Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html

Prednáška 11

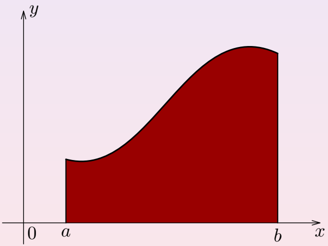
Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

27. novembra 2023

> All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.
>
> Newton o svojom *Annus mirabilis*

Načo sme venovali toľko času hľadaniu anti-derivácie?

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, chceme určiť plochu "krivočiareho lichobežníka" ohraničeného osou x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f.

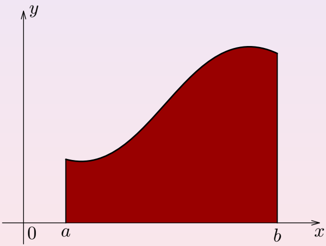


Jedna cesta je použiť tzv. exhaustačnú metódu: "vyčerpať" plochu. Spresnením tejto myšlienky vznikol **Riemannov určitý integrál**.

> All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.
>
> Newton o svojom *Annus mirabilis*

Načo sme venovali toľko času hľadaniu anti-derivácie?

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$, chceme určiť plochu "krivočiareho lichobežníka" ohraničeného osou x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f.

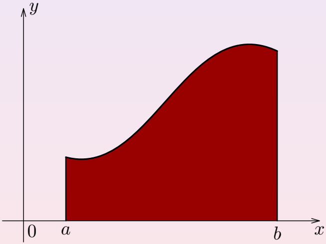


Jedna cesta je použiť tzv. exhaustačnú metódu: "vyčerpať" plochu. Spresnením tejto myšlienky vznikol **Riemannov určitý integrál**.

> All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.
>
> Newton o svojom *Annus mirabilis*

Načo sme venovali toľko času hľadaniu anti-derivácie?

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, chceme určiť plochu "krivočiareho lichobežníka" ohraničeného osou x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom funkcie f.

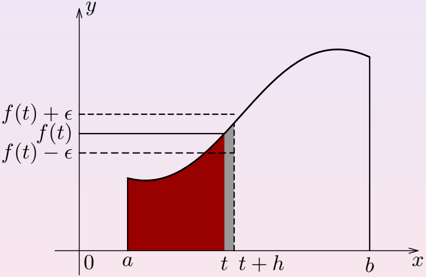


Jedna cesta je použiť tzv. exhaustačnú metódu: "vyčerpať" plochu. Spresnením tejto myšlienky vznikol **Riemannov určitý integrál**.

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in< a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru $\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

ak x vzrastie z t na $t+h$, (malé $h > 0$) zmení sa obsah o... $P(t+h) - P(t)$

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v bode t..$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

$(t < x < t + \delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$

pre $h < \delta$

$$h(f(t) - \epsilon) < P(t+h) - P(t) < h(f(t) + \epsilon)$$

$$\left|\frac{P(t+h)-P(t)}{h} - f(t)\right| < \epsilon \quad \text{t.j.} \ \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = f(t)$$

$$P'(t) = f(t),\ t \in< a, b)$$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

Nous désignons en général par le signe $\int_b^a$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complete lorsque la variable équivaut à b...

Fourier: *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Newtonov určitý integrál

Definícia - Newtonov integrál

Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, $\langle a, b\rangle \subset I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Číslo $F(b) - F(a)$ nazývame Newtonov určitý integrál (skrátene $\mathscr{N}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak existuje $\mathscr{N}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia f je Newtonovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{N}$-integrovateľná) na intervale $\langle a, b\rangle$. Množinu všetkých $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{N}\langle a, b\rangle$.

Otázka: Ale veď primitívnych funkcií k f na (a, b) môže existovať veľmi veľa, závisí výsledok na jej voľbe?

Odpoveď: Ak $G(x) = F(x) + c$, tak

$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Nous désignons en général par le signe $\int_b^a$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complete lorsque la variable équivaut à b...

Fourier: *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Newtonov určitý integrál

Definícia - Newtonov integrál

Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, $\langle a, b\rangle \subset I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Číslo $F(b) - F(a)$ nazývame Newtonov určitý integrál (skrátene $\mathscr{N}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak existuje $\mathscr{N}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia f je Newtonovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{N}$-integrovateľná) na intervale $\langle a, b\rangle$. Množinu všetkých $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{N}\langle a, b\rangle$.

Otázka: Ale veď primitívnych funkcií k f na (a, b) môže existovať veľmi veľa, závisí výsledok na jej voľbe?

Odpoveď: Ak $G(x) = F(x) + c$, tak

$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Nous désignons en général par le signe $\int_b^a$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complete lorsque la variable équivaut à b...

Fourier: *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Newtonov určitý integrál

Definícia - Newtonov integrál

Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, $\langle a, b\rangle \subset I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Číslo $F(b) - F(a)$ nazývame Newtonov určitý integrál (skrátene $\mathcal{N}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak existuje $\mathcal{N}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia f je Newtonovsky integrovateľná (skrátene $\mathcal{N}$-integrovateľná) na intervale $\langle a, b\rangle$. Množinu všetkých $\mathcal{N}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathcal{N}\langle a, b\rangle$.

Otázka: Ale veď primitívnych funkcií k f na (a, b) môže existovať veľmi veľa, závisí výsledok na jej voľbe?

Odpoveď: Ak $G(x) = F(x) + c$, tak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Nous désignons en général par le signe $\int_b^a$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complete lorsque la variable équivaut à b...

Fourier: *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Newtonov určitý integrál

Definícia - Newtonov integrál

Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, $\langle a, b\rangle \subset I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Číslo $F(b) - F(a)$ nazývame Newtonov určitý integrál (skrátene $\mathscr{N}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak existuje $\mathscr{N}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia f je Newtonovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{N}$-integrovateľná) na intervale $\langle a, b\rangle$. Množinu všetkých $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{N}\langle a, b\rangle$.

Otázka: Ale veď primitívnych funkcií k f na (a, b) môže existovať veľmi veľa, závisí výsledok na jej voľbe?

Odpoveď: Ak $G(x) = F(x) + c$, tak

$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

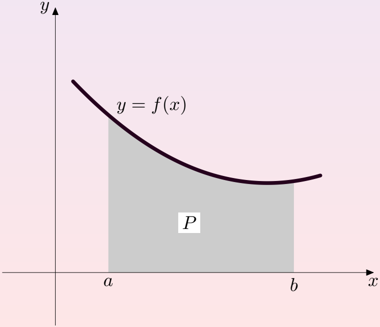
Nous désignons en général par le signe $\int_b^a$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complete lorsque la variable équivaut à b...

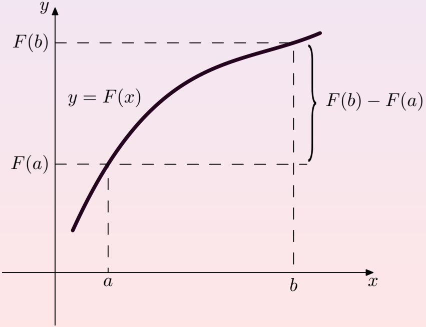
Fourier: *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Geometrická interpretácia $\mathcal{N}$-integrálu:

Hodnota Newtonovho určitého integrálu $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sa rovná hodnote prírastku primitívnej funkce $F(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$.





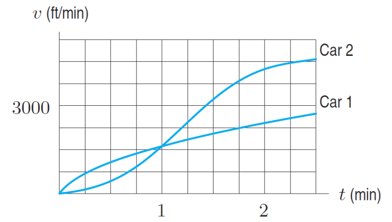
Fyzikálna interpretácia $\mathscr{N}$-integrálu:

$$(\mathscr{N})\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

– keďže hodnota $F'(x) = f(x)$ predstavuje rýchlosť zmeny funkcie F v bode x, Newtonov integrál $(\mathscr{N})\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x$ predstavuje celkovú zmenu funkcie F medzi $x = a$ a $x = b$, t.j.

Newtonov integrál rýchlosti zmeny funkcie F dáva celkovú zmenu funkcie F

Úloha: Dve autá stoja na križovatke. Po zasvietení zelenej zrýchľujú niekoľko minút. Obrázok znázorňuje zmenu ich rýchlostí v čase.
(a) Ktoré auto vedie po 1 minúte?
(b) Ktoré auto vedie po 2 minútach?



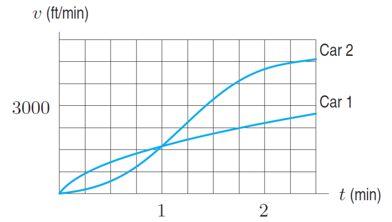
Fyzikálna interpretácia $\mathscr{N}$-integrálu:

$$(\mathscr{N})\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

– keďže hodnota $F'(x) = f(x)$ predstavuje rýchlosť zmeny funkcie F v bode x, Newtonov integrál $(\mathscr{N})\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x$ predstavuje celkovú zmenu funkcie F medzi $x = a$ a $x = b$, t.j.

Newtonov integrál rýchlosti zmeny funkcie F dáva celkovú zmenu funkcie F

Úloha: Dve autá stoja na križovatke. Po zasvietení zelenej zrýchľujú niekoľko minút. Obrázok znázorňuje zmenu ich rýchlostí v čase.
(a) Ktoré auto vedie po 1 minúte?
(b) Ktoré auto vedie po 2 minútach?



$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Veta (základné vlastnosti $\mathscr{N}$-integrálu)

Nech $I \subset \mathbb{R}$, $a, b, c \in I$ a f, g majú primitívne funkcie na I. Potom

(i) $(\mathscr{N}) \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ a $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathscr{N}) \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) ak $\alpha \in \mathbb{R}$, tak $(\mathscr{N}) \int_a^b \alpha\,\mathrm{d}x = \alpha(b - a)$;

(iii) ak $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tak

$$(\mathscr{N}) \int_a^b (\alpha_1 f(x) \pm \alpha_2 g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha_1 (\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \alpha_2 (\mathscr{N}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

(iv) $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N}) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{N}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Veta (o monotónnosti $\mathcal{N}$-integrálu)

Nech $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in I$, $a < b$ a f, g majú primitívne funkcie na I. Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$, potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôsledok

Nech $I \subset \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in I$ také, že $a \leq b \leq c \leq d$. Ak f má primitívnu funkciu na I a pre každé $x \in \langle a, d\rangle$ je $f(x) \geq 0$, potom $(\mathcal{N})\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ a

$$(\mathcal{N})\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{N})\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Veta (o monotónnosti $\mathcal{N}$-integrálu)

Nech $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in I$, $a < b$ a f, g majú primitívne funkcie na I. Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$, potom

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathcal{N}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôsledok

Nech $I \subset \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in I$ také, že $a \leq b \leq c \leq d$. Ak f má primitívnu funkciu na I a pre každé $x \in \langle a, d\rangle$ je $f(x) \geq 0$, potom $(\mathcal{N}) \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ a

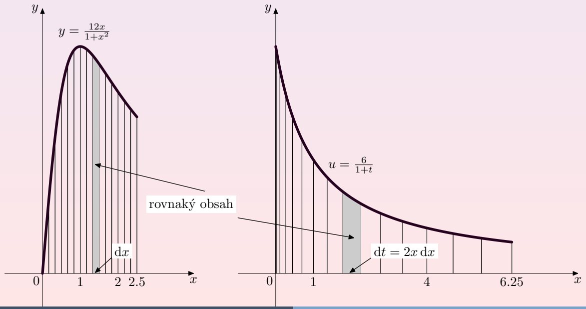
$$(\mathcal{N}) \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{N}) \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Veta (substitučná metóda pre $\mathscr{N}$-integrál)

Nech g je diferencovateľná na I a $g(x) \in J \subset \mathbb{R}$ pre každé $x \in I$. Ak f má primitívnu funkciu na J a $a, b \in I$, potom

$$(\mathscr{N})\int_a^b (f \circ g)(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Veta (substitučná metóda pre $\mathcal{N}$-integrál)

Nech g je diferencovateľná na I a $g(x) \in J \subset \mathbb{R}$ pre každé $x \in I$. Ak f má primitívnu funkciu na J a $a, b \in I$, potom

$$(\mathcal{N}) \int_a^b (f \circ g)(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Veta (metóda per partes pre $\mathcal{N}$-integrál)

Nech u, v sú diferencovateľné na $I \subset \mathbb{R}$ a $u'v$ má primitívnu funkciu na I. Ak $a, b \in I$, potom

$$(\mathcal{N}) \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - (\mathcal{N}) \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zopár poznámok k $\mathcal{N}$-integrálu:

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

kde F je primitívna funkcia k f na intervale $\langle a, b\rangle$

- hoci teoreticky vieme, že mnoho funkcií má primitívnu funkciu, nemusí byť jednoduché túto primitívnu funkciu nájsť, napr. $(\mathcal{N}) \int_2^5 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = ?$
- $(\mathcal{N}) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje – primitívna funkcia k sgn na $\langle -1, 1\rangle$ neexistuje (zatiaľ nevieme prečo), ale akosi sa núka povedať, že „obsah pod jej grafom" je 0!!!

isté riešenie: zovšeobecnená primitívna funkcia F k f na I: $(\forall x \in I \setminus M)\ F'(x) = f(x)$, kde $M \subset I$ je konečná množina a F je spojitá funkcia na I

Zopár poznámok k $\mathscr{N}$-integrálu:

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

kde F je primitívna funkcia k f na intervale $\langle a, b\rangle$

- hoci teoreticky vieme, že mnoho funkcií má primitívnu funkciu, nemusí byť jednoduché túto primitívnu funkciu nájsť, napr. $$(\mathscr{N})\int_2^5 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = ?$$
- $(\mathscr{N})\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje – primitívna funkcia k sgn na $\langle -1, 1\rangle$ neexistuje (zatiaľ nevieme prečo), ale akosi sa núka povedať, že „obsah pod jej grafom" je 0!!!

  isté riešenie: zovšeobecnená primitívna funkcia F k f na I: $(\forall x \in I \setminus M)\ F'(x) = f(x)$, kde $M \subset I$ je konečná množina a F je spojitá funkcia na I

Zopár poznámok k $\mathscr{N}$-integrálu:

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

kde F je primitívna funkcia k f na intervale $\langle a, b\rangle$

- hoci teoreticky vieme, že mnoho funkcií má primitívnu funkciu, nemusí byť jednoduché túto primitívnu funkciu nájsť, napr. $(\mathscr{N})\int_2^5 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = ?$
- $(\mathscr{N})\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje – primitívna funkcia k sgn na $\langle -1, 1\rangle$ neexistuje (zatiaľ nevieme prečo), ale akosi sa núka povedať, že „obsah pod jej grafom“ je 0!!!

isté riešenie: zovšeobecnená primitívna funkcia F k f na I: $(\forall x \in I \setminus M)\ F'(x) = f(x)$, kde $M \subset I$ je konečná množina a F je spojitá funkcia na I

Zopár poznámok k $\mathscr{N}$-integrálu:

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

kde F je primitívna funkcia k f na intervale $\langle a, b\rangle$

- hoci teoreticky vieme, že mnoho funkcií má primitívnu funkciu, nemusí byť jednoduché túto primitívnu funkciu nájsť, napr. $(\mathscr{N})\displaystyle\int_2^5 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = ?$
- $(\mathscr{N})\displaystyle\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje – primitívna funkcia k sgn na $\langle -1, 1\rangle$ neexistuje (zatiaľ nevieme prečo), ale akosi sa núka povedať, že „obsah pod jej grafom“ je 0!!!

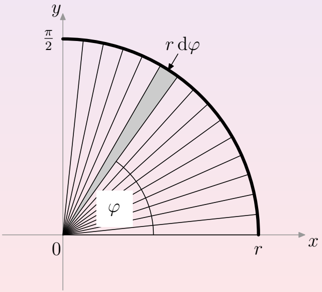
  isté riešenie: zovšeobecnená primitívna funkcia F k f na I: $(\forall x \in I \setminus M)\ F'(x) = f(x)$, kde $M \subset I$ je konečná množina a F je spojitá funkcia na I

Zopár poznámok k $\mathscr{N}$-integrálu:

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

kde F je primitívna funkcia k f na intervale $\langle a, b\rangle$

- pri zrode diferenciálneho a integrálneho počtu stáli infinitezimálne úvahy – čo si má človek predstaviť pod výrazom $\mathrm{d}x$ v Newtonovom integráli $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$???



Ďalší vývoj v oblasti integrálu však išiel trochu iným smerom...