Séria úloh 12B: Výpočet Newtonovho integrálu a jeho interpretácia

Úloha 1. Vypočítajte nasledujúce integrály.

a) $\displaystyle\int_{24}^{8} \frac{1}{3+\sqrt{1+a}}\,\mathbf{d}a$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1}{e^{a}+1}\,\mathbf{d}a$ c) $\displaystyle\int_{16}^{16} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[4]{a}}\,\mathbf{d}a$

d) $\displaystyle\int_{100}^{0} \frac{c^2+\sqrt{1+c}}{\sqrt[3]{1+c}}\,\mathbf{d}c$ e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{c\sqrt{c+1}}\,\mathbf{d}c$ f) $\displaystyle\int_{x}^{3x} e^{c}\sin c\,\mathbf{d}c$

Úloha 2. Vypočítajte Newtonove určité integrály.

a) $\displaystyle\int_{-3}^{1} |x|\,\mathbf{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}\,\mathbf{d}x$ c) $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{x}{x^2-4}\,\mathbf{d}x$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathbf{d}x$ e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos x\sin^2 x\,\mathbf{d}x$ f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\mathbf{d}x}{3+2\sin x}$

g) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,e^{-x}\,\mathbf{d}x$ h) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}x\,\mathbf{d}x$ i) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x^3\sin x\,\mathbf{d}x$

j) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathbf{d}x$ k) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathbf{d}x$ l) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathbf{d}x$

m) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\mathbf{d}x}{x-x^2}$ n) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{x}}{e^{2x}+e^{x}+2}\,\mathbf{d}x$ o) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)\,\mathbf{d}x$

Úloha 3. Miera spotreby svetovej ropy (v miliardách barelov za rok) je určená vzťahom $r = f(t)$, kde t označuje roky a $t = 0$ prislúcha roku 2004 (začiatok merania).

(a) Definujte integrál predstavujúci celkové množstvo ropy spotrebované od začiatku roka 2004 do začiatku roka 2009.

(b) Medzi rokmi 2004 a 2009 bola miera spotreby modelovaná ako $r = 32\,e^{0{,}05t}$. Použitím dolných súčtov s delením intervalu na päť častí nájdite približnú hodnotu celkového množstva ropy spotrebovanej od začiatku roka 2004 do začiatku roka 2009.

(c) Interpretujte každý z piatich výrazov v sume z časti (b) z hľadiska spotreby ropy.

Úloha 4. Stará veslárska loď praskla a začala do nej presakovať voda. Voda prúdi do lode rýchlosťou $r(t)$ uvedenou v tabuľke.

(a) Odhadnite zhora a zdola objem vody, ktorý pritiekol do lode počas 15 minút.

(b) Nakreslite graf ilustrujúci dolný odhad.

t minút	0	5	10	15
$r(t)$ litrov/min	12	20	24	16

Úloha 5. Skokan (bungee jumpingu) vyskočí zo štartovacej plošiny v čase $t = 0$ a odrazí sa počas prvých 5 sekúnd. Pri rýchlosti meranej smerom nadol, pre t v sekundách, $0 \leq t \leq 5$, je skokanova rýchlosť aproximovaná vzťahom $v(t) = -4t^2 + 16t\,\mathrm{m/s}$.

(a) Koľko metrov padá skokan počas prvých 5 sekúnd?

(b) Kde sa skokan, vzhľadom na východiskovú polohu, nachádza na konci piatich sekúnd?

(c) Čo predstavuje $\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t$ z hľadiska skoku?

Úloha 6. Ročná produkcia uhlia v USA (v miliardách ton za rok) je uvedená v tabuľke. Odhadnite celkové množstvo uhlia vyprodukovaného v USA medzi rokmi 1997 a 2009. Ak $r = f(t)$ je miera produkcie uhlia t rokov od roku 1997, napíšte integrál predstavujúci ťažbu uhlia v rokoch 1997 až 2009.

rok	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2009
produkcia	1,090	1,094	1,121	1,072	1,132	1,147	1,073

Úloha 7. Množstvo odpadu W, ktoré spoločnosť vyprodukuje v tonách za týždeň, je možné aproximovať vzťahom $W = 3{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}008t}$, kde čas t je v týždňoch od 1. januára 2005. Náklady na odstránenie odpadu spoločnosť stoja 15 USD/tona. Koľko spoločnosť zaplatí za odstránenie odpadu v roku 2005?

Úloha 8. Šálka kávy, ktorá má 90 °C sa v čase $t = 0$ položí do izby, kde je 20 °C. Teplota kávy sa mení rýchlosťou $r(t) = -7\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ °C za minútu, kde čas t je v minútach. Odhadnite teplotu kávy v čase $t = 10$.

Úloha 9. Ropa je čerpaná z prameňa rýchlosťou $r(t)$ barelov za deň. Nech t je v dňoch, $r'(t) < 0$ a $t_0 > 0$.

a) Čo vyjadruje hodnota $\displaystyle\int_0^{t_0} r(t)\,\mathrm{d}t$?

b) Zoraďte od najmenšieho po najväčší:

$$\int_0^{2t_0} r(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{t_0}^{2t_0} r(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{2t_0}^{3t_0} r(t)\,\mathrm{d}t.$$