

## Séria úloh 3B: Ohraničenosť a kompozícia funkcií

**Úloha 1.** Vyšetrite ohraničenosť nasledujúcich funkcií na daných množinách (ak nie je daná žiadna množina, znamená to na celom definičnom obore):

- a)  $\lambda : v = \frac{u^2-3}{u^2+7}$                       b)  $\varphi : z = \frac{w-1}{(2w-3)(w-2)}$  na  $N = (3, +\infty)$
- c)  $\psi : s = \frac{1}{1-r^2}$  na  $M = (-1, 1)$                       d)  $\mu : y = \frac{2\sin x - 5\cos x}{2x^2+3}$
- e)  $\alpha : z = \frac{2y^2-13}{y^2+5}$                       f)  $\Gamma : l = \frac{|k|}{2} - 3$
- g)  $h : b = \frac{5\sqrt{a}}{1+4\sqrt{a}}$

**Úloha 2.** Ktoré z uvedených funkcií sa rovnajú?

$$f : y = \frac{1}{x^2 + x}; \quad g : y = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^2}}; \quad h : y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

**Úloha 3.** Určte  $f \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  a  $g \circ g$ , ak:

- a)  $f : y = \sqrt{x^3}$ ,                       $g : y = 1 - x^2$                       b)  $f : r = \frac{s+1}{s-1}$ ,                       $g : r = \sqrt{s}$
- c)  $f : z = w^2$ ,                       $g : z = 2^w$                       d)  $f : v = \begin{cases} u, & u \in (0, +\infty) \\ 0, & u \in (-\infty, 0) \end{cases}$
- $g : v = \begin{cases} 0, & u \in (0, +\infty) \\ u^2, & u \in (-\infty, 0) \end{cases}$

**Úloha 4.** Riemannova funkcia  $\rho : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  je definovaná nasledovne

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle \text{ alebo } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ je zlomok v základnom tvare } (p, q \in \mathbb{N} \text{ sú nesúdeliteľné}) \end{cases}.$$

Nájdite funkciu  $\text{sgn} \circ \rho$  a načrtnite grafy všetkých troch funkcií.

**Úloha 5.** Nájdite zložené funkcie  $f_2 = f \circ f$ ,  $f_3 = f \circ f \circ f$ , ...  $f_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ak:

- a)  $f : y = 1 + x$                       b)  $f : y = 1 - x$                       c)  $f : y = \frac{1+x}{x}$

**Odporúčané úlohy na precvičenie:**

1 b, d, g, 3 a, b, 5 b, c