$.

Pozorovanie: Funkcie f, g sú spojité, h nie je spojitá (kde?) – napriek tomu všetky majú primitívne funkcie (kde?)!

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Príklady:

(i) Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$. Ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna...

(ii) Funkcia $G(x) = 3\sqrt[3]{x}$ je primitívna funkcia k $g(x) = x^{-2/3}$ na $(0, 1)$.

(ii) Funkcia

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je primitívna funkcia k funkcii

$$h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$.

Pozorovanie: Funkcie f, g sú spojité, h nie je spojitá (kde?) – napriek tomu všetky majú primitívne funkcie (kde?)!

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Príklady:

(i) Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$. Ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna...

(ii) Funkcia $G(x) = 3\sqrt[3]{x}$ je primitívna funkcia k $g(x) = x^{-2/3}$ na $(0, 1)$.

(ii) Funkcia

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je primitívna funkcia k funkcii

$$h(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$.

Pozorovanie: Funkcie f, g sú spojité, h nie je spojitá (kde?) – napriek tomu všetky majú primitívne funkcie (kde?)!

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Príklady:

(i) Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$. Ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna...

(ii) Funkcia $G(x) = 3\sqrt[3]{x}$ je primitívna funkcia k $g(x) = x^{-2/3}$ na $(0, 1)$.

(ii) Funkcia

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je primitívna funkcia k funkcii

$$h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$.

Pozorovanie: Funkcie f, g sú spojité, h nie je spojitá (kde?) – napriek tomu všetky majú primitívne funkcie (kde?)!

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Príklady:

(i) Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$. Ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna...

(ii) Funkcia $G(x) = 3\sqrt[3]{x}$ je primitívna funkcia k $g(x) = x^{-2/3}$ na $(0, 1)$.

(ii) Funkcia

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je primitívna funkcia k funkcii

$$h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$.

Pozorovanie: Funkcie f, g sú spojité, h nie je spojitá (kde?) – napriek tomu všetky majú primitívne funkcie (kde?)!

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Príklady:

(i) Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$. Ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna...

(ii) Funkcia $G(x) = 3\sqrt[3]{x}$ je primitívna funkcia k $g(x) = x^{-2/3}$ na $(0, 1)$.

(ii) Funkcia

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je primitívna funkcia k funkcii

$$h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$.

Pozorovanie: Funkcie f, g sú spojité, h nie je spojitá (kde?) – napriek tomu všetky majú primitívne funkcie (kde?)!

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Pozorovanie: Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$, ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna... Koľko (rôznych) primitívnych funkcií môže mať funkcia na otvorenom intervale?

Veta (o jednoznačnosti primitívnej funkcie až na konštantu)

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcia G je primitívna funkcia k funkcii f na I práve vtedy, keď

$$(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I)\ G(x) = F(x) + c.$$

Upozornenie: Veta neplatí na ľubovoľnej množine!!! Napr. k funkcii $f(x) = 2x$ na $M = (0,1) \cup (2,+\infty)$ je primitívna funkcia $F(x) = x^2$, ale aj

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1), \\ x^2 + 1, & x \in (2,+\infty), \end{cases}$$

ale neexistuje $c \in \mathbb{R}$ také, aby $(\forall x \in M)\ G(x) = F(x) + c$.

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je **primitívna funkcia k funkcii f na I**, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Pozorovanie: Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$, ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna... Koľko (rôznych) primitívnych funkcií môže mať funkcia na otvorenom intervale?

Veta (o jednoznačnosti primitívnej funkcie až na konštantu)

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcia G je primitívna funkcia k funkcii f na I práve vtedy, keď

$$(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I)\, G(x) = F(x) + c.$$

Upozornenie: Veta neplatí na ľubovoľnej množine!!! Napr. k funkcii $f(x) = 2x$ na $M = (0,1) \cup (2, +\infty)$ je primitívna funkcia $F(x) = x^2$, ale aj

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1), \\ x^2 + 1, & x \in (2, +\infty), \end{cases}$$

ale neexistuje $c \in \mathbb{R}$ také, aby $(\forall x \in M)\ G(x) = F(x) + c$.

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Pozorovanie: Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$, ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna... Koľko (rôznych) primitívnych funkcií môže mať funkcia na otvorenom intervale?

Veta (o jednoznačnosti primitívnej funkcie až na konštantu)

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcia G je primitívna funkcia k funkcii f na I práve vtedy, keď

$$(\exists c \in \mathbb{R})\, (\forall x \in I)\, G(x) = F(x) + c.$$

Upozornenie: Veta neplatí na ľubovoľnej množine!!! Napr. k funkcii $f(x) = 2x$ na $M = (0,1) \cup (2,+\infty)$ je primitívna funkcia $F(x) = x^2$, ale aj

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1), \\ x^2 + 1, & x \in (2,+\infty), \end{cases}$$

ale neexistuje $c \in \mathbb{R}$ také, aby $(\forall x \in M)\ G(x) = F(x) + c$.

Antiderivácia = primitívna funkcia

Definícia primitívnej funkcie

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Pozorovanie: Funkcia $F(x) = 3x^2 + 2x - 7$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x) = 6x + 2$ na $\mathbb{R}$, ale aj $F(x) = 3x^2 + 2x$ je k nej primitívna... Koľko (rôznych) primitívnych funkcií môže mať funkcia na otvorenom intervale?

Veta (o jednoznačnosti primitívnej funkcie až na konštantu)

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcia G je primitívna funkcia k funkcii f na I práve vtedy, keď

$$(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I)\,G(x) = F(x) + c.$$

Upozornenie: Veta neplatí na ľubovoľnej množine!!! Napr. k funkcii $f(x) = 2x$ na $M = (0,1) \cup (2, +\infty)$ je primitívna funkcia $F(x) = x^2$, ale aj

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1), \\ x^2 + 1, & x \in (2, +\infty), \end{cases}$$

ale neexistuje $c \in \mathbb{R}$ také, aby $(\forall x \in M)\ G(x) = F(x) + c$.

Neurčitý integrál

... notam $\int$ pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis ...

z listu Leibniza Johannovi Bernoullimu, 8. marca 1696

.... quod autem ... vocabulum *integralis* etiamnum usurpaverim ...

z listu Johanna Bernoulliho Leibnizovi, 7. apríl 1696

And whereas Mr. Leibniz præfixes the letter $\int$ to the Ordinate of a curve to denote the Summ of the Ordinates or area of the Curve, I did some years before represent the same thing by inscribing the Ordinate in a square ... My symbols therefore ... are the oldest in the kind.

z listu Newtona Keillovi, 20. apríl 1714

Definícia neurčitého integrálu

Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na otvorenom intervale I nazývame neurčitý integrál funkcie f na intervale I a označujeme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Sed ex iis quæ in methodo tangentium expoſui, patet eſſe d, $\frac{1}{2}$ xx = xdx; ergo contra $\frac{1}{2}$ xx = ſxdx (ut enim poteſtates & radices in vulgaribus calculis, ſic nobis ſummæ & differentiæ ſeu ſ & d, reciprocæ ſunt.)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- znak $\int$ pochádza od Leibniza a pôvodne znamenal niečo trochu iné (sčítavanie nekonečne malých veličín)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú
- označenia $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ vyjadrujú to isté! Tak prečo nepísať len $\int f$?
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety o jednoznačnosti)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- znak $\int$ pochádza od Leibniza a pôvodne znamenal niečo trochu iné (sčítavanie nekonečne malých veličín)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú
- označenia $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ vyjadrujú to isté! Tak prečo nepísať len $\int f$?
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety o jednoznačnosti)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- znak $\int$ pochádza od Leibniza a pôvodne znamenal niečo trochu iné (sčítavanie nekonečne malých veličín)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú
- označenia $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ vyjadrujú to isté! Tak prečo nepísať len $\int f$?
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety o jednoznačnosti)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- znak $\int$ pochádza od Leibniza a pôvodne znamenal niečo trochu iné (sčítavanie nekonečne malých veličín)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú
- označenia $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ vyjadrujú to isté! Tak prečo nepísať len $\int f$?
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety o jednoznačnosti)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- znak $\int$ pochádza od Leibniza a pôvodne znamenal niečo trochu iné (sčítavanie nekonečne malých veličín)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú
- označenia $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ vyjadrujú to isté! Tak prečo nepísať len $\int f$?
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety o jednoznačnosti)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- znak $\int$ pochádza od Leibniza a pôvodne znamenal niečo trochu iné (sčítavanie nekonečne malých veličín)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú
- označenia $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ vyjadrujú to isté! Tak prečo nepísať len $\int f$?
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety o jednoznačnosti)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- znak $\int$ pochádza od Leibniza a pôvodne znamenal niečo trochu iné (sčítavanie nekonečne malých veličín)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú
- označenia $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ vyjadrujú to isté! Tak prečo nepísať len $\int f$?
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety o jednoznačnosti)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- znak $\int$ pochádza od Leibniza a pôvodne znamenal niečo trochu iné (sčítavanie nekonečne malých veličín)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú
- označenia $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int f(a)\,\mathrm{d}a$ vyjadrujú to isté! Tak prečo nepísať len $\int f$?
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety o jednoznačnosti)

Dohoda: napriek uvedenému sa zápisy typu

$$\int x\,\mathrm{d}x = \left\{\frac{x^2}{2} + c; x \in I, c \in \mathbb{R}\right\}$$

nepoužívajú, zvykne sa písať len $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c$ pre $x \in I$, $c \in \mathbb{R}$.

Zdôvodnenie: nech $\mathscr{T}(I)$ je množina všetkých funkcií na otvorenom intervale I a pre $\mathscr{F}, \mathscr{G} \subseteq \mathscr{T}(I)$ a $k \in \mathbb{R}$ definujme „množinové“ operácie

$$\begin{aligned} \mathscr{F} + \mathscr{G} &:= \{f + g; f \in \mathscr{F}, g \in \mathscr{G}\}, \\ k \cdot \mathscr{F} &:= \{k \cdot f; f \in \mathscr{F}\}, \\ \mathscr{C} &:= \{f \in \mathscr{T}(I); f \text{ je konštantná}\}. \end{aligned}$$

Ak F je primitívna k f na I, podľa definície neurčitého integrálu platí

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \{F(x) + c; c \in \mathbb{R}\} \equiv \{F(x) + c; c \in \mathscr{C}\} \\ &= \{F\} + \mathscr{C} = F + \mathscr{C}, \end{aligned}$$

t.j. zápis $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ je úplne v poriadku, ak integračnú konštantu c interpretujeme ako množinu všetkých konštantných funkcií na I

Dohoda: napriek uvedenému sa zápisy typu

$$\int x\,\mathrm{d}x = \left\{\frac{x^2}{2} + c; x \in I, c \in \mathbb{R}\right\}$$

nepoužívajú, zvykne sa písať len $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c$ pre $x \in I$, $c \in \mathbb{R}$.

Zdôvodnenie: nech $\mathscr{T}(I)$ je množina všetkých funkcií na otvorenom intervale I a pre $\mathscr{F}, \mathscr{G} \subseteq \mathscr{T}(I)$ a $k \in \mathbb{R}$ definujme „množinové“ operácie

$$\begin{aligned}\mathscr{F} + \mathscr{G} &:= \{f + g; f \in \mathscr{F}, g \in \mathscr{G}\},\\ k \cdot \mathscr{F} &:= \{k \cdot f; f \in \mathscr{F}\},\\ \mathscr{C} &:= \{f \in \mathscr{T}(I); f \text{ je konštantná}\}.\end{aligned}$$

Ak F je primitívna k f na I, podľa definície neurčitého integrálu platí

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \{F(x) + c; c \in \mathbb{R}\} \equiv \{F(x) + c; c \in \mathscr{C}\}\\ &= \{F\} + \mathscr{C} = F + \mathscr{C},\end{aligned}$$

t.j. zápis $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ je úplne v poriadku, ak integračnú konštantu c interpretujeme ako množinu všetkých konštantných funkcií na I

Dohoda: napriek uvedenému sa zápisy typu

$$\int x\,\mathrm{d}x = \left\{\frac{x^2}{2} + c; x \in I, c \in \mathbb{R}\right\}$$

nepoužívajú, zvykne sa písať len $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c$ pre $x \in I$, $c \in \mathbb{R}$.

Zdôvodnenie: nech $\mathscr{T}(I)$ je množina všetkých funkcií na otvorenom intervale I a pre $\mathscr{F}, \mathscr{G} \subseteq \mathscr{T}(I)$ a $k \in \mathbb{R}$ definujme „množinové" operácie

$$\begin{aligned} \mathscr{F} + \mathscr{G} &:= \{f + g; f \in \mathscr{F}, g \in \mathscr{G}\}, \\ k \cdot \mathscr{F} &:= \{k \cdot f; f \in \mathscr{F}\}, \\ \mathscr{C} &:= \{f \in \mathscr{T}(I); f \text{ je konštantná}\}. \end{aligned}$$

Ak F je primitívna k f na I, podľa definície neurčitého integrálu platí

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \{F(x) + c; c \in \mathbb{R}\} \equiv \{F(x) + c; c \in \mathscr{C}\} \\ &= \{F\} + \mathscr{C} = F + \mathscr{C}, \end{aligned}$$

t.j. zápis $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ je úplne v poriadku, ak integračnú konštantu c interpretujeme ako množinu všetkých konštantných funkcií na I

Tabuľka neurčitých integrálov základných elementárnych funkcií

- ✓ $\int \mathrm{d}x = x + c$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ pre $\alpha \neq -1$ a $x \in (0, +\infty)$
- ✓ $\int \dfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + c, & x \in (0, +\infty), \\ \ln(-x) + c, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$
- ✓ $\int a^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + c$ pre $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$
- ✓ $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\, x + c$ pre $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$

Tabuľka neurčitých integrálov základných elementárnych funkcií

- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,x + c = -\mathrm{arccotg}\,x + c$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c = -\arccos x + c$ pre $x \in (-1,1)$
- ✓ $\displaystyle\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\displaystyle\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + c$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotgh}\,x + c$ pre $x \in (-\infty,0)$ a $x \in (0,+\infty)$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{tgh}\,x + c$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{argsinh}\,x + c = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{argcosh}\,x + c = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$ pre $x \in (1,+\infty)$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že neurčitý integrál je lineárny operátor, t.j.

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x) \, \mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak integrály napravo existujú!!!

Pozorovanie:

– Množina všetkých funkcií $f : I \to \mathbb{R}$, ktoré majú neurčitý integrál, tvorí vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

– Množina všetkých neurčitých integrálov na I tvorí abelovskú grupu.

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že neurčitý integrál je lineárny operátor, t.j.

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\, \mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak integrály napravo existujú!!!

Pozorovanie:

– Množina všetkých funkcií $f : I \to \mathbb{R}$, ktoré majú neurčitý integrál, tvorí vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

– Množina všetkých neurčitých integrálov na I tvorí abelovskú grupu.

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že neurčitý integrál je lineárny operátor, t.j.

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\, \mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak integrály napravo existujú!!!

Pozorovanie:

– Množina všetkých funkcií $f : I \to \mathbb{R}$, ktoré majú neurčitý integrál, tvorí vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

– Množina všetkých neurčitých integrálov na I tvorí abelovskú grupu.

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že neurčitý integrál je lineárny operátor, t.j.

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x) \, \mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak integrály napravo existujú!!!

Pozorovanie:

– Množina všetkých funkcií $f : I \to \mathbb{R}$, ktoré majú neurčitý integrál, tvorí vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

– Množina všetkých neurčitých integrálov na I tvorí abelovskú grupu.

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x}\right)\mathrm{d}x;$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x}\right)\mathrm{d}x;$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x}\right)\mathrm{d}x;$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x}\right)\mathrm{d}x$;

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Častokrát sa používa aj substitúcia $x = g(t)$, kedy je potrebné vetu preformulovať nasledovne:

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál II)

Ak $g : J \to I$ je diferencovateľná na J, pričom $(\forall t \in J)\ g'(t) \neq 0$, a Φ je primitívna funkcia k $(f \circ g) \cdot g'$ na I, potom $\Phi \circ \overline{g}$ je primitívna funkcia k f na I.

V reči neurčitých integrálov má veta o substitúcii $x = g(t)$ tvar

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (f \circ g)(t) g'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(t) + c = (\Phi \circ \overline{g})(x) + c, \quad x \in I.$$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Častokrát sa používa aj substitúcia $x = g(t)$, kedy je potrebné vetu preformulovať nasledovne:

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál II)

Ak $g : J \to I$ je diferencovateľná na J, pričom $(\forall t \in J)\ g'(t) \neq 0$, a Φ je primitívna funkcia k $(f \circ g) \cdot g'$ na I, potom $\Phi \circ \overline{g}$ je primitívna funkcia k f na I.

V reči neurčitých integrálov má veta o substitúcii $x = g(t)$ tvar

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (f \circ g)(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(t) + c = (\Phi \circ \overline{g})(x) + c, \quad x \in I.$$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\, \mathrm{d}x = \int f(t)\, \mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Častokrát sa používa aj substitúcia $x = g(t)$, kedy je potrebné vetu preformulovať nasledovne:

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál II)

Ak $g : J \to I$ je diferencovateľná na J, pričom $(\forall t \in J)\ g'(t) \neq 0$, a Φ je primitívna funkcia k $(f \circ g) \cdot g'$ na I, potom $\Phi \circ \overline{g}$ je primitívna funkcia k f na I.

V reči neurčitých integrálov má veta o substitúcii $x = g(t)$ tvar

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int (f \circ g)(t) g'(t)\, \mathrm{d}t = \Phi(t) + c = (\Phi \circ \overline{g})(x) + c, \quad x \in I.$$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x) g'(x) \,\mathrm{d}x = \int f(t) \,\mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln(\ln x)};$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$ pre $a \neq 0$;

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln(\ln x)}$;
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$ pre $a \neq 0$;

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln(\ln x)};$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$ pre $a \neq 0$;