Funkcia reálnej premennej

(prezentácia k prednáške FRPa/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

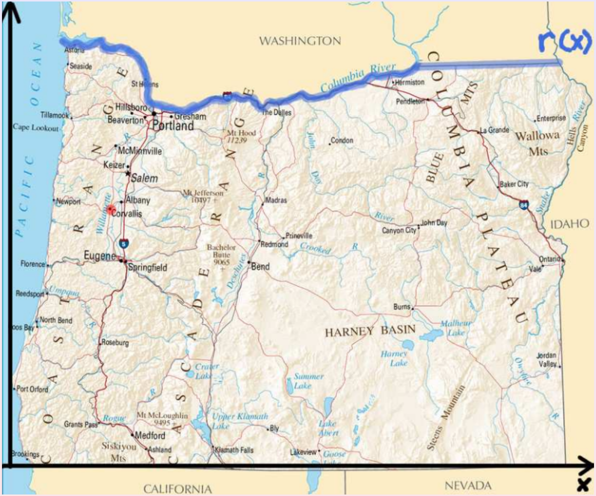
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/FRPa.html

Prednáška 12

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.

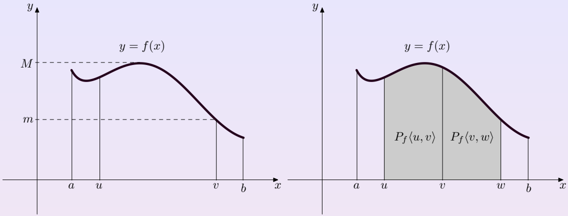
4. decembra 2023

Geometrické a iné aplikácie určitého integrálu



Integrál (časti) rieky *Columbia River* je rovný Oregonu, oblasti pod riekou.

Plošný obsah rovinného útvaru



Veta (o ploche pod grafom)

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

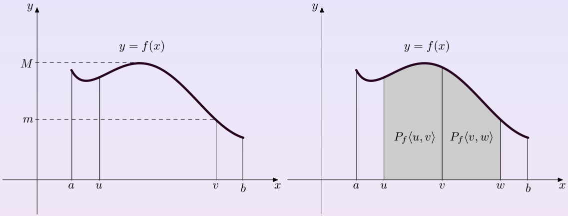
$$P_f\langle a, b\rangle = (\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôsledok (o ploche medzi dvoma grafmi)

Ak $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom plošný obsah $P_{f,g}$ útvaru ohraničeného grafmi funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ je

$$P_{f,g}\langle a, b\rangle = (\mathscr{N}) \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Plošný obsah rovinného útvaru



Veta (o ploche pod grafom)

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

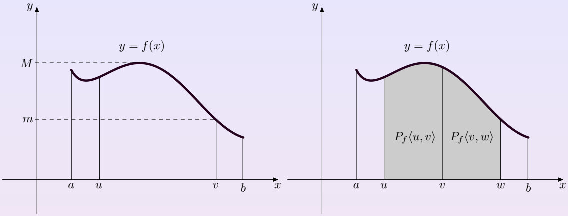
$$P_f\langle a, b\rangle = (\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôsledok (o ploche medzi dvoma grafmi)

Ak $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom plošný obsah $P_{f,g}$ útvaru ohraničeného grafmi funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ je

$$P_{f,g}\langle a, b\rangle = (\mathscr{N}) \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Plošný obsah rovinného útvaru



Veta (o ploche pod grafom)

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

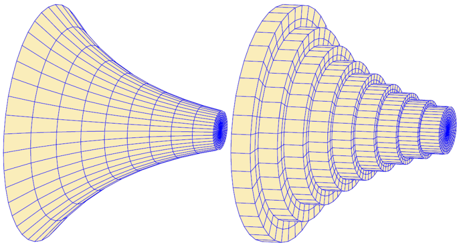
$$P_f\langle a, b\rangle = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôsledok (o ploche medzi dvoma grafmi)

Ak $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom plošný obsah $P_{f,g}$ útvaru ohraničeného grafmi funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ je

$$P_{f,g}\langle a, b\rangle = (\mathcal{N})\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa



Veta (o objeme rotačného telesa)

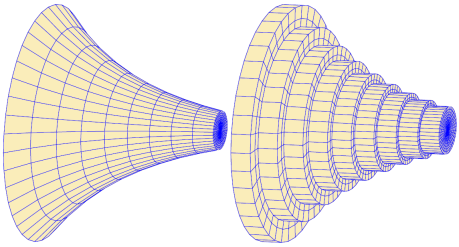
Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom objem V_f rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ je

$$V_f\langle a, b\rangle = \pi \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: pre objem $\widetilde{V}_f$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafom nezápornej spojitej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{V}_f\langle a, b\rangle = \pi \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Objem rotačného telesa



Veta (o objeme rotačného telesa)

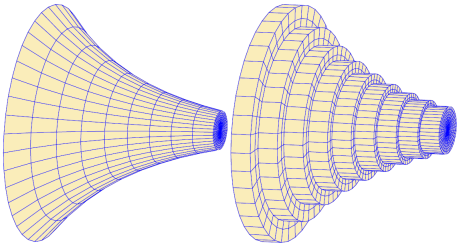
Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom objem V_f rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ je

$$V_f\langle a, b\rangle = \pi \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: pre objem $\widetilde{V}_f$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafom nezápornej spojitej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{V}_f\langle a, b\rangle = \pi \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Objem rotačného telesa



Dôsledok (o objeme rotačného telesa medzi grafmi dvoch funkcií)

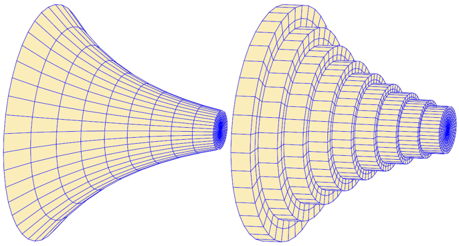
Ak $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom objem $V_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi nezáporných funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je

$$V_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: pre objem $\widetilde{V}_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi nezáporných spojitých funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{V}_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b x(g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa



Dôsledok (o objeme rotačného telesa medzi grafmi dvoch funkcií)

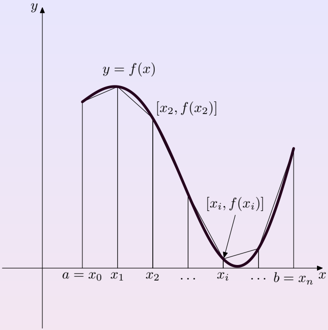
Ak $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom objem $V_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi nezáporných funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je

$$V_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: pre objem $\widetilde{V}_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi nezáporných spojitých funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{V}_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b x(g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Dĺžka rovinnej krivky

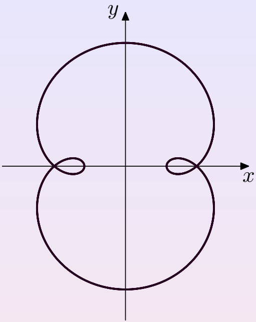


Veta (o dĺžke krivky určenej grafom funkcie)

Nech f má spojitú deriváciu na $\langle a, b\rangle$. Potom

$$L_f\langle a, b\rangle = (\mathcal{N}) \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Dĺžka rovinnej krivky

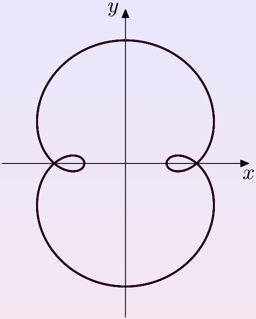


Definícia (parametricky zadaná krivka)

Množinu bodov $[x, y]$ nazývame parametricky danou rovinnou krivkou C, akk $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde φ a ψ sú spojité funkcie definované na intervale $\langle\alpha, \beta\rangle$ majúce spojité derivácie φ' a ψ' na $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Príklad: Nefroida na obrázku má rovnice $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$ pre $a > 0$ a $t \in \mathbb{R}$

Dĺžka rovinnej krivky

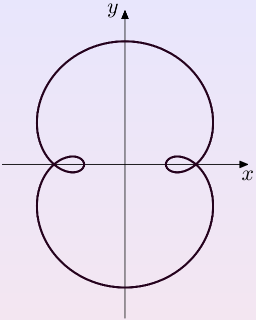


Definícia (parametricky zadaná krivka)

Množinu bodov $[x, y]$ nazývame parametricky danou rovinnou krivkou C, akk $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde φ a ψ sú spojité funkcie definované na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ majúce spojité derivácie φ' a ψ' na $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Príklad: Nefroida na obrázku má rovnice $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$ pre $a > 0$ a $t \in \mathbb{R}$

Dĺžka rovinnej krivky

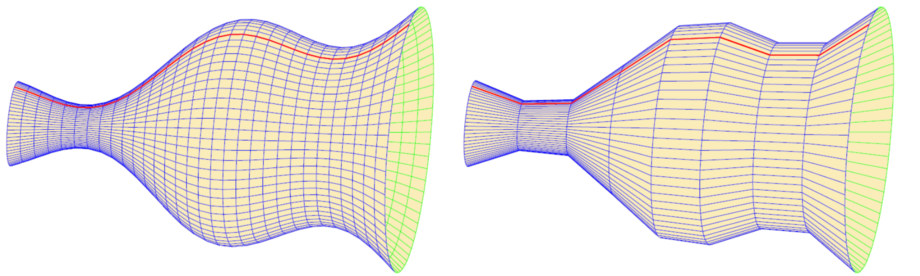


Veta (o dĺžke parametricky zadanej krivky)

Nech C je parametricky zadaná rovinná krivka rovnicami $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, kde φ a ψ majú na $\langle\alpha, \beta\rangle$ spojité derivácie φ' a ψ'. Potom

$$L_C\langle\alpha, \beta\rangle = (\mathcal{N}) \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Plošný obsah rotačnej plochy



Veta (o povrchu rotačného telesa I)

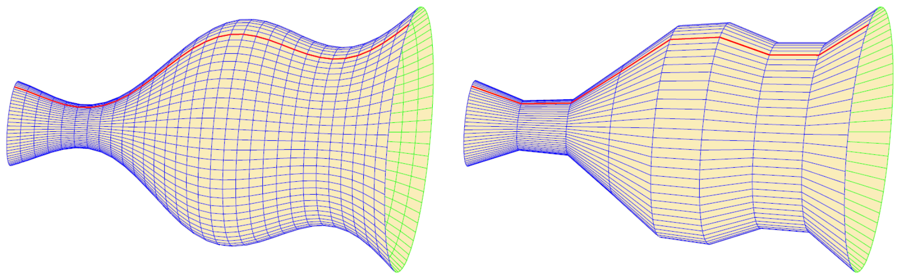
Plošný obsah S_f rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je daný

$$S_f\langle a,b\rangle = 2\pi\,(\mathcal{N})\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: pre plošný obsah $\widetilde{S}_f$ rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{S}_f\langle a,b\rangle = 2\pi\,(\mathcal{N})\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Plošný obsah rotačnej plochy



Veta (o povrchu rotačného telesa I)

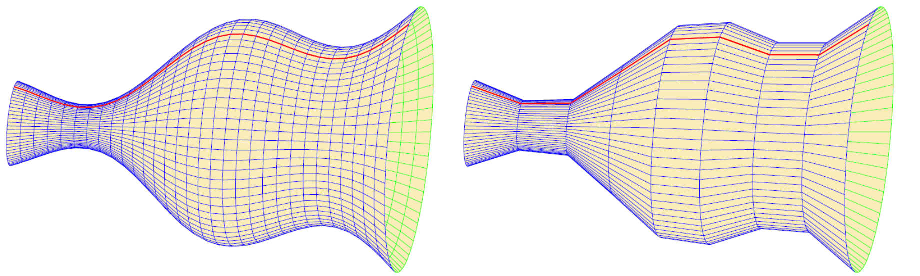
Plošný obsah S_f rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je daný

$$S_f\langle a, b\rangle = 2\pi\,(\mathcal{N})\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: pre plošný obsah $\widetilde{S}_f$ rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{S}_f\langle a, b\rangle = 2\pi\,(\mathcal{N})\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Plošný obsah rotačnej plochy



Veta (o povrchu rotačného telesa II)

Nech C je parametricky zadaná rovinná krivka rovnicami $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde φ a ψ majú na $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivácie φ' a ψ'. Potom

$$S_C\langle \alpha, \beta \rangle = 2\pi \, (\mathscr{N}) \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \, \mathrm{d}t.$$

Ďalšie aplikácie – ukážky

Veta (hmota a ťažisko krivky)

Nech C je parametricky zadaná rovinná krivka rovnicami $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde φ a ψ majú na $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivácie φ' a ψ'. Nech ρ je spojitá nezáporná funkcia na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom

$$M_C\langle \alpha, \beta \rangle = (\mathcal{N}) \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Naviac, ťažisko T krivky má súradnice $T = \left[\frac{S_C^{(y)}}{M_C}, \frac{S_C^{(x)}}{M_C}\right]$, kde

$$S_C^{(x)} = (\mathcal{N}) \int_\alpha^\beta \psi(t)\rho(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t,$$

$$S_C^{(y)} = (\mathcal{N}) \int_\alpha^\beta \varphi(t)\rho(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Ďalšie aplikácie – ukážky

Veta (hmota a ťažisko rovinného telesa)

Nech f, g, ρ sú spojité funkcie na $\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$. Potom hmota telesa

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

s povrchovou hustotou ρ je

$$M_B = (\mathcal{N}) \int_a^b \rho(x)(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Naviac, jeho ťažisko T má súradnice $T = \left[\frac{S_B^{(y)}}{M_B}, \frac{S_B^{(x)}}{M_B}\right]$, kde

$$S_B^{(x)} = \frac{1}{2}(\mathcal{N}) \int_a^b \rho(x)(f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$S_B^{(y)} = (\mathcal{N}) \int_a^b x\rho(x)(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$