

Séria úloh 5A: Spojitosť a operácie

Úloha 1. Vyšetrite spojitost' nasledujúcich funkcií.

a) $f_1 : y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

b) $f_2 : y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

c) $f_3 : y = \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

d) $f_4 : y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

e) $f_5 : y = \sqrt{\ln \cos(2\pi x)}$

Úloha 2. Rozhodnite o spojitosti nasledujúcich funkcií na svojom definičnom obore a svoje tvrdenie odôvodnite.

a) $f(x) = x - 2$

b) $g(x) = \frac{-(x-2)^2}{|x-2| + (2-x)}$

c) $h(x) = (x-1)^2 + 2$

d) $\varphi(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

e) $\psi(x) = \operatorname{sgn} x$

f) $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

g)* $v(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Úloha 3. Nech $\varphi : A \rightarrow B$, $f : C \rightarrow D$. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení a ich pravdivosť, resp. nepravdivosť odôvodnite.

- Ak funkcia φ je nespojitá v bode x_0 , funkcia f je nespojitá v bode $y_0 = \varphi(x_0)$, tak $f \circ \varphi$ je spojitá v bode x_0 .
- Ak funkcia φ je nespojitá v bode x_0 , funkcia f je spojitá v bode $y_0 = \varphi(x_0)$, tak $f \circ \varphi$ je nespojitá v bode x_0 .
- Ak funkcia φ je nespojitá v bode x_0 , funkcia f je spojitá v bode $y_0 = \varphi(x_0)$, tak $f \circ \varphi$ je spojitá v bode x_0 .

Úloha 4. Skonstruujte príslušný príklad alebo zdôvodnite, že sa to nedá.

- Dve funkcie f, g , z ktorých ani jedna nie je spojitá v bode $x_0 = 0$, ale $f \cdot g$ a $f + g$ sú spojité v $x_0 = 0$.
- Nespojitú funkciu f v bode $x_0 = 0$, aby $f + \frac{1}{f}$ bola spojitá v $x_0 = 0$.
- Nespojitú funkciu f v bode $x_0 = 0$, aby f^3 bola spojitá v $x_0 = 0$.

Úloha 5. Nech φ, ψ sú funkcie a c je číslo. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení a ich pravdivosť, resp. nepravdivosť odôvodnite.

- Ak funkcia φ je nespojitá v bode x_0 , tak $c \cdot \varphi$ je nespojitá v bode x_0 .

- b) Ak funkcia φ je nespojitá v bode x_0 , funkcia ψ je spojitá v bode x_0 , tak $\varphi - \psi$ je spojitá v bode x_0 .
- c) Ak funkcia φ je spojitá v bode x_0 , funkcia ψ je nespojitá v bode x_0 , tak $\varphi \cdot \psi$ je nespojitá v bode x_0 .

Odporúčané úlohy na precvičenie: 1 c, d, 2 b, 3 b, 5