Séria úloh 5B: Výpočet derivácie

Úloha 1. Na grafe funkcie $y = f(x)$ na obrázku vyznačte body A, B, C, D, E a F, aby

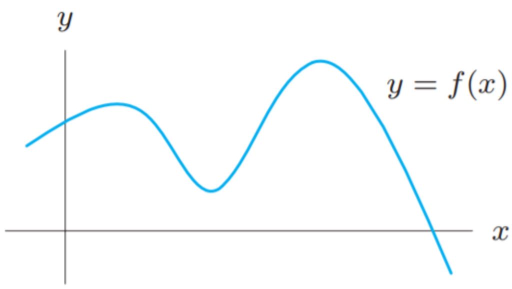
(a) bod A bol bodom na krivke, kde je derivácia funkcie záporná;

(b) bod B bol bodom na krivke, kde je hodnota funkcie záporná;

(c) bod C bol bodom na krivke, kde je derivácia najväčšia;

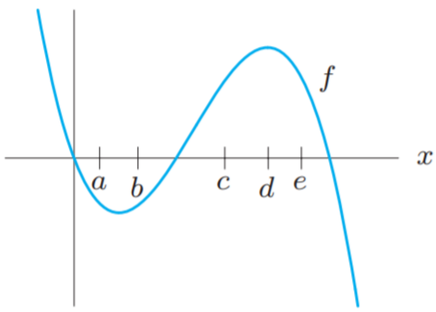
(d) bod D bol bodom na krivke, kde je derivácia funkcie nulová;

(e) body E a F sú rôzne body na krivke, v ktorých je derivácia rovnaká.



Obr. 1: Graf funkcie f

Úloha 2. Na obrázku je znázornený graf funkcie f. Priraďte hodnotám derivácie z tabuľky body a, b, c, d, e na osi o_x.



x	$f'(x)$
	0
	0.5
	2
	-0.5
	-2

Obr. 2: Graf funkcie f

Úloha 3. Predpokladajme, že f je funkcia taká, že $f(100) = 35$ a $f'(100) = 3$. Odhadnite hodnotu $f(102)$.

Úloha 4. (a) Ak f je párna funkcia a $f'(10) = 6$, akú hodnotu má $f'(-10)$?
(b) Ak f je párna a $f'(0)$ existuje, akú hodnotu má $f'(0)$?
(c) Ak g je nepárna funkcia s $g'(4) = 5$, akú hodnotu má $g'(-4)$?

Úloha 5. Vypočítajte prvú deriváciu nasledujúcich funkcií v bode x_0.

a) $\xi(x) = x^3 + 1,\ x_0 = 1$ b) $\xi(x) = \cos(3 + 5x),\ x_0 = 0$
c) $\xi(x) = \log^2 10x + (x + 6x + 3\sin x)^3,\ x_0 = \pi$

Úloha 6. Nájdite derivácie nasledujúcich funkcií a výsledok zjednodušte.

a)	$z(a) = a^{-5} + a^{-7}$	b)	$z(b) = 7b^4 + 5b^{-3} - \sqrt{b} - 5\sqrt[3]{b^8} + b^{\frac{2}{3}} - \cos b$	c)	$z(c) = \frac{4}{c^{25}} - \frac{5}{\sqrt[3]{c^4}}$
d)	$z(d) = \mathrm{tg}\ d - d$	e)	$z(e) = (2e+3)(3e^2 + e^2\sqrt[8]{e^7})$	f)	$z(f) = f^3 \ln f$
g)	$z(g) = \mathrm{e}^g \mathrm{arctg}\ g$	h)	$z(h) = 5^h \log h \sin h$	i)	$z(i) = \frac{1+i}{1-i}$
j)	$z(j) = \frac{j+1}{j^2+j+1}$	k)	$z(k) = \frac{1}{k-1} - \frac{3k}{k^2-1}$	l)	$z(l) = \frac{\ln l}{l}$
m)	$z(m) = \frac{\sin m}{1-\cos m}$	n)	$z(n) = \frac{(n-3)(5-2n)}{3n^2-2n+7}$	o)	$z(o) = \frac{o}{o^2+1} + \frac{o^2+1}{o}$
p)	$z(p) = \frac{\sqrt{p}(\sqrt[2]{p^3}+2\sqrt[9]{p^5})}{p}$	q)	$z(q) = \sqrt{q\sqrt{q\sqrt{q}}}$	r)	$z(r) = \frac{1}{r\ \mathrm{e}^r}$
s)	$z(s) = (s^2 - 5s + 6)^2$	t)	$z(t) = \cos^2 t$	u)	$z(u) = \mathrm{e}^{\cos u}$
v)	$z(v) = \sqrt{v^2 - 6v + 2}$	w)	$z(w) = 3 \ln \sin 2w$	x)	$z(x) = \mathrm{arccotg}\ \mathrm{e}^{5x}$

Úloha 7. Nájdite derivácie nasledujúcich funkcií a výsledok zjednodušte.

a)	$\psi(a) = \sqrt{1-a^4}$	b)	$\psi(b) = \ln \frac{(b+2)^2}{3b+4}$	c)	$\psi(c) = 3c^2 + \sqrt{5c} - c^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{\sqrt[5]{c^2}}$
d)	$\psi(d) = (3d^2+5)\log_2(3d)$	e)	$\psi(e) = 3^{5e}\sqrt{5e-19}$	f)	$\psi(f) = \frac{\sqrt{\ln 3f}}{f\ \mathrm{e}^{2f}}$
g)	$\psi(g) = \mathrm{arctg}\ \frac{g+1}{g-1}$	h)	$\psi(h) = \frac{\sqrt{2h^2-2h+1}}{h}$	i)	$\psi(i) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{i}}$
j)	$\psi(j) = \ln(j + \sqrt{j^2+4})$	k)	$\psi(k) = k\ \mathrm{e}^{-k^2}$	l)	$\psi(l) = \frac{l^2}{\ln l}$
m)	$\psi(m) = \frac{\mathrm{e}^{m\cos m}}{m^2}$	n)	$\psi(n) = \ln \frac{n^4-1}{n^4+1}$	o)	$\psi(o) = \frac{\sin o + \cos o}{\sin o - \cos o}$
p)	$\psi(p) = \sin^3 p + \cos^3 p$	q)	$\psi(q) = \arcsin \frac{q^2-1}{q^2}$	r)	$\psi(r) = \frac{\cos r}{\sin^2 r} + \mathrm{cotg}\ r$
s)	$\psi(s) = \frac{\arccos s}{\sqrt{1-s^2}}$	t)	$\psi(t) = \ln^2(3t+2)$	u)	$\psi(u) = \ln^3(5u+2)\cdot\sqrt{u^2+1}$
v)	$\psi(v) = \sqrt[3]{\sin^2 v} + \frac{1}{\cos^2 v}$	w)	$\psi(w) = \mathrm{e}^{\sqrt{w}}\sqrt{w-1}$	x)	$\psi(x) = \sqrt{\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}}$

Úloha 8. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich výrokov

a) Ak $f'(x) = g'(x)$, tak $f(x) = g(x)$.

b) Ak $f(x_0) = g(x_0)$, tak $f'(x_0) = g'(x_0)$.

c) Existujú funkcie f, g také, že $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

d) Ak (a,b) je ohraničený interval, funkcia f je diferencovateľná a ohraničená na (a,b), tak f' je ohraničená na (a,b).

Úloha 9. Práve jedna z uvedených možností je nesprávna. Rozhodnite, ktorá to je a uveďte príklady na zvyšné 3 možnosti. V každom prípade sú funkcie definované na $\mathbb{R}$.

a) Funkcie f a g nie sú diferencovateľné v 0, ale fg je diferencovateľná v 0.

b) Funkcie g a fg sú diferencovateľné v 0, ale f nie je diferencovateľná v 0.

c) Funkcie g a $f+g$ sú diferencovateľné v 0, ale f nie je diferencovateľná v 0.

d) Funkcia f je diferencovateľná v 0 a nikde inde.

Úloha 10. Funkcia $f(x) = \mathrm{e}^x$ má vlastnosti $f'(x) = f(x)$ a $f(0) = 1$. Zdôvodnite, že f je jediná funkcia s týmito vlastnosťami.
Hint: Predpokladajte, že existuje iná taká funkcia g s vlastnosťami $g'(x) = g(x)$ a $g(0) = 1$. Zoberte funkciu $h(x) = \frac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$ a nájdite jej deriváciu. Napokon použite fakt, že funkcia s nulovou deriváciou všade musí byť konštantná.

Odporúčané úlohy na precvičenie: 1, 2, 5, 7