Séria úloh 9A: Taylorove polynómy

Úloha 1. Nájdite prirodzené číslo n také, aby $T_n(\mathrm{e}^x, 0)$ aproximoval funkciu e^x na intervale $\langle -1, 1\rangle$ s chybou menšou ako $\frac{1}{100\,000}$.

Úloha 2. V nasledujúcich úlohách overte, že ak pre dané n platí odhad $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, kde M je maximum funkcie $|f^{(n+1)}(z)|$ na intervale (x_0, x) alebo (x, x_0), tak $|R_n(x)| \leq \frac{1}{1000}$. Nájdite hodnotu Taylorovho polynómu v zadanom bode.

a) $\sqrt{10}$, $x_0 = 9$, $n = 3$;

b) $(28)^{1/3}$, $x_0 = 27$, $n = 1$;

c) $\sin 6$, $x_0 = 2\pi$, $n = 5$;

d) e^2, $x_0 = 0$, $n = 9$.

Úloha 3. Odvoďte tvar zvyšku (Lagrangeov alebo Cauchyho) po n-tom Taylorovho polynóme funkcie $y = f(x)$ v bode x_0, ak

a) $f(x) = x \ln x$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2^x}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$.

Úloha 4. Čo vieme povedať o koeficientoch Taylorovho polynómu párnej, resp. nepárnej funkcie?

Úloha 5. Pre funkciu $f : y = \mathrm{e}^x$

a) nájdite $\mathrm{T}_n(f, 0)(x)$;

b) vypočítajte hodnotu čísla e s presnosťou (chybou) menšou ako 10^{-8};

c) s akou presnosťou vypočítame číslo e, ak zoberieme piaty Taylorov polynóm?

Úloha 6. Nech $f(x) = x^n$. Dokážte, že $f(1) + \dfrac{f'(1)}{1!} + \dfrac{f''(1)}{2!} + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$.

Úloha 7. Použitím Taylorovho polynómu dokážte vzťah

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$