Séria úloh 1A: Logika

Úloha 1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich viet (výrazov) sú výroky. V prípade výroku rozhodnite, či je pravdivý alebo nepravdivý.

a) Sedem je nepárne číslo.

b) Táto veta je nepravdivá.

c) $x^3 + x^2 + 2x = 0$

d) $(\forall x)\ x^3 + x^2 + 2x = 0$

e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 2$

f) Zloženie dvoch párnych funkcií je párna funkcia.

g) Kiež by som sa nikdy neprihlásil na tento kurz!

h) Ak 6 je párne alebo 4 je nepárne, tak 6 je prvočíslo.

i) Množina racionálnych čísel nie je ohraničená.

j) Naozaj som sa včera učil.

k) $15 = 16 \Leftrightarrow 2$ delí 3

l) Ak je Slovensko malá krajina, tak $12 = 3 \cdot 4$.

Úloha 2. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich výrokov.

a) $(\exists x \in \mathbb{R})\ \frac{x}{x} = 1$

b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \frac{x}{x} = 1$

c) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})\ \ x + y = z$

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\ \ x + y = z$

e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 1$

Úloha 3. Zapíšte matematickou formulou.

a) Existuje najmenšie celé číslo.

b) Každá hodnota funkcie f prvku z množiny A je väčšia ako 5.

c) Existuje kladné reálne číslo, ktorého funkčná hodnota (funkcie g) je väčšia ako 0 a súčasne menšia alebo rovná ako 1.

d) Funkcia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ je ohraničená.

e) Ak súčin čísla dva s číslom päť je jedenásť, tak ich súčet je dvanásť.

f) Každé prirodzené číslo je prvočíslo alebo zložené číslo.

g) Ku každému reálnemu číslu existuje také reálne číslo, že ich súčet je 0.

h) Prostosť funkcie je postačujúcou podmienkou existencie inverznej funkcie.

i) Funkcia f je párna práve vtedy, keď pre každé x z definičného oboru funkcie f aj $-x$ patrí do definičného oboru funkcie f a súčasne $f(x) = f(-x)$.

j) Funkcia f je rastúca práve vtedy, keď pre každé x, y z definičného oboru funkcie f platí, ak $x < y$, tak $f(x) < f(y)$.

k) Funkcia $f : A \to B$ je injektívna práve vtedy, keď pre každé x, y z množiny A platí, že ak $x \neq y$, tak $f(x) \neq f(y)$.

Úloha 4. Utvorte negáciu výrokov predchádzajúcej úlohy, ako aj nasledujúcich výrokov:

a) $x < 5$ alebo $x > 7$.

b) Ak $n \geq N$, tak $|f_n(x) - f(x)| \leq 3$ pre všetky $x \in A$.

c) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$ (ak $n \geq N$, tak $|a_n - a| < \varepsilon$)

d) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in D_f)\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

e) $(\forall x \in A)\ (\exists y < k)\ 0 < f(y) < f(x)$

Úloha 5. Nech M je množina všetkých mužov a Z je množina všetkých žien. Uvažujme nasledujúce výrokové formy:

$U(m, z)$: „Muž m je manželom ženy z.“
$V(m, z)$: „Muž m miluje ženu z.“
$W(m, z)$: „Žena z miluje muža m.“

Pomocou kvantifikátorov, logických spojok a foriem U, V, W vyjadrite nasledujúce tvrdenia:

a) Každý ženatý muž miluje svoju manželku. b) Každú ženu miluje nejaký muž.

c) Existujú neverné manželky.

Preložte do slovenčiny nasledujúce tvrdenia:

a) $(\exists m \in M)(\forall z \in Z)\, \neg U(m, z)$; b) $(\exists z \in Z)(\forall m \in M)\ (V(m, z) \Rightarrow \neg W(m, z))$.

Príklad: Tvrdenie „Každý muž má práve jednu manželku“ vieme symbolicky vyjadriť ako $(\forall m \in M)(\exists! z \in Z)\, U(m, z)$.

Úloha 6. Pomocou pravdivostných tabuliek overte, či nasledujúce výroky sú tautológie.

a) $\mathcal{V} \Rightarrow (\mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{V})$ b) $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}) \Rightarrow \mathcal{W}$

c) $\neg(\mathcal{V} \vee \mathcal{W}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{V} \vee \neg\mathcal{W})$ d) $(\mathcal{V} \vee \mathcal{V}) \Rightarrow \mathcal{V}$

e) $(\mathcal{V} \vee (\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{W})) \Leftrightarrow ((\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U}) \vee (\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{W}))$ f) $\neg\mathcal{V} \Rightarrow (\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U})$

Úloha 7. Definujme novú logickú operáciu, ktorú nazývame „NOR“, s nasledujúcou tabuľkou pravdivostných hodnôt

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

a) Ukážte, že $p \downarrow p$ je ekvivaletné s $\neg p$.

b) Vytvorte tabuľku pravdivostných hodnôt pre výrok $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

c) Ktorá z nasledujúcich logických spojok ($p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$) je ekvivalentná s $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$?

Odporúčané úlohy na precvičenie: 1, 2, 3, 4, 6, 7