Séria úloh 7B: Monotónnosť, extrémy, vyššie derivácie

Úloha 1. Načrtnite graf funkcie $y = f(x)$, aby platili súčasne všetky nasledujúce vlastnosti

i) $f'(x) > 0$ na $(-1, 0)$, $(5, 10)$ a súčasne $f'(7) = 100$

ii) $f'(x) < 0$ na $(-10, -5)$, $(15, 20)$ a súčasne $f'(-7) = -1$

iii) $f'(x) = 0$ v bode $x = 0$ a na $(1, 3)$.

Úloha 2. Vyšetrite monotónnosť a nájdite extrémy nasledujúcich funkcií.

a) $y = b^3 + 8b^2 + 11b - 20$ b) $y = c^3 + 6c^2 + 11c + 6$

Úloha 3. Vyšetrite monotónnosť a nájdite extrémy nasledujúcich funkcií.

a) $y = 3\left(\frac{x^2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}\right)$ b) $y = x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ c) $y = \frac{x^2+1}{x^2+2x+3}$

d) $f(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}$ e) $f(t) = \ln(\sin t)$ f) $f(t) = \sqrt[3]{t}\,\mathrm{e}^{-t}$

g) $y = 2x - \arcsin x$ h) $y = \frac{2x}{x^2-1} + x$ i) $y = \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$

j) $g(u) = \frac{2u-1}{(u-1)^2}$ k) $g(u) = \frac{u}{\mathrm{e}^u}$ l) $g(u) = \frac{u^2}{u^2-1}$

m) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ n) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ o) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

p) $h(a) = \frac{\mathrm{e}^a}{a}$ q) $h(a) = a + \frac{4}{a+2}$ r) $h(a) = \frac{a-2}{\sqrt{a^2+1}}$

Úloha 4. Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení.

a) Ak $f'(x_0) = 0$, tak f má v bode x_0 lokálny extrém.

b) Ak $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) > 0$, tak x_0 nie je bod zvratu funkcie f.

c) Nech x_0 je bod zvratu funkcie f. Potom f je rastúca v x_0.

Úloha 5. Nájdite tretiu deriváciu nasledujúcich funkcií.

a) $z(s) = (s^2 - 5s + 6)^2$ b) $z(t) = \cos^2 t$ c) $z(u) = \mathrm{e}^{\cos u}$

d) $z(v) = \sqrt{v^2 - 6v + 2}$ e) $z(w) = 3\ln\sin 2w$ f) $z(x) = \operatorname{arccotg}\ \mathrm{e}^{5x}$

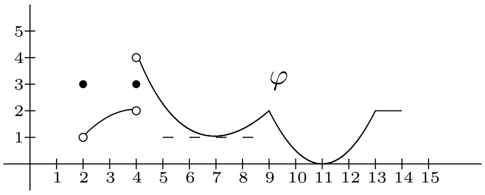
Úloha 6. Dokážte, že funkcia $y = c_1\,\mathrm{e}^x\cos x + c_2\,\mathrm{e}^x\sin x + c_3\,\mathrm{e}^{-x}\cos x + c_4\,\mathrm{e}^{-x}\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla, vyhovuje diferenciálnej rovnici $y^{(4)} + 4y = 0$.

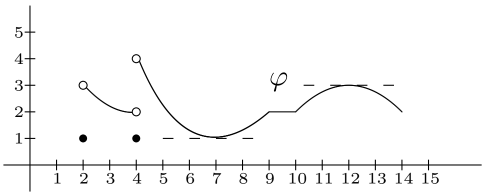
Úloha 7. Nech $\gamma > 0$. Dokážte, že funkcia $y = c_1\,\mathrm{e}^{\gamma x} + c_2\,\mathrm{e}^{-\gamma x} + c_3\cos\gamma x + c_4\sin\gamma x$, $x \in \mathbb{R}$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla, vyhovuje diferenciálnej rovnici $y^{(4)} - \gamma^4 y = 0$.

Úloha 8. Nájdite deriváciu n-tého rádu funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = \ln(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$ b) $y = \sqrt{1 + x}$ c) $y = \dfrac{1}{2 + 5x}$

Úloha 9. Na obrázku nižšie je graf funkcie φ definovanej na intervale $\langle 2, 14\rangle$. Nájdite jej všetky body nespojitosti, lokálne a globálne extrémy, stacionárne body a body, kde neexistuje derivácia φ.

a) 

b) 

c)