Séria úloh 1B: Množiny, výrazy, rovnice a nerovnice

Úloha 1. Čo z nasledujúceho spĺňa definíciu množiny.

a) Všetci politici v parlamente SR.

b) Všetky prvočísla, ktoré delia číslo 2022.

c) Všetci vysokí ľudia na svete.

d) Všetky prvočísla medzi 8 a 10.

Úloha 2. Majme množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x;\ (\exists k \in \mathbb{N})\ x = 2k\}$, $C = \{x \in \mathbb{N};\ x < 6\}$. Ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé?

a) $\{4, 3, 2\} \subseteq A$

b) $3 \in B$

c) $A \subseteq C$

d) $\{2\} \in A$

e) $C \subseteq B$

f) $\{2, 4, 6, 8\} \subseteq B$

g) $C \subseteq A$

h) $A = C$

Úloha 3. Vypíšte všetky prvky množiny.

a) $\{1, 2, 3\}$

b) $\{\emptyset\}$

c) $\{\{1\}, \{1, 2, 3\}, \{\emptyset\}\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \sqrt{8 - t + \sqrt{2 - t}} \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{N};\ x - \frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \frac{2 - \frac{x}{4}}{3} = 2\right\}$

f) $\{z \in \mathbb{Z};\ |1 - |1 - z|| = 1\}$

g) $\{s \in (-2\pi, 2\pi);\ 2\cos\left(s + \frac{\pi}{6}\right) = -1\}$

h) $\{t \in \mathbb{Q};\ 25^{2t} - 3 \cdot 25^{t} = 10\}$

i*) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1 \wedge (x \cdot y = 1 \vee x \cdot y = 1 \vee x^2 = y^2)\}$

Úloha 4. Vyjadrite ako zjednotenie intervalov.

a) $\{x \in \mathbb{R};\ \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0\}$

b) $\{t \in \mathbb{R};\ \sqrt{t^2 - t - 12} < 7 - t\}$

c) $\{x \in (-100, 100);\ \frac{-5}{\log_2 x} < \log_2 x - 6\}$

d) $\{y \in \langle -\pi, \pi\rangle;\ \sin y < \cos y\}$

Úloha 5. Ktoré z nasledujúcich tvrdení dovoľuje urobiť záver, že $x \in A \setminus B$?

a) $x \in A$ a $x \notin B \setminus A$.

b) $x \in A \cup B$ a $x \notin B$.

c) $x \in A \cup B$ a $x \notin A \cap B$.

d) $x \in A$ a $x \in A \cap B$.

Úloha 6. Nájdite $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \mathbin{\dot{-}} B$, $A \times B$, ak

a) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{3, 4\}$ b) $A = \{\{1, 2\}, 3\}$; $B = \{3, 4\}$

Úloha 7. Doplňte vynechané časti dôkazu.

a) *Majme množiny* $A, B \subseteq U$. *Potom platí, že*

$$A \cap (U \setminus B) = A \setminus B.$$

`Dôkaz.`
Najprv ukážeme, že ak $x \in A \cap (U \setminus B)$, tak $x \in A \setminus B$. Ak $x \in A \cap (U \setminus B)$, tak $x \in A$ a $x \in$ __________, z definície prieniku. Ale $x \in U \setminus B$ znamená, že $x \in U$ a $x \in$ __________. Keďže $x \in A$ a $x \notin B$, dostávame $x \in$ __________, ako sme chceli. Teda $A \cap (U \setminus B) \subseteq A \setminus B$.
Naopak musíme ukázať, že $A \setminus B \subseteq A \cap (U \setminus B)$. Ak __________, tak $x \in A$ a $x \notin B$. Keďže $A \subseteq U$, dostávame $x \in$ __________. Z toho $x \in U$ a $x \notin B$, preto __________. Ale potom __________ a $x \in U \setminus B$, takže $x \in A \cap (U \setminus B)$. Záverom dostávame $A \setminus B \subseteq A \cap (U \setminus B)$.

b) *Majme množiny* A, B, C. *Potom platí, že*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

`Dôkaz.`
Najprv ukážeme, že $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ak $x \in$ __________, tak $x \in A$ alebo $x \in B \cap C$. Ak $x \in A$, tak určite $x \in A \cup B$ a $x \in A \cup C$. Takže $x \in$ __________. Na druhej strane, ak __________, tak $x \in B$ a $x \in C$. Ale to znamená, že $x \in A \cup B$ a __________, takže $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Záverom máme $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Naopak, ak $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, tak __________ a __________. Rozlíšime dva prípady: keď $y \in A$ a keď $y \notin A$. Ak $y \in A$, tak $y \in A \cup (B \cap C)$ a táto časť je hotová. Na druhej strane, ak __________, tak z $y \in A \cup B$ máme $y \in B$. Podobne, keďže $y \in A \cup C$ a $y \notin A$, máme __________. Takže __________ a to znamená, že $y \in A \cup (B \cap C)$. Záverom dostávame $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Úloha 8. Sú nasledujúce vzťahy pravdivé pre ľubovoľné množiny $M, N, P, Q \subseteq X$? Svoje tvrdenie podložte dôkazom alebo kontrapríkladom.

a) $M \setminus (M \setminus N) = N \setminus (N \setminus M)$ b) $M \setminus (N \setminus M) = N \setminus (M \setminus N)$

c) $(M \setminus N) \cap (P \setminus Q) = (M \setminus P) \setminus (N \setminus Q)$

Úloha 9. Zapíšte nasledujúce množiny tak, aby sa vo výslednom zápise nevyskytovali operácie zjednotenia a prieniku:

a) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(-2 - \frac{1}{2^n}, 5 + \frac{1}{3^n}\right)$ b) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[2 + \frac{1}{5^n}, 8 - \frac{1}{5^n}\right]$

c*) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[5 - \frac{1}{n+1}, 7 + \frac{1}{n+1}\right]$

Úloha 10. Zjednodušte výrazy a určte podmienky, za ktorých majú zmysel:

a) $\frac{r^4-s^4}{r^2s^2} : \left[\left(1+\frac{s^2}{r^2}\right)\cdot\left(1-\frac{2r}{s}+\frac{r^2}{s^2}\right)\right]$;

b) $\left(v-\frac{v-u}{1+uv}\right) : \left(1-\frac{v(u-v)}{1+uv}\right)$;

c) $\left[a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}\right] : \left[\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}\right]$;

d) $\frac{q\cdot\sqrt{q^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt[3]{(\sqrt{q}\cdot q^{-2})^2}}+\sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt{q}\cdot q^{-2}}{q^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}}$.

Úloha 11. Riešte na príslušných oboroch dané rovnice a nerovnice:

a) v $\mathbb{N}$: $\frac{3x-1}{3}-\frac{3x-2}{6}+\frac{x}{2}=x-1$

b) na $(-\infty,0\rangle$: $\frac{3t-1}{t+5}-\frac{2t}{t-3}<1$

c) v $\mathbb{R}$: $\frac{R^2-5R+6}{R^2+R+1}<0$

d) v $\mathbb{R}$: $1<\frac{4u-1}{5-u}<4$

e) v $\mathbb{R}$: $(y^2-5y+2)^2+6(y^2-5y+1)+14=0$

Úloha 12. Riešte v $\mathbb{R}$:

a) $3r-|2r-1|=r+1$

b) $|t+2|-2|1-t|=-6$

c) $|3-|2-Y||\leq 2Y$

d) $||w|+3|-3w=-7$

e) $\frac{|y+2|-y}{y}<2$

f) $\frac{s^2+6s-7}{|s+4|}<0$

Úloha 13. Nasledujúcu rovnicu a nerovnicu riešte v $\mathbb{R}$ graficky:

a) $||||x-2|-1|-2|-1|=||x-2|-2|$;

b) $|y^2-4|\geq y-4$.

Úloha 14. Určte všetky hodnoty parametra $a\in\mathbb{R}$, pre ktoré má rovnica $(a-1)x^2-(a-2)x+2a-1=0$

(i) aspoň jeden reálny koreň,

(ii) dva reálne korene,

(iii) dva reálne korene rovnakého znamienka.

Úloha 15. Dokážte, že $\max\{x,y\}=\frac{|x-y|}{2}+\frac{x+y}{2}$. Aký výraz by prislúchal $\min\{x,y\}$?

Úloha 16. Za akých podmienok platí $|x-y|+|y-z|=|x-z|$?

Úloha 17. V rovnici $x^2-4x+\log_2 a=0$ určte $a\in\mathbb{R}$ tak, aby mala reálne korene.

Odporúčané úlohy na precvičenie: 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 17