Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html
Prednáška 9

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

13. novembra 2023

Antiderivácia = primitívna funkcia – zopakovanie

Primitívna funkcia

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Veta (o jednoznačnosti primitívnej funkcie až na konštantu)

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Funkcia G je primitívna funkcia k funkcii f na I práve vtedy, keď

$$(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I)\,G(x) = F(x) + c.$$

Zistenie: Veta neplatí na ľubovoľnej množine!!! Napr. k funkcii $f(x) = 2x$ na $M = (0,1) \cup (2,+\infty)$ je primitívna funkcia $F(x) = x^2$, ale aj

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1), \\ x^2 + 1, & x \in (2,+\infty), \end{cases}$$

ale neexistuje $c \in \mathbb{R}$ také, aby $(\forall x \in M)\ G(x) = F(x) + c$.

Antiderivácia = primitívna funkcia – zopakovanie

Primitívna funkcia

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Veta (o jednoznačnosti primitívnej funkcie až na konštantu)

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Funkcia G je primitívna funkcia k funkcii f na I práve vtedy, keď

$$(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I)\,G(x) = F(x) + c.$$

Zistenie: Veta neplatí na ľubovoľnej množine!!! Napr. k funkcii $f(x) = 2x$ na $M = (0,1) \cup (2, +\infty)$ je primitívna funkcia $F(x) = x^2$, ale aj

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1), \\ x^2 + 1, & x \in (2, +\infty), \end{cases}$$

ale neexistuje $c \in \mathbb{R}$ také, aby $(\forall x \in M)\ G(x) = F(x) + c$.

Antiderivácia = primitívna funkcia – zopakovanie

Primitívna funkcia

Nech f, F sú definované na otvorenom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$. Hovoríme, že F je primitívna funkcia k funkcii f na I, akk $(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$.

Veta (o jednoznačnosti primitívnej funkcie až na konštantu)

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Funkcia G je primitívna funkcia k funkcii f na I práve vtedy, keď

$$(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I)\,G(x) = F(x) + c.$$

Zistenie: Veta neplatí na ľubovoľnej množine!!! Napr. k funkcii $f(x) = 2x$ na $M = (0,1) \cup (2,+\infty)$ je primitívna funkcia $F(x) = x^2$, ale aj

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1), \\ x^2 + 1, & x \in (2,+\infty), \end{cases}$$

ale neexistuje $c \in \mathbb{R}$ také, aby $(\forall x \in M)\ G(x) = F(x) + c$.

Neurčitý integrál – zopakovanie

... notam $\int$ pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis ...

z listu Leibniza Johannovi Bernoullimu, 8. marca 1696

.... quod autem ... vocabulum *integralis* etiamnum usurpaverim ...

z listu Johanna Bernoulliho Leibnizovi, 7. apríl 1696

Utile erit scribi $\int$ pro omn. ut $\int \ell$ pro omn. ℓ, id est summa ipsorum ℓ.

Leibnizov nepublikovaný rukopis *Analyseos tetragonisticae pars secunda*, 29. október 1675

Neurčitý integrál

Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na I nazývame neurčitý integrál funkcie f na intervale I a označujeme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

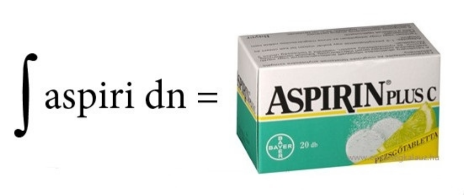
Sed ex iis quæ in methodo tangentium expoſui, patet eſſe $d, \frac{1}{2}xx = xdx$; ergo contra $\frac{1}{2}xx = \int xdx$ (ut enim poteſtates & radices in vulgaribus calculis, ſic nobis ſummæ & differentiæ ſeu $\int$ & d, reciprocæ ſunt.)

Leibniz: *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorium* (1686)

Neurčitý integrál – poznámky k označeniu

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \left\{\mathfrak{F}(x) = F(x) + c,\ \text{kde } (\forall x \in I)\, F'(x) = f(x) \text{ a } c \in \mathbb{R}\right\}$$

- hoci sa interval I nevyskytuje v označení neurčitého integrálu, je dôležité uvádzať, kde sa výpočet deje!!! (napr. sgn na intervale $I_1 = (0, +\infty)$ a $I_2 = (-1, 1)$)
- funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazývame integrand
- symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú (no v skutočnosti tu ide o diferenciál!)
- F je jeden konkrétny reprezentant množiny primitívnych funkcií k funkcii f na I
- $c \in \mathbb{R}$ je aditívna (integračná) konštanta (podľa Vety VI.1)



Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že neurčitý integrál je lineárny operátor, t.j.

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\, \mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak integrály napravo existujú!!!

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\, \mathrm{d}x = \int f(t)\, \mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \dots, n$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že neurčitý integrál je lineárny operátor, t.j.

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak integrály napravo existujú!!!

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Známy fakt: derivácia súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) derivácií, ak tieto derivácie existujú

Veta (o linearite neurčitého integrálu)

Nech F_i sú primitívne funkcie k funkciám f_i na I, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potom funkcia $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ je primitívna funkcia k funkcii $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že neurčitý integrál je lineárny operátor, t.j.

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak integrály napravo existujú!!!

Známy fakt: za príslušných predpokladov derivácia kompozície má tvar $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Veta (substitučná metóda pre neurčitý integrál I)

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale J, $g \in \mathscr{D}(I)$ a $(\forall x \in I)\ g(x) \in J$. Potom $F \circ g$ je primitívna funkcia k funkcii $(f \circ g) \cdot g'$ na I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí o substitúcii $g(x) = t$, t.j.

$$\int (f \circ g)(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = (F \circ g)(x) + c, \quad x \in I.$$

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčinu má tvar $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ak tieto derivácie existujú

Veta (metóda per partes pre neurčitý integrál)

Nech $u, v \in \mathscr{D}(I)$ a Φ je primitívna funkcia k funkcii $u'v$ na intervale I. Potom $uv - \Phi$ je primitívna funkcia k funkcii uv' na intervale I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že ak $u, v \in \mathscr{D}(I)$, tak

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak existuje aspoň jeden z neurčitých integrálov v uvedenej rovnosti

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x$;
- umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb/integraly.pdf

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčinu má tvar $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ak tieto derivácie existujú

Veta (metóda per partes pre neurčitý integrál)

Nech $u, v \in \mathscr{D}(I)$ a Φ je primitívna funkcia k funkcii $u'v$ na intervale I. Potom $uv - \Phi$ je primitívna funkcia k funkcii uv' na intervale I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že ak $u, v \in \mathscr{D}(I)$, tak

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak existuje aspoň jeden z neurčitých integrálov v uvedenej rovnosti

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x;$
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x;$
- umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb/integraly.pdf

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčinu má tvar $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ak tieto derivácie existujú

Veta (metóda per partes pre neurčitý integrál)

Nech $u, v \in \mathscr{D}(I)$ a Φ je primitívna funkcia k funkcii $u'v$ na intervale I. Potom $uv - \Phi$ je primitívna funkcia k funkcii uv' na intervale I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že ak $u, v \in \mathscr{D}(I)$, tak

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak existuje aspoň jeden z neurčitých integrálov v uvedenej rovnosti

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x$;
- umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb/integraly.pdf

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčinu má tvar $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ak tieto derivácie existujú

Veta (metóda per partes pre neurčitý integrál)

Nech $u, v \in \mathscr{D}(I)$ a Φ je primitívna funkcia k funkcii $u'v$ na intervale I. Potom $uv - \Phi$ je primitívna funkcia k funkcii uv' na intervale I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že ak $u, v \in \mathscr{D}(I)$, tak

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak existuje aspoň jeden z neurčitých integrálov v uvedenej rovnosti

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x$;
- umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb/integraly.pdf

Metódy výpočtu neurčitých integrálov

Pripomenutie: neurčitý integrál funkcie f na otvorenom intervale I je množina všetkých primitívnych funkcií k f na I

Známy fakt: derivácia súčinu má tvar $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ak tieto derivácie existujú

Veta (metóda per partes pre neurčitý integrál)

Nech $u, v \in \mathscr{D}(I)$ a Φ je primitívna funkcia k funkcii $u'v$ na intervale I. Potom $uv - \Phi$ je primitívna funkcia k funkcii uv' na intervale I.

Poznámka: v reči neurčitých integrálov veta hovorí, že ak $u, v \in \mathscr{D}(I)$, tak

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I,$$

ak existuje aspoň jeden z neurčitých integrálov v uvedenej rovnosti

Príklady: Nájdite neurčité integrály

- $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x;$
- `umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb/integraly.pdf`

O možnej neelementárnosti antiderivácií elementárnych funkcií

– derivácia polynómu je opäť polynóm
– derivácia racionálnej funkcie je opäť racionálna funkcia
– derivácia elementárnej funkcie je opäť elementárna funkcia

Pri integrovaní toto už platiť nemusí!

✓ integrál z polynómu je opäť polynóm (množina polynómov!)

X integrál z racionálnej funkcie nemusí byť racionálna funkcia, napr. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$ alebo $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
– integrál z racionálnej funkcie je však vždy elementárnou funkciou

X integrál z elementárnej funkcie nemusí byť elementárna funkcia
= podobná situácia: druhá mocnina racionálneho čísla je vždy racionálne číslo, ale druhá odmocnina nie, napr. $\sqrt{2}$

- matematická štatistika: *Poissonov integrál* $\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;
- fyzika pevných látok: *Fermiho integrál* $\int \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$;
- optika: *Fresnelove integrály* $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$ a $\int \cos x^2\,\mathrm{d}x$;

O možnej neelementárnosti antiderivácií elementárnych funkcií

– derivácia polynómu je opäť polynóm
– derivácia racionálnej funkcie je opäť racionálna funkcia
– derivácia elementárnej funkcie je opäť elementárna funkcia

Pri integrovaní toto už platiť nemusí!

✓ integrál z polynómu je opäť polynóm (množina polynómov!)

X integrál z racionálnej funkcie nemusí byť racionálna funkcia, napr. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$ alebo $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
– integrál z racionálnej funkcie je však vždy elementárnou funkciou

X integrál z elementárnej funkcie nemusí byť elementárna funkcia
= podobná situácia: druhá mocnina racionálneho čísla je vždy racionálne číslo, ale druhá odmocnina nie, napr. $\sqrt{2}$

- matematická štatistika: *Poissonov integrál* $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;
- fyzika pevných látok: *Fermiho integrál* $\int \frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$;
- optika: *Fresnelove integrály* $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$ a $\int \cos x^2\,\mathrm{d}x$;

O možnej neelementárnosti antiderivácií elementárnych funkcií

– derivácia polynómu je opäť polynóm
– derivácia racionálnej funkcie je opäť racionálna funkcia
– derivácia elementárnej funkcie je opäť elementárna funkcia

Pri integrovaní toto už platiť nemusí!

✓ integrál z polynómu je opäť polynóm (množina polynómov!)

✗ integrál z racionálnej funkcie nemusí byť racionálna funkcia, napr. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$ alebo $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
– integrál z racionálnej funkcie je však vždy elementárnou funkciou

✗ integrál z elementárnej funkcie nemusí byť elementárna funkcia
= podobná situácia: druhá mocnina racionálneho čísla je vždy racionálne číslo, ale druhá odmocnina nie, napr. $\sqrt{2}$

- matematická štatistika: *Poissonov integrál* $\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;
- fyzika pevných látok: *Fermiho integrál* $\int \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$;
- optika: *Fresnelove integrály* $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$ a $\int \cos x^2\,\mathrm{d}x$;

O možnej neelementárnosti antiderivácií elementárnych funkcií

– derivácia polynómu je opäť polynóm
– derivácia racionálnej funkcie je opäť racionálna funkcia
– derivácia elementárnej funkcie je opäť elementárna funkcia

Pri integrovaní toto už platiť nemusí!

✓ integrál z polynómu je opäť polynóm (množina polynómov!)

X integrál z racionálnej funkcie nemusí byť racionálna funkcia, napr. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$ alebo $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
– integrál z racionálnej funkcie je však vždy elementárnou funkciou

X integrál z elementárnej funkcie nemusí byť elementárna funkcia
= podobná situácia: druhá mocnina racionálneho čísla je vždy racionálne číslo, ale druhá odmocnina nie, napr. $\sqrt{2}$

- matematická štatistika: *Poissonov integrál* $\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;
- fyzika pevných látok: *Fermiho integrál* $\int \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$;
- optika: *Fresnelove integrály* $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$ a $\int \cos x^2\,\mathrm{d}x$;

O možnej neelementárnosti antiderivácií elementárnych funkcií

– derivácia polynómu je opäť polynóm
– derivácia racionálnej funkcie je opäť racionálna funkcia
– derivácia elementárnej funkcie je opäť elementárna funkcia

Pri integrovaní toto už platiť nemusí!

✓ integrál z polynómu je opäť polynóm (množina polynómov!)

X integrál z racionálnej funkcie nemusí byť racionálna funkcia, napr. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$ alebo $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
– integrál z racionálnej funkcie je však vždy elementárnou funkciou

X integrál z elementárnej funkcie nemusí byť elementárna funkcia
= podobná situácia: druhá mocnina racionálneho čísla je vždy racionálne číslo, ale druhá odmocnina nie, napr. $\sqrt{2}$

- matematická štatistika: *Poissonov integrál* $\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;
- fyzika pevných látok: *Fermiho integrál* $\int \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$;
- optika: *Fresnelove integrály* $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$ a $\int \cos x^2\,\mathrm{d}x$;

O možnej neelementárnosti antiderivácií elementárnych funkcií

– derivácia polynómu je opäť polynóm
– derivácia racionálnej funkcie je opäť racionálna funkcia
– derivácia elementárnej funkcie je opäť elementárna funkcia

Pri integrovaní toto už platiť nemusí!

✓ integrál z polynómu je opäť polynóm (množina polynómov!)

X integrál z racionálnej funkcie nemusí byť racionálna funkcia, napr.
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$ alebo $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
– integrál z racionálnej funkcie je však vždy elementárnou funkciou

X integrál z elementárnej funkcie nemusí byť elementárna funkcia
= podobná situácia: druhá mocnina racionálneho čísla je vždy racionálne číslo, ale druhá odmocnina nie, napr. $\sqrt{2}$

- *eliptické integrály* prvého a druhého druhu:

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \quad k \in (0,1), \ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

O možnej neelementárnosti antiderivácií elementárnych funkcií

– derivácia polynómu je opäť polynóm
– derivácia racionálnej funkcie je opäť racionálna funkcia
– derivácia elementárnej funkcie je opäť elementárna funkcia

Pri integrovaní toto už platiť nemusí!

✓ integrál z polynómu je opäť polynóm (množina polynómov!)

X integrál z racionálnej funkcie nemusí byť racionálna funkcia, napr. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$ alebo $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$
– integrál z racionálnej funkcie je však vždy elementárnou funkciou

X integrál z elementárnej funkcie nemusí byť elementárna funkcia
= podobná situácia: druhá mocnina racionálneho čísla je vždy racionálne číslo, ale druhá odmocnina nie, napr. $\sqrt{2}$

- *mnohé iné*, napr.:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \ldots$$

Integrovanie niektorých tried funkcií

...nemôžeme nespomenúť výčitky, ktoré neraz zaznievajú na adresu matematikov, totiž, že učia študentov ovládať nikomu nepotrebnú techniku výpočtu neurčitých integrálov, čo je anachronizmus, lebo ak sa niekedy v ďalšej praxi stretnú s podobnou úlohou, jednoducho použijú existujúce príručky. Myslím si, že táto výčitka je nespravodlivá... Celá vec spočíva v tom, že študenta študujúceho matematiku treba kdesi naučiť základné elementy analytických transformácií, pestovať v ňom schopnosť prejaviť vynaliezavosť v týchto transformáciách, rozvíjať v ňom určitý analytický cit – a výpočet neurčitých integrálov dáva na tento účel jednoduchý a zároveň dostatočne obsažný materiál. Nie je známe, čím by bolo možné túto látku nahradiť s tým istým efektom užitočnosti. Nahradiť vyučovanie vedúce k ovládaniu analytických transformácií vyučovaním, ako používať existujúce príručky, je zjavne neúčelné – výcvik k tejto zručnosti nemôže byť vlastným predmetom vyučovania...

Kudrjavcev: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*, SPN Bratislava, 1990

Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.

Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Cieľ: ukázať, že integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Jednotlivé kroky algoritmu: ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionálna funkcia, tak nájdenie primitívnej funkcie sa udeje v troch krokoch:

(1) redukcia na prípad $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, kde $\operatorname{st} P$ je stupeň polynómu P;

(2) faktorizácia Q a rozklad racionálnej funkcie R na parciálne zlomky;

(3) integrovanie parciálnych zlomkov.

Integrovanie niektorých tried funkcií

...nemôžeme nespomenúť výčitky, ktoré neraz zaznievajú na adresu matematikov, totiž, že učia študentov ovládať nikomu nepotrebnú techniku výpočtu neurčitých integrálov, čo je anachronizmus, lebo ak sa niekedy v ďalšej praxi stretnú s podobnou úlohou, jednoducho použijú existujúce príručky. Myslím si, že táto výčitka je nespravodlivá... Celá vec spočíva v tom, že študenta študujúceho matematiku treba kdesi naučiť základné elementy analytických transformácií, pestovať v ňom schopnosť prejaviť vynaliezavosť v týchto transformáciách, rozvíjať v ňom určitý analytický cit – a výpočet neurčitých integrálov dáva na tento účel jednoduchý a zároveň dostatočne obsažný materiál. Nie je známe, čím by bolo možné túto látku nahradiť s tým istým efektom užitočnosti. Nahradiť vyučovanie vedúce k ovládaniu analytických transformácií vyučovaním, ako používať existujúce príručky, je zjavne neúčelné – výcvik k tejto zručnosti nemôže byť vlastným predmetom vyučovania...

Kudrjavcev: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*, SPN Bratislava, 1990

Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.

Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Cieľ: ukázať, že integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Jednotlivé kroky algoritmu: ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionálna funkcia, tak nájdenie primitívnej funkcie sa udeje v troch krokoch:

(1) redukcia na prípad $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, kde $\operatorname{st} P$ je stupeň polynómu P;

(2) faktorizácia Q a rozklad racionálnej funkcie R na parciálne zlomky;

(3) integrovanie parciálnych zlomkov.

Integrovanie niektorých tried funkcií

...nemôžeme nespomenúť výčitky, ktoré neraz zaznievajú na adresu matematikov, totiž, že učia študentov ovládať nikomu nepotrebnú techniku výpočtu neurčitých integrálov, čo je anachronizmus, lebo ak sa niekedy v ďalšej praxi stretnú s podobnou úlohou, jednoducho použijú existujúce príručky. Myslím si, že táto výčitka je nespravodlivá... Celá vec spočíva v tom, že študenta študujúceho matematiku treba kdesi naučiť základné elementy analytických transformácií, pestovať v ňom schopnosť prejaviť vynaliezavosť v týchto transformáciách, rozvíjať v ňom určitý analytický cit – a výpočet neurčitých integrálov dáva na tento účel jednoduchý a zároveň dostatočne obsažný materiál. Nie je známe, čím by bolo možné túto látku nahradiť s tým istým efektom užitočnosti. Nahradiť vyučovanie vedúce k ovládaniu analytických transformácií vyučovaním, ako používať existujúce príručky, je zjavne neúčelné – výcvik k tejto zručnosti nemôže byť vlastným predmetom vyučovania...

Kudrjavcev: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*, SPN Bratislava, 1990

Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.

Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Cieľ: ukázať, že integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Jednotlivé kroky algoritmu: ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionálna funkcia, tak nájdenie primitívnej funkcie sa udeje v troch krokoch:

(1) redukcia na prípad $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, kde $\operatorname{st} P$ je stupeň polynómu P;

(2) faktorizácia Q a rozklad racionálnej funkcie R na parciálne zlomky;

(3) integrovanie parciálnych zlomkov.

Integrovanie niektorých tried funkcií

...nemôžeme nespomenúť výčitky, ktoré neraz zaznievajú na adresu matematikov, totiž, že učia študentov ovládať nikomu nepotrebnú techniku výpočtu neurčitých integrálov, čo je anachronizmus, lebo ak sa niekedy v ďalšej praxi stretnú s podobnou úlohou, jednoducho použijú existujúce príručky. Myslím si, že táto výčitka je nespravodlivá... Celá vec spočíva v tom, že študenta študujúceho matematiku treba kdesi naučiť základné elementy analytických transformácií, pestovať v ňom schopnosť prejaviť vynaliezavosť v týchto transformáciách, rozvíjať v ňom určitý analytický cit – a výpočet neurčitých integrálov dáva na tento účel jednoduchý a zároveň dostatočne obsažný materiál. Nie je známe, čím by bolo možné túto látku nahradiť s tým istým efektom užitočnosti. Nahradiť vyučovanie vedúce k ovládaniu analytických transformácií vyučovaním, ako používať existujúce príručky, je zjavne neúčelné – výcvik k tejto zručnosti nemôže byť vlastným predmetom vyučovania...

Kudrjavcev: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*, SPN Bratislava, 1990

Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.

Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Cieľ: ukázať, že integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Jednotlivé kroky algoritmu: ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionálna funkcia, tak nájdenie primitívnej funkcie sa udeje v troch krokoch:

(1) redukcia na prípad $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, kde $\operatorname{st} P$ je stupeň polynómu P;

(2) faktorizácia Q a rozklad racionálnej funkcie R na parciálne zlomky;

(3) integrovanie parciálnych zlomkov.

Integrovanie niektorých tried funkcií

...nemôžeme nespomenúť výčitky, ktoré neraz zaznievajú na adresu matematikov, totiž, že učia študentov ovládať nikomu nepotrebnú techniku výpočtu neurčitých integrálov, čo je anachronizmus, lebo ak sa niekedy v ďalšej praxi stretnú s podobnou úlohou, jednoducho použijú existujúce príručky. Myslím si, že táto výčitka je nespravodlivá... Celá vec spočíva v tom, že študenta študujúceho matematiku treba kdesi naučiť základné elementy analytických transformácií, pestovať v ňom schopnosť prejaviť vynaliezavosť v týchto transformáciách, rozvíjať v ňom určitý analytický cit – a výpočet neurčitých integrálov dáva na tento účel jednoduchý a zároveň dostatočne obsažný materiál. Nie je známe, čím by bolo možné túto látku nahradiť s tým istým efektom užitočnosti. Nahradiť vyučovanie vedúce k ovládaniu analytických transformácií vyučovaním, ako používať existujúce príručky, je zjavne neúčelné – výcvik k tejto zručnosti nemôže byť vlastným predmetom vyučovania...

Kudrjavcev: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*, SPN Bratislava, 1990

Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.

Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Cieľ: ukázať, že integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Jednotlivé kroky algoritmu: ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionálna funkcia, tak nájdenie primitívnej funkcie sa udeje v troch krokoch:

(1) redukcia na prípad $\mathrm{st}\,P < \mathrm{st}\,Q$, kde $\mathrm{st}\,P$ je stupeň polynómu P;

(2) faktorizácia Q a rozklad racionálnej funkcie R na parciálne zlomky;

(3) integrovanie parciálnych zlomkov.

Integrovanie niektorých tried funkcií

...nemôžeme nespomenúť výčitky, ktoré neraz zaznievajú na adresu matematikov, totiž, že učia študentov ovládať nikomu nepotrebnú techniku výpočtu neurčitých integrálov, čo je anachronizmus, lebo ak sa niekedy v ďalšej praxi stretnú s podobnou úlohou, jednoducho použijú existujúce príručky. Myslím si, že táto výčitka je nespravodlivá... Celá vec spočíva v tom, že študenta študujúceho matematiku treba kdesi naučiť základné elementy analytických transformácií, pestovať v ňom schopnosť prejaviť vynaliezavosť v týchto transformáciách, rozvíjať v ňom určitý analytický cit – a výpočet neurčitých integrálov dáva na tento účel jednoduchý a zároveň dostatočne obsažný materiál. Nie je známe, čím by bolo možné túto látku nahradiť s tým istým efektom užitočnosti. Nahradiť vyučovanie vedúce k ovládaniu analytických transformácií vyučovaním, ako používať existujúce príručky, je zjavne neúčelné – výcvik k tejto zručnosti nemôže byť vlastným predmetom vyučovania...

Kudrjavcev: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*, SPN Bratislava, 1990

Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.

Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Cieľ: ukázať, že integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Jednotlivé kroky algoritmu: ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionálna funkcia, tak nájdenie primitívnej funkcie sa udeje v troch krokoch:

(1) redukcia na prípad $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, kde $\operatorname{st} P$ je stupeň polynómu P;

(2) faktorizácia Q a rozklad racionálnej funkcie R na parciálne zlomky;

(3) integrovanie parciálnych zlomkov.

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Keď nemám čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.

Seneca

(1) Ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nie je rýdzoracionálna funkcia, možno ju zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{st}\, Z < \mathrm{st}\, Q,$$

pričom polynómy V a Z nájdeme delením polynómov, t.j. V je celá časť a Z je zvyšok po delení polynómu P polynómom Q.

Príklad: Vydeľte $\frac{x^3-1}{x+1}$.

(2) **Rýchlokurz algebry polynómov nad poľom**: nech P_n je polynóm stupňa n nad poľom $\mathbb{R}$

– ak α je reálny koreň polynómu P_n, tak

$$P_n(x) = (x-\alpha)Q_{n-1}(x), \quad \text{kde } Q_{n-1}(\alpha) \neq 0;$$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Keď nemám čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.

Seneca

(1) Ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nie je rýdzoracionálna funkcia, možno ju zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \quad \operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q,$$

pričom polynómy V a Z nájdeme delením polynómov, t.j. V je celá časť a Z je zvyšok po delení polynómu P polynómom Q.

Príklad: Vydeľte $\frac{x^3 - 1}{x + 1}$.

(2) **Rýchlokurz algebry polynómov nad poľom**: nech P_n je polynóm stupňa n nad poľom $\mathbb{R}$

– ak α je reálny koreň polynómu P_n, tak

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x), \quad \text{kde } Q_{n-1}(\alpha) \neq 0;$$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Keď nemám čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.

Seneca

(1) Ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nie je rýdzoracionálna funkcia, možno ju zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{st}\, Z < \mathrm{st}\, Q,$$

pričom polynómy V a Z nájdeme delením polynómov, t.j. V je celá časť a Z je zvyšok po delení polynómu P polynómom Q.

Príklad: Vydeľte $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$.

(2) **Rýchlokurz algebry polynómov nad poľom**: nech P_n je polynóm stupňa n nad poľom $\mathbb{R}$

– ak α je reálny koreň polynómu P_n, tak

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x), \quad \text{kde } Q_{n-1}(\alpha) \neq 0;$$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Keď nemám čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.

Seneca

(1) Ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nie je rýdzoracionálna funkcia, možno ju zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{st}\, Z < \mathrm{st}\, Q,$$

pričom polynómy V a Z nájdeme delením polynómov, t.j. V je celá časť a Z je zvyšok po delení polynómu P polynómom Q.

Príklad: Vydeľte $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$.

(2) **Rýchlokurz algebry polynómov nad poľom**: nech P_n je polynóm stupňa n nad poľom $\mathbb{R}$

– ak α je reálny koreň polynómu P_n, tak

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x), \quad \text{kde } Q_{n-1}(\alpha) \neq 0;$$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Keď nemám čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.

Seneca

(1) Ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nie je rýdzoracionálna funkcia, možno ju zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{st}\, Z < \mathrm{st}\, Q,$$

pričom polynómy V a Z nájdeme delením polynómov, t.j. V je celá časť a Z je zvyšok po delení polynómu P polynómom Q.

Príklad: Vydeľte $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$.

(2) **Rýchlokurz algebry polynómov nad poľom**: nech P_n je polynóm stupňa n nad poľom $\mathbb{R}$

– ak α je k-násobný reálny koreň polynómu P_n, tak

$$P_n(x) = (x - \alpha)^k Q_{n-k}(x), \quad \text{kde } 1 \leq k \leq n \text{ a } Q_{n-k}(\alpha) \neq 0;$$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Keď nemám čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.

Seneca

(1) Ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nie je rýdzoracionálna funkcia, možno ju zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{st}\, Z < \mathrm{st}\, Q,$$

pričom polynómy V a Z nájdeme delením polynómov, t.j. V je celá časť a Z je zvyšok po delení polynómu P polynómom Q.

Príklad: Vydeľte $\frac{x^3 - 1}{x + 1}$.

(2) **Rýchlokurz algebry polynómov nad poľom**: nech P_n je polynóm stupňa n nad poľom $\mathbb{R}$

– ak $\alpha = a + \mathrm{i}\, b$ je koreň polynómu P_n, tak aj $\overline{\alpha} = a - \mathrm{i}\, b$ je koreň a

$P_n(x) = (x^2 + px + q) Q_{n-2}(x)$, kde $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ a $p^2 - 4q < 0$;

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Keď nemám čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.

Seneca

(1) Ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nie je rýdzoracionálna funkcia, možno ju zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{st}\, Z < \mathrm{st}\, Q,$$

pričom polynómy V a Z nájdeme delením polynómov, t.j. V je celá časť a Z je zvyšok po delení polynómu P polynómom Q.

Príklad: Vydeľte $\dfrac{x^3-1}{x+1}$.

(2) **Rýchlokurz algebry polynómov nad poľom**: nech P_n je polynóm stupňa n nad poľom $\mathbb{R}$

– ak $\alpha = a + \mathrm{i}\, b$ je k-násobný koreň polynómu P_n, kde $1 \le k \le n$, tak

$P_n(x) = (x^2+px+q)^k Q_{n-2k}(x)$, kde $x^2+px+q = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ a $p^2-4q < 0$;

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Keď nemám čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.

Seneca

(1) Ak $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nie je rýdzoracionálna funkcia, možno ju zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}, \quad \operatorname{st} Z < \operatorname{st} Q,$$

pričom polynómy V a Z nájdeme delením polynómov, t.j. V je celá časť a Z je zvyšok po delení polynómu P polynómom Q.

Príklad: Vydeľte $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$.

(2) **Rýchlokurz algebry polynómov nad poľom**: nech P_n je polynóm stupňa n nad poľom $\mathbb{R}$

– polynóm P_n sa dá jednoznačne (až na poradie činiteľov) rozložiť nad $\mathbb{R}$:

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s};$$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

The above quantity $\dfrac{ppads}{qqss - ppaa}$

reduces immediately, without any change, to two logarithmical fractions, by separating it thus:

$$\frac{ppads}{qqss - ppaa} = \frac{\frac{1}{2}\,pds}{qs - pa} - \frac{\frac{1}{2}\,pds}{qs + pa} \dots$$

príloha k listu Johanna Bernoulliho, 1699

Rozklad na parciálne zlomky – reálne korene a ich násobnosť

Nech $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je rýdzoracionálna funkcia a $\alpha \in \mathbb{R}$ je k-násobný koreň polynómu Q, t.j. $Q(x) = (x - \alpha)^k \widetilde{Q}(x)$, kde $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. Potom existujú čísla $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}$ a polynóm $\widetilde{P}$ stupňa menšieho ako $\widetilde{Q}$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $Q(x) \neq 0$, platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}.$$

Príklad: Rozložte na parciálne zlomky funkciu $R(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x}$.

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

The above quantity $$\frac{ppads}{qqss - ppaa}$$

reduces immediately, without any change, to two logarithmical fractions, by separating it thus:

$$\frac{ppads}{qqss - ppaa} = \frac{\frac{1}{2}\,pds}{qs - pa} - \frac{\frac{1}{2}\,pds}{qs + pa} \dots$$

príloha k listu Johanna Bernoulliho, 1699

Rozklad na parciálne zlomky – reálne korene a ich násobnosť

Nech $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je rýdzoracionálna funkcia a $\alpha \in \mathbb{R}$ je k-násobný koreň polynómu Q, t.j. $Q(x) = (x - \alpha)^k \widetilde{Q}(x)$, kde $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. Potom existujú čísla $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}$ a polynóm $\widetilde{P}$ stupňa menšieho ako $\widetilde{Q}$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $Q(x) \neq 0$, platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}.$$

Príklad: Rozložte na parciálne zlomky funkciu $R(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x}$.

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

The above quantity
$$\frac{ppads}{qqss - ppaa}$$
reduces immediately, without any change, to two logarithmical fractions, by separating it thus:
$$\frac{ppads}{qqss - ppaa} = \frac{\frac{1}{2}\,pds}{qs - pa} - \frac{\frac{1}{2}\,pds}{qs + pa}\ \ldots$$

príloha k listu Johanna Bernoulliho, 1699

Rozklad na parciálne zlomky – komplexné korene a ich násobnosť

Nech $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je rýdzoracionálna funkcia a $\alpha \in \mathbb{C}$ je l-násobný koreň polynómu Q, t.j. $Q(x) = (x^2 + px + q)^l \widetilde{Q}(x)$, kde $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ a $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. Potom existujú čísla $M_1, N_1, \ldots, M_l, N_l \in \mathbb{R}$ a polynóm $\widetilde{P}$ stupňa menšieho ako $\widetilde{Q}$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $Q(x) \neq 0$, platí
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_l x + N_l}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}.$$

Príklad: Rozložte na parciálne zlomky funkciu $R(x) = \dfrac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

The above quantity $\dfrac{ppads}{qqss - ppaa}$

reduces immediately, without any change, to two logarithmical fractions, by separating it thus:

$$\frac{ppads}{qqss - ppaa} = \frac{\frac{1}{2}\,pds}{qs - pa} - \frac{\frac{1}{2}\,pds}{qs + pa}\ \ldots$$

príloha k listu Johanna Bernoulliho, 1699

Rozklad na parciálne zlomky – komplexné korene a ich násobnosť

Nech $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je rýdzoracionálna funkcia a $\alpha \in \mathbb{C}$ je l-násobný koreň polynómu Q, t.j. $Q(x) = (x^2 + px + q)^l \widetilde{Q}(x)$, kde $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ a $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$. Potom existujú čísla $M_1, N_1, \ldots, M_l, N_l \in \mathbb{R}$ a polynóm $\widetilde{P}$ stupňa menšieho ako $\widetilde{Q}$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $Q(x) \neq 0$, platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}.$$

Príklad: Rozložte na parciálne zlomky funkciu $R(x) = \dfrac{2x}{(1 + x)(1 + x^2)^2}$.

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

Veta (o rozklade rýdzoracionálnej funkcie na parciálne zlomky)

Nech $\frac{P}{Q}$ je rýdzoracionálna funkcia a

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

kde $a_n \neq 0$, $k_i, l_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$ sú navzájom rôzne a $p_j^2 < 4q_j$. Potom existujú $A_i^{k_i-m} \in \mathbb{R}$ pre $m = 1, 2, \dots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, r$ a $M_j^{l_j-n}, N_j^{l_j-n} \in \mathbb{R}$ pre $n = 1, 2, \dots, l_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, s$ také, že $(\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0)$ platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-\alpha_1)} + \dots + \frac{A_1^{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_r^1}{(x-\alpha_r)} + \dots + \frac{A_r^{k_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} \\ & + \frac{M_1^1x+N_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{M_1^{l_1}x+N_1^{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \dots \\ & + \frac{M_s^1x+N_s^1}{x^2+p_sx+q_s} + \dots + \frac{M_s^{l_s}x+N_s^{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}.\end{aligned}$$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

(3) integrovanie parciálnych zlomkov je potom už jednoduchou vecou:

(i) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \begin{cases} \ln(-x+a)+c, & x \in (-\infty, a) \\ \ln(x-a)+c, & x \in (a, +\infty) \end{cases};$$

(ii) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c \text{ pre } x \in (-\infty, a) \text{ alebo}$$
$x \in (a, +\infty)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(iii) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$$
pre $x \in \mathbb{R}$, kde $p^2 < 4q$;

(iv) $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{A}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} + c \text{ pre}$$
$x \in (-\infty, +\infty)$, kde $p^2 < 4q$ a $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

(3) integrovanie parciálnych zlomkov je potom už jednoduchou vecou:

(i) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \begin{cases} \ln(-x+a)+c, & x \in (-\infty, a) \\ \ln(x-a)+c, & x \in (a, +\infty) \end{cases};$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$ pre $x \in (-\infty, a)$ alebo $x \in (a, +\infty)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(iii) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$ pre $x \in \mathbb{R}$, kde $p^2 < 4q$;

(iv) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x =$ $\displaystyle\frac{A}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} + c$ pre $x \in (-\infty, +\infty)$, kde $p^2 < 4q$ a $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

(3) integrovanie parciálnych zlomkov je potom už jednoduchou vecou:

(i) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \begin{cases} \ln(-x+a)+c, & x \in (-\infty, a) \\ \ln(x-a)+c, & x \in (a, +\infty) \end{cases};$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$ pre $x \in (-\infty, a)$ alebo $x \in (a, +\infty)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(iii) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$ pre $x \in \mathbb{R}$, kde $p^2 < 4q$;

(iv) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} + c$ pre $x \in (-\infty, +\infty)$, kde $p^2 < 4q$ a $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(a) Integrovanie racionálnych funkcií

(3) integrovanie parciálnych zlomkov je potom už jednoduchou vecou:

(i) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \begin{cases} \ln(-x+a)+c, & x \in (-\infty, a) \\ \ln(x-a)+c, & x \in (a, +\infty) \end{cases};$$

(ii) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$$ pre $x \in (-\infty, a)$ alebo $x \in (a, +\infty)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(iii) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$$ pre $x \in \mathbb{R}$, kde $p^2 < 4q$;

(iv) $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} + c$$ pre $x \in (-\infty, +\infty)$, kde $p^2 < 4q$ a $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

(a) Integrovanie racionálnych funkcií – zhrnutie

> Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.
>
> Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Výsledok: integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Príklady: Nájdite neurčité integrály

(i) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x+1}\,\mathrm{d}x;$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^7}{1-x^4}\,\mathrm{d}x;$

(iii) $\displaystyle\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x;$

(iv) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x^2+2x+5)^3}\,\mathrm{d}x.$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií – zhrnutie

Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.

Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Výsledok: integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Príklady: Nájdite neurčité integrály

(i) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x+1}\,\mathrm{d}x;$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^7}{1-x^4}\,\mathrm{d}x;$

(iii) $\displaystyle\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x;$

(iv) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x^2+2x+5)^3}\,\mathrm{d}x.$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií – zhrnutie

> Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.
>
> Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Výsledok: integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Príklady: Nájdite neurčité integrály

(i) $$\int \frac{x^3-1}{x+1}\,\mathrm{d}x;$$

(ii) $$\int \frac{x^7}{1-x^4}\,\mathrm{d}x;$$

(iii) $$\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x;$$

(iv) $$\int \frac{3x+1}{(x^2+2x+5)^3}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Integrovanie racionálnych funkcií – zhrnutie

Problem 3: If X denotes an arbitrary rational function of x, describe a method by which the expression $X\,\mathrm{d}x$ can be integrated.

Euler: *Opera Omnia*, vol.XI, p. 28, 1768

Výsledok: integrál racionálnej funkcie je vždy elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú racionálnu funkciu

Príklady: Nájdite neurčité integrály

(i) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x+1}\,\mathrm{d}x;$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^7}{1-x^4}\,\mathrm{d}x;$

(iii) $\displaystyle\int \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x;$

(iv) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x^2+2x+5)^3}\,\mathrm{d}x.$