

Séria úloh 13A: Určitý integrál, plošný obsah, objem

Úloha 1. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

- a) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + x + 6$ b) $y = 2x^2 + 2x - 24$, $y = -x^2 - x + 12$
 c) $y = x$, $y = 0$, $x = 3$ d) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

Úloha 2. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

- a) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $31x + 8y - 94 = 0$ b) $y = -3 + 8x - 2x^2$, $y = 6 - 4x + x^2$
 c) $y = 6 - x$, $y = x^2$, $y = x^2 + 2x + 2$ d) $y = x^2$, $y = -x^2$, $4x + y - 4 = 0$
 e) $y = x^2 - 2$, $y = |x|$ f) $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 2$, os x
 g) $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$ h) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$
 i) $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$ j) $y = x + \sin^2 x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = x$
 k) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$ l) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
 m) $y = x^2$, $y^2 = -x$ n) $y = -x^2$, $y^2 = x$
 o) $y = x^2 - 2$, $y = |x|$ p) $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 2$, os x
 q) $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$ r) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$
 s) $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$ t) $y = x + \sin^2 x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = x$
 u) $xy = 4$, $x + y = 5$ v) $y = x^3$, $y = 4x$
 w) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = \ln 2$ x) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = 2\sqrt{x}$
 y) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$ z) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$

Úloha 3. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $T_1 = [1, 3]$, $T_2 = [4, 0]$.

Úloha 4. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej kružnicou $x^2 + y^2 = 8$ a parabolou $y^2 = 2x$.

Úloha 5. Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkou $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ a priamkami $y = x - 1$, $y = 2x - 2$.

Úloha 6. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej parabolou $y^2 = x$, hyperbolou $xy = 8$ a polpriamkou $x = 8$, $y \leq 1$.

Úloha 7. Nájdite objem rotačného telesa, ktoré vznikne otáčaním útvaru ohraničeného danými krivkami okolo osi o_x .

- a) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + x + 6$ b) $y = 2x^2 + 2x - 24$, $y = -x^2 - x + 12$
 c) $y = x$, $y = 0$, $x = 3$ d) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

Úloha 8. Nájdite objem rotačného telesa, ktoré vznikne otáčaním útvaru ohraničeného danými krivkami okolo osi o_x .

a) $y = 3 - x^2, y = 1 + |x|$

c) $y = x^2 + 2, x = -2, x = 2$

e) $y = \cos x + 1, x = -\pi, x = \pi$

g) $y = x^2 + 2, y = 0, x = -2, x = 2$

i) $y = \frac{2x}{\pi}, y = \sin x$

b) $y = x^2 + 2, y = 2x^2 + 1$

d) $y = 1 - x^2, y = x^2$

f) $y = \frac{1}{1+x^2}, x = -1, x = 1$

h) $y = \frac{4}{x}, y = 0, x = 1, x = 2$

j) $y = x^2 - 4x + 7, y = 1 + 4x - x^2$

Úloha 9. Nájdite objem rotačného telesa, ktoré vznikne otáčaním trojuholníka s vrcholmi $T_1 = [1, 2], T_2 = [4, 3], T_3 = [2, 8]$ okolo osi o_x .

Úloha 10. Vypočítajte objem kužeľa s polomerom základne 2 a výškou 3.

Úloha 11. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa s polomerami základní 4 a 2 a výškou 3.

Úloha 12. Nájdite objem rotačného telesa, ktoré vznikne otáčaním útvaru ohraničeného krivkami $y = 3 + \sin 2\pi x, y \geq 3, x \in \langle 0, 5 \rangle$ a $y = 3$ okolo osi o_x .