

Séria úloh 8A: Optimalizovanie, konvexnosť, konkávnosť

Úloha 1. Jaro kašle. Rýchlosť $v(r)$ v m/s, ktorou sa vymrští vzduch z jeho úst, závisí na priemere r jeho priedušiek a je pre $0 \leq r \leq 9$ daná vzťahom

$$v(r) = 0,1(9 - r)r^2.$$

Aká hodnota r maximalizuje rýchlosť? Pre akú hodnotu je rýchlosť minimálna?

Úloha 2. (a) Pre kladnú konštantu b , funkcia $f(t) = te^{-bt}$ udáva množstvo lieku v tele v čase $t \geq 0$. Nájdiť globálne maximum a minimum funkcie f v čase $t \geq 0$.

(b) Nájdiť hodnotu b takú, aby bolo maximum v čase $t = 10$.

Úloha 3. Nájdiť číslo, ktoré sčítané so svojím štvorcem dáva najmenší súčet.

Úloha 4. Rozložte číslo 12 na dva sčítance tak, aby súčet ich štvorcov bol najmenší.

Úloha 5. Rozložte číslo 36 na súčin dvoch činiteľov, ktoré majú najmenší súčet štvorcov.

Úloha 6. Nájdiť obdĺžnik daného obvodu o , ktorý má najväčší obsah.

Úloha 7. Do kružnice vpíšte rovnoramenný trojuholník s najväčším obsahom.

Úloha 8. Medzi všetkými priamymi rotačnými kužeľmi s povrchom P nájdite ten s najväčším objemom.

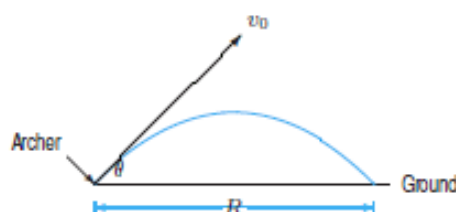
Úloha 9. Aké sú rozmery otvoreného bazéna so štvorcovým dnom, ktorého objem je 32 m^3 , ak na jeho vydlaždičkovanie máme spotrebovať čo najmenej materiálu?

Úloha 10. Plotom dlhým 120 m musíme ohradiť záhradu priliehajúcu k domu tak, aby jej plocha bola najväčšia. Nájdiť rozmery záhrady.

Úloha 11. Keď je šíp vystrelený do vzduchu, jeho dostrel R je definovaný ako horizontálna vzdialenosť medzi strelcom a bodom, kde sa šíp zapichne do zeme. Za predpokladu, že strieľame na rovine a zanedbáme odpor vzduchu, je dostrel daný rovnicou

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g},$$

kde v_0 je počiatočná rýchlosť šípu, g je konštanta vyjadrujúca gravitačné zrýchlenie a $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je uhol, pod ktorým je šíp nad horizontom vystrelený. Pod akým uhlom má šíp najväčší dostrel?



Úloha 12. Pri skúške z FRPa dovolí skúšajúci študentovi, aby si zvolil prirodzené číslo n s tým, že ak študent bude mať z písomky aspoň $100 \left(1 - \frac{12n}{10n^2+21}\right)$ bodov, dostane skúšku. Aká hodnota n je pre študenta najvýhodnejšia?

Úloha 13. Pri testovaní stroja sa zistilo, že jeho výkon závisí od nastavenia hodnoty x podľa vzťahu $-x^2 + 14x - 10$. Ako treba nastaviť hodnotu x , aby výkon stroja bol maximálny?

Úloha 14. Vyšetrite konvexnosť, konkávnosť a nájdite inflexné body nasledujúcich funkcií.

a) $f : y = \frac{x^2+2x+1}{x+2}$

b) $\psi : v = \arcsin \frac{2u}{1+u^2}$

c) $Q : z = e^{-y^2}$

d) $\gamma : y = \frac{1+\ln x}{x}$

Úloha 15. Vyšetrite konvexnosť, konkávnosť a nájdite inflexné body funkcií v Úlohach 2 a 3 zo Série 7B.