

Séria úloh 13B: Niektoré aplikácie Newtonovho integrálu

Úloha 1. Vypočítajte dĺžku danej krivky na uvedenom intervale.

- | | |
|--|---|
| a) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, x \in \langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle$ | b) $y = \frac{2+x^6}{8x^2}, x \in \langle 1, 2 \rangle$ |
| c) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \langle 0, 3 \rangle$ | d) $y = 2\sqrt{x}, x \in \langle 1, 2 \rangle$ |
| e) $y = e^x, x \in \langle 0, 1 \rangle$ | f) $y = \ln x, x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$ |
| g) $y = 2x - x^2, x \in \langle 0, 1 \rangle$ | h) $y^2 = 4x^3, y > 0, x \in \langle 0, 2 \rangle$ |
| i) $x = \cos t, y = t + \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$ | j) $x = 8 \sin t + 6 \cos t, y = 6 \sin t - 8 \cos t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ |

Úloha 2. Vypočítajte obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou rovinného útvaru ohraničeného danými krivkami okolo osi o_x .

- | | |
|--|--|
| a) $y^2 = 4x, x = 3$ a osou o_x | b) $y = \frac{x^2}{2}, x = 0, x = \frac{3}{4}$ a osou o_x |
| c) $y = x^3, x = -\frac{2}{3}, x = \frac{2}{3}$ a osou o_x | d) $y = \sqrt{x}, x = 0, x = 2$ a osou o_x |
| e) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \pi \rangle, a > 0$ | f) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ |

Úloha 3. Určte hmotu a súradnice ťažiska krivky γ danej grafom funkcie $y = f(x)$ s lineárnou hustotou ρ , ak

- $f : y = \frac{1}{2}x^2, x \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\rho(x) = x$
- f je polkružnica v hornej polrovine s polomerom $r > 0$ a stredom $[0, 0]$
- $f : y = x^2, x \in \langle -4, 4 \rangle$ a $\rho(x) = |x|$
- polovica asteroidy $x = \sin^3 t, y = \cos^3 t$ ležiaca nad osou o_x a $\rho(x) = 1$

Úloha 4. Určte hmotu a súradnice ťažiska rovinného útvaru B s danou hustotou ρ :

- $B : 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ a $\rho(x) = |\cos x|$
- $B : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y$ a $\rho(x) = x$
- $B : -1 \leq x \leq |y - 1|, 0 \leq y \leq 2$ a $\rho(y) = y^2$