Séria úloh 4B: Spojité a nespojité funkcie

Úloha 1. Nájdite interval obsahujúci bod b ($I \supset \{b\}$) taký, že funkčné hodnoty bodov v ňom sa líšia od hodnoty $g(b)$ maximálne o zadané ε.

a) $g(a) = a^2$, $b = 4$, $\varepsilon = 2$

b) $g(a) = a^2$, $b = -3$, $\varepsilon = \frac{2}{11}$

c) $g(a) = \sqrt{a+7}$, $b = -3$, $\varepsilon = 1$

d) $g(a) = \sqrt{a+7}$, $b = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$

Úloha 2. Nájdite interval obsahujúci bod x_0 ($I \supset \{x_0\}$) , že funkčné hodnoty bodov v ňom sa líšia od hodnoty $h(x_0)$ maximálne o fixné kladné číslo ε.

a) $h(x) = x^2$, $x_0 = 2$

b) $h(x) = \mathrm{e}^x$, $x_0 = 5$

Úloha 3. Nájdite interval obsahujúci fixný bod a z definičného oboru ($I \supset \{a\}$) taký, že funkčné hodnoty bodov v ňom sa líšia od hodnoty $\varphi(a)$ maximálne o fixné kladné číslo ε.

a) $\varphi(x) = 2^x$

b) $\varphi(x) = \sqrt{x+10}$

Úloha 4. Hovoríme (len v tejto úlohe), že funkcia f je v bode a *rozjarená sprava*, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$ a $x \in \langle a, a+\delta)$, že platí $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.

a) Nájdite takú funkciu f a číslo a, že funkcia f je rozjarená sprava v bode a.

b) Nájdite takú funkciu f a číslo a, že funkcia f nie je rozjarená sprava v bode a.

c) Nájdite takú funkciu f a číslo a, že funkcia f je rozjarená sprava v bode a, ale nie je v bode a spojitá sprava.

d) Ukážte, že ak existuje také $b > a$, že $f(b) > f(a)$, potom je funkcia f v bode a rozjarená sprava.

Úloha 5. Nech f je definovaná na celej množine $\mathbb{R}$.

a) Hovoríme, že f je *jednopojitá* v bode x_0, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = 1$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ také, že $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Nájdite príklad funkcie, ktorá je jednopojitá v každom bode množiny $\mathbb{R}$.

b) Hovoríme, že f je *rovnopojitá* v bode x_0, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \varepsilon$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ také, že $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Nájdite príklad funkcie, ktorá je rovnopojitá na $\mathbb{R}$, ale nie je nikde jednopojitá (alebo zdôvodnite, že taká funkcia neexistuje).

Úloha 6. Nech f je definovaná na celej množine $\mathbb{R}$.

a) Hovoríme, že f je *menejpojitá* v bode x_0, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $0 < \delta < \varepsilon$ také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ také, že $|x - x_0| < \delta$, platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Nájdite príklad funkcie, ktorá je menejpojitá v každom bode množiny $\mathbb{R}$, ale nie je nikde rovnopojitá (alebo zdôvodnite, že taká funkcia neexistuje).

b) Je každá menejpojitá funkcia spojitá? Je každá spojitá funkcia menejpojitá? Zdôvodnite!

Úloha 7. Rozhodnite o spojitosti nasledujúcich funkcií na svojom definičnom obore a svoje tvrdenie odôvodnite.

a) $f(x) = x - 2$

b) $g(x) = \frac{-(x-2)^2}{|x-2|+(2-x)}$

c) $h(x) = (x-1)^2 + 2$

d) $\varphi(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

e) $\psi(x) = \operatorname{sgn} x$

f) $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

g)* $v(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Odporúčané úlohy na precvičenie: 1 c, 2 b, 3 b, 5, 7 b, f