Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html

Prednáška 10

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

20. novembra 2023

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(I) Integrály typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) \mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $r_i = \frac{m_i}{n_i} \in \mathbb{Q}$, $m_i \in \mathbb{Z}$ a $n_i \in \mathbb{N}$ pre $i = 1, 2, \dots, k$

Záver: každý integrál typu (I) je elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú funkciu typu

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)$$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(I) Integrály typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) \mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $r_i = \frac{m_i}{n_i} \in \mathbb{Q}$, $m_i \in \mathbb{Z}$ a $n_i \in \mathbb{N}$ pre $i = 1, 2, \dots, k$

Záver: každý integrál typu (I) je elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú funkciu typu

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)$$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(I) Integrály typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) \mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $r_i = \frac{m_i}{n_i} \in \mathbb{Q}$, $m_i \in \mathbb{Z}$ a $n_i \in \mathbb{N}$ pre $i = 1, 2, \dots, k$

Záver: každý integrál typu (I) je elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú funkciu typu

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)$$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(I) Integrály typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) \mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $r_i = \frac{m_i}{n_i} \in \mathbb{Q}$, $m_i \in \mathbb{Z}$ a $n_i \in \mathbb{N}$ pre $i = 1, 2, \dots, k$

Záver: každý integrál typu (I) je elementárna funkcia, t.j. vieme integrovať ľubovoľnú funkciu typu

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)$$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(II) Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $ax^2+bx+c \geq 0$

(i) pre $a = 0$ je skúmaný integrál typu (I);

(ii) ak $b^2 - 4ac = 0$, potom $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$, a teda

✓ ak $a < 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)^2}$ má zmysel len pre $x = \alpha$;

✓ ak $a > 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$, čo je opäť integrál typu (I);

(iii) prípad $a < 0$ a $b^2 - 4ac < 0$ nie je definovaný;

(iv) ostáva vyšetriť prípad $a > 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(II) Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $ax^2+bx+c \geq 0$

(i) pre $a = 0$ je skúmaný integrál typu (I);

(ii) ak $b^2-4ac=0$, potom $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$, a teda

✓ ak $a<0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)^2}$ má zmysel len pre $x=\alpha$;

✓ ak $a>0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,|x-\alpha|$, čo je opäť integrál typu (I);

(iii) prípad $a<0$ a $b^2-4ac<0$ nie je definovaný;

(iv) ostáva vyšetriť prípad $a>0$ a $b^2-4ac\neq 0$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

> One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
> Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(II) Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $ax^2+bx+c \geq 0$

(i) pre $a = 0$ je skúmaný integrál typu (I);

(ii) ak $b^2 - 4ac = 0$, potom $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$, a teda

✓ ak $a < 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)^2}$ má zmysel len pre $x = \alpha$;

✓ ak $a > 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$, čo je opäť integrál typu (I);

(iii) prípad $a < 0$ a $b^2 - 4ac < 0$ nie je definovaný;

(iv) ostáva vyšetriť prípad $a > 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(II) Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $ax^2+bx+c \geq 0$

(i) pre $a = 0$ je skúmaný integrál typu (I);

(ii) ak $b^2 - 4ac = 0$, potom $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$, a teda

✓ ak $a < 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)^2}$ má zmysel len pre $x = \alpha$;

✓ ak $a > 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$, čo je opäť integrál typu (I);

(iii) prípad $a < 0$ a $b^2 - 4ac < 0$ nie je definovaný;

(iv) ostáva vyšetriť prípad $a > 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(II) Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $ax^2+bx+c \geq 0$

(i) pre $a = 0$ je skúmaný integrál typu (I);

(ii) ak $b^2 - 4ac = 0$, potom $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$, a teda

✓ ak $a < 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)^2}$ má zmysel len pre $x = \alpha$;

✓ ak $a > 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$, čo je opäť integrál typu (I);

(iii) prípad $a < 0$ a $b^2 - 4ac < 0$ nie je definovaný;

(iv) ostáva vyšetriť prípad $a > 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(II) Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $ax^2+bx+c \geq 0$

(i) pre $a = 0$ je skúmaný integrál typu (I);

(ii) ak $b^2 - 4ac = 0$, potom $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$, a teda

✓ ak $a < 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)^2}$ má zmysel len pre $x = \alpha$;

✓ ak $a > 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$, čo je opäť integrál typu (I);

(iii) prípad $a < 0$ a $b^2 - 4ac < 0$ nie je definovaný;

(iv) ostáva vyšetriť prípad $a > 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

One easily convinces oneself by our method that the integral $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ ... is impossible in finite form ...
Liouville: *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, p. 113, 1835

Cieľ: naučiť sa integrovať niektoré typy integrálov obsahujúcich odmocniny

Označenie: v nasledujúcom R označuje racionálnu funkciu dvoch alebo viacerých premenných

(II) Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $ax^2+bx+c \geq 0$

(i) pre $a = 0$ je skúmaný integrál typu (I);

(ii) ak $b^2 - 4ac = 0$, potom $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$, a teda

✓ ak $a < 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)^2}$ má zmysel len pre $x = \alpha$;

✓ ak $a > 0$, tak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$, čo je opäť integrál typu (I);

(iii) prípad $a < 0$ a $b^2 - 4ac < 0$ nie je definovaný;

(iv) ostáva vyšetriť prípad $a > 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

Ostrogradského metóda (tzv. neurčitých koeficientov)

Nech $a, b, c \in \mathbb{R}$ také, že $ax^2 + bx + c > 0$ a P_n je polynóm n-tého stupňa. Potom existuje polynóm Q_{n-1} a $K \in \mathbb{R}$ také, že

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

✠ Metódy výpočtu zostávajúceho integrálu $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$:

(i) úpravou na arkusínus, t.j. na integrál $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$;

(ii) úpravou na argument (ko)sínusu hyperbolického, t.j. $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 \pm \alpha^2}}$;

(iii) prevedenie na integrál z goniometrických funkcií (čoskoro);

(iv) Eulerove substitúcie – použiteľné vždy (o chvíľu);

(v) iné podľa tvaru kvadratického trojčlena (per partes, rozšírenie združeným výrazom a pod.)

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

Ostrogradského metóda (tzv. neurčitých koeficientov)

Nech $a, b, c \in \mathbb{R}$ také, že $ax^2 + bx + c > 0$ a P_n je polynóm n-tého stupňa. Potom existuje polynóm Q_{n-1} a $K \in \mathbb{R}$ také, že

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + K \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

✠ Metódy výpočtu zostávajúceho integrálu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$:

(i) úpravou na arkusínus, t.j. na integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}}$;

(ii) úpravou na argument (ko)sínusu hyperbolického, t.j. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 \pm \alpha^2}}$;

(iii) prevedenie na integrál z goniometrických funkcií (čoskoro);

(iv) Eulerove substitúcie – použiteľné vždy (o chvíľu);

(v) iné podľa tvaru kvadratického trojčlena (per partes, rozšírenie združeným výrazom a pod.)

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

The King calls me "my Professor", and I am the happiest man in the world!

Eulerova hrdá hláška k pôsobeniu ako učiteľa Fredericka II v Berlíne

Eulerove substitúcie (1768): $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $a \neq 0$ a $b^2-4ac \neq 0$

(i) 1. Eulerova substitúcia: ak $a > 0$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t;$$

(ii) 2. Eulerova substitúcia: ak $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\beta);$$

(iii) 3. Eulerova substitúcia: ak $c > 0$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

Geometrická interpretácia: krivka druhého rádu $y^2 = ax^2+bx+c$ má parametrické vyjadrenie v tvare racionálnych funkcií, pozri

http://www.nmk.fpv.ukf.sk/2012/proceedings/8_Klepancova_Varga.pdf

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

The King calls me "my Professor", and I am the happiest man in the world!

Eulerova hrdá hláška k pôsobeniu ako učitel'a Fredericka II v Berlíne

Eulerove substitúcie (1768): $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(i) 1. Eulerova substitúcia: ak $a > 0$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t;$$

(ii) 2. Eulerova substitúcia: ak $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\beta);$$

(iii) 3. Eulerova substitúcia: ak $c > 0$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

Geometrická interpretácia: krivka druhého rádu $y^2 = ax^2+bx+c$ má parametrické vyjadrenie v tvare racionálnych funkcií, pozri

http://www.nmk.fpv.ukf.sk/2012/proceedings/8_Klepancova_Varga.pdf

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

The King calls me "my Professor", and I am the happiest man in the world!

Eulerova hrdá hláška k pôsobeniu ako učiteľa Fredericka II v Berlíne

Eulerove substitúcie (1768): $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(i) 1. Eulerova substitúcia: ak $a > 0$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t;$$

(ii) 2. Eulerova substitúcia: ak $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\beta);$$

(iii) 3. Eulerova substitúcia: ak $c > 0$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

Geometrická interpretácia: krivka druhého rádu $y^2 = ax^2+bx+c$ má parametrické vyjadrenie v tvare racionálnych funkcií, pozri

http://www.nmk.fpv.ukf.sk/2012/proceedings/8_Klepancova_Varga.pdf

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií

The King calls me "my Professor", and I am the happiest man in the world!

Eulerova hrdá hláška k pôsobeniu ako učiteľa Fredericka II v Berlíne

Eulerove substitúcie (1768): $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$, kde $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$

(i) 1. Eulerova substitúcia: ak $a > 0$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t;$$

(ii) 2. Eulerova substitúcia: ak $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\beta);$$

(iii) 3. Eulerova substitúcia: ak $c > 0$, tak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

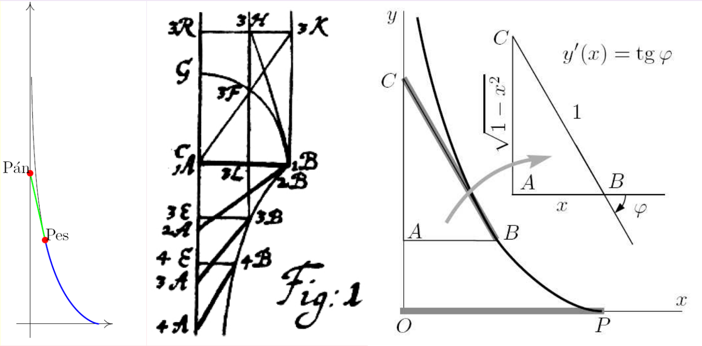
Geometrická interpretácia: krivka druhého rádu $y^2 = ax^2+bx+c$ má parametrické vyjadrenie v tvare racionálnych funkcií, pozri

`http://www.nmk.fpv.ukf.sk/2012/proceedings/8_Klepancova_Varga.pdf`

(b) Integrovanie niektorých iracionálnych funkcií – aplikácia

> The distinguished Parisian physician Claude Perrault, equally famous for his work in mechanics and in architecture, well known for his edition of Vitruvius, and in his lifetime an important member of the Royal French Academy of Science, proposed this problem to me and to many others before me, readily admitting that he had not been able to solve it...
>
> Leibniz (1693)

Aká je trajektória objektu, ktorý štartuje napravo od iného objektu pohybujúceho sa kolmo smerom hore a ťahajúceho tento objekt za sebou na strune pevnej dĺžky?

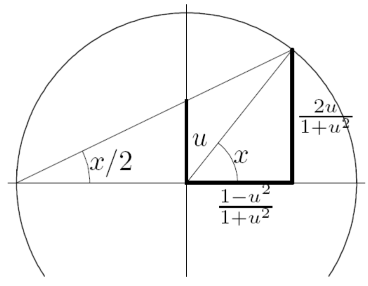


✠ detaily výpočtu pozri `http://user.mendelu.cz/marik/wiki/aplikace/tahnuti.pdf`

(c) Integrovanie goniometrických funkcií

(I) Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

– **univerzálna substitúcia** (Euler, 1768): $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$ pre $x \in (-\pi, \pi)$



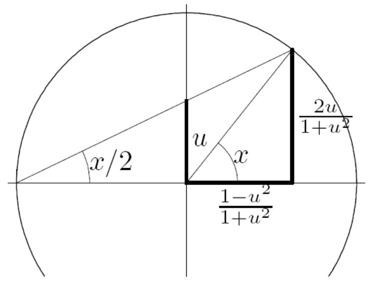
– **súvis s teóriou čísel**: trojice (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), ..., vyhovujú rovnici $a^2 + b^2 = c^2$ a sú tvaru $\left(u, \frac{u^2-1}{2}, \frac{u^2+1}{2}\right)$

Príklad: Vypočítajte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x(\cos x + \sin x + 1)}$.

(c) Integrovanie goniometrických funkcií

(I) Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

– **univerzálna substitúcia** (Euler, 1768): $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ pre $x \in (-\pi, \pi)$



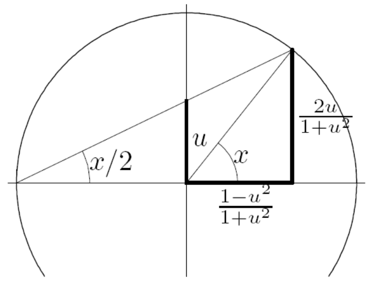
– **súvis s teóriou čísel**: trojice (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), . . . , vyhovujú rovnici $a^2 + b^2 = c^2$ a sú tvaru $\left(u, \frac{u^2-1}{2}, \frac{u^2+1}{2}\right)$

Príklad: Vypočítajte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x(\cos x + \sin x + 1)}$.

(c) Integrovanie goniometrických funkcií

(I) Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$

– **univerzálna substitúcia** (Euler, 1768): $\mathrm{tg}\, \frac{x}{2} = u$ pre $x \in (-\pi, \pi)$



– **súvis s teóriou čísel**: trojice (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), . . . , vyhovujú rovnici $a^2 + b^2 = c^2$ a sú tvaru $\left(u, \frac{u^2-1}{2}, \frac{u^2+1}{2}\right)$

Príklad: Vypočítajte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x\, \mathrm{d}x}{\sin x(\cos x + \sin x + 1)}$.

(c) Integrovanie goniometrických funkcií

(I) Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$

– niektoré (**za istých okolností**) vhodnejšie substitúcie:

(a) ak $R(u, -v) = -R(u, v)$, tak $\sin x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \cos^2 x = 1 - t^2$$

(b) ak $R(-u, v) = -R(u, v)$, tak $\cos x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \sin^2 x = 1 - t^2$$

(c) ak $R(-u, -v) = R(u, v)$, tak $\mathrm{tg}\, x = t$ pre $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a preto

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

alebo tiež $\mathrm{cotg}\, x = t$ pre $x \in (0, \pi)$, kde

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Príklad: Vypočítajte neurčitý integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$.

(c) Integrovanie goniometrických funkcií

(I) Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

– niektoré (**za istých okolností**) vhodnejšie substitúcie:

(a) ak $R(u,-v) = -R(u,v)$, tak $\sin x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \cos^2 x = 1 - t^2$$

(b) ak $R(-u,v) = -R(u,v)$, tak $\cos x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \sin^2 x = 1 - t^2$$

(c) ak $R(-u,-v) = R(u,v)$, tak $\operatorname{tg} x = t$ pre $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a preto

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

alebo tiež $\operatorname{cotg} x = t$ pre $x \in (0, \pi)$, kde

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Príklad: Vypočítajte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$.

(c) Integrovanie goniometrických funkcií

(I) Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

– niektoré (**za istých okolností**) vhodnejšie substitúcie:

(a) ak $R(u,-v) = -R(u,v)$, tak $\sin x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \cos^2 x = 1 - t^2$$

(b) ak $R(-u,v) = -R(u,v)$, tak $\cos x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \sin^2 x = 1 - t^2$$

(c) ak $R(-u,-v) = R(u,v)$, tak $\operatorname{tg} x = t$ pre $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a preto

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

alebo tiež $\operatorname{cotg} x = t$ pre $x \in (0, \pi)$, kde

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Príklad: Vypočítajte neurčitý integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$.

(c) Integrovanie goniometrických funkcií

(I) Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

– niektoré (**za istých okolností**) vhodnejšie substitúcie:

(a) ak $R(u, -v) = -R(u, v)$, tak $\sin x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \cos^2 x = 1 - t^2$$

(b) ak $R(-u, v) = -R(u, v)$, tak $\cos x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \sin^2 x = 1 - t^2$$

(c) ak $R(-u, -v) = R(u, v)$, tak $\operatorname{tg} x = t$ pre $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a preto

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

alebo tiež $\operatorname{cotg} x = t$ pre $x \in (0, \pi)$, kde

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Príklad: Vypočítajte neurčitý integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$.

(c) Integrovanie goniometrických funkcií

(I) Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$

– niektoré (**za istých okolností**) vhodnejšie substitúcie:

(a) ak $R(u,-v) = -R(u,v)$, tak $\sin x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = \cos x\, \mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \cos^2 x = 1 - t^2$$

(b) ak $R(-u,v) = -R(u,v)$, tak $\cos x = t$, a preto

$$\mathrm{d}t = -\sin x\, \mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \sin^2 x = 1 - t^2$$

(c) ak $R(-u,-v) = R(u,v)$, tak $\operatorname{tg} x = t$ pre $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a preto

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

alebo tiež $\operatorname{cotg} x = t$ pre $x \in (0, \pi)$, kde

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Príklad: Vypočítajte neurčitý integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$.