

## Séria úloh 4A: Injekcia, surjekcia, bijekcia, inverzná funkcia

**Úloha 1.** Zistite, či je funkcia  $z = h(y)$  injektívna. Ak áno, nájdite k nej inverznú funkciu a určte definičné obory oboch funkcií.

a)  $z = \log_2(y - 3) + 5$

b)  $z = y^4 - 1$

c)  $z = e^{y-1} - 1$

d)  $z = e^{1-y^2} - 1$

e)  $z = \sqrt{|y - 1|}$

f)  $z = \frac{1-y}{1+y}$

g)  $z = \frac{3-\sqrt{y}}{1-2\sqrt{y}}$

h)  $z = 3^{5-\arctg(2y+1)}$

i)  $z = 2 - \arccos(4y + 3)$

**Úloha 2.** Nech  $\varphi : A \rightarrow B$ ,  $f : C \rightarrow D$ . Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení a ich pravdivosť, resp. nepravdivosť odôvodnite.

- a) Ak  $\varphi, f$  sú rastúce, tak  $f \circ \varphi$  je rastúca.
- b) Ak  $\varphi$  je rastúca a  $f$  je klesajúca, tak  $f \circ \varphi$  je klesajúca.
- c) Ak  $\varphi$  je klesajúca a  $f$  je rastúca, tak  $f \circ \varphi$  je klesajúca.
- d) Ak  $\varphi, f$  sú klesajúce, tak  $f \circ \varphi$  je rastúca.
- e) Ak  $\varphi, f$  sú surjektívne, tak  $f \circ \varphi$  je surjektívna.
- f) Ak  $\varphi, f$  sú bijektívne, tak  $f \circ \varphi$  je bijektívna.
- g) Ak  $\varphi, f$  sú ohraničené, tak  $f \circ \varphi$  je ohraničená.
- h) Ak  $f$  je ohraničená, tak  $f \circ \varphi$  je ohraničená.

**Úloha 3.** Nech  $\varphi, \psi$  sú funkcie. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení a ich pravdivosť, resp. nepravdivosť odôvodnite.

- a) Ak  $\varphi, \psi$  sú rastúce, tak aj  $\varphi + \psi$  je rastúca.
- b) Ak  $\varphi, \psi$  sú neohraničené, tak aj  $\varphi \cdot \psi$  je neohraničená.
- c) Ak  $\varphi, \psi$  sú ohraničené, tak aj  $\varphi - \psi$  je ohraničená.
- d) Ak  $\varphi$  je ohraničená, tak aj  $|\varphi|$  je ohraničená.
- e) Ak  $\varphi$  je rastúca, tak aj  $\bar{\varphi}$  je rastúca.

**Úloha 4 (\*).** Dokážte, že každú funkciu je možné napísať ako zloženie injektívnej a surjektívnej funkcie, t.j. pre každú funkciu  $f : X \rightarrow Y$  existuje množina  $Z$ , injektívna funkcia  $h : Z \rightarrow Y$  a surjektívna funkcia  $g : X \rightarrow Z$  také, že  $f = h \circ g$ .

**Úloha 5.** Dokážte, že ak sú obe funkcie  $f, g$  párne, resp. nepárne, potom funkcie  $f \cdot g, \frac{f}{g}$  a  $\frac{g}{f}$  (ak sú definované) sú párne.

**Úloha 6.** Nech  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f$  je kladná rastúca a  $g$  je záporná klesajúca funkcia. Aké vlastnosti majú funkcie  $f + g, f - g, f \cdot g, f/g, f \circ g$  a  $g \circ f$ ? Svoje tvrdenia zdôvodnite!

**Úloha 7.** Určte všetky hodnoty parametra  $a \in \mathbb{R}$ , pre ktoré

- a) je funkcia  $h : y = ax - a^2$  klesajúca;
- b) funkcia  $g : y = ax^2 + 4$  zobrazuje interval  $\langle -3, 3 \rangle$  na interval  $\langle 1, 13 \rangle$ ;
- c) je funkcia  $k : y = \left(\frac{a+1}{3}\right)^x$  klesajúca, resp. rastúca.

**Odporúčané úlohy na precvičenie:** 1 c, d, h, 2, 7 a