

# 1 Zopár úloh na precvičenie neurčitých integrálov

1.1. Pomocou algebraických úprav, vety o linearite neurčitého integrálu a základných vzorcov vypočítajte integrály:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\int (3x^2 + 2x - 1) dx$                                  | b) $\int \left( \frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} \right) dx$ |
| c) $\int x^2(x^2 + 1) dx$                                     | d) $\int x^2(x^2 + 1) dx$                                       |
| e) $\int \frac{x^3+3x-1}{x} dx$                               | f) $\int \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}} dx$                          |
| g) $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} dx$                         | h) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x} dx$                           |
| i) $\int (\cos x + 2\sqrt[5]{x^3}) dx$                        | j) $\int \left( \sin x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} \right) dx$    |
| k) $\int \left( 2^x + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) dx$          | l) $\int \left( 10^{-x} + \frac{x^2+2}{x^2+1} \right) dx$       |
| m) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$                           | n) $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)} dx$                               |
| o) $\int \cotg^2 x dx$  | p) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$                   |
| q) $\int \frac{dx}{x^2+7}$                                    | r) $\int 4^{2-3x} dx$   |
| s) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$                                | t) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$                              |
| u) $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ | v) $\int \frac{1}{9x^2+4} dx$                                   |
| w) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$                        | x) $\int \frac{1}{2x^2+8x+20} dx$                               |

1.2. Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

- a)  $\int |x| dx$
- b)  $\int f(x) dx$ , kde  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \leq 2, \\ 2, & \text{ak } x > 2. \end{cases}$
- c)  $\int \max\{1, x^2\} dx$

1.3. Uveďte príklad nespojitej funkcie  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , ku ktorej existuje primitívna funkcia.

1.4. Pomocou naznačenej substitúcie vypočítajte integrály:

- a)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}}$ ,  $t = x^2 - 4$ ;  
 b)  $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ ,  $t = \sin x$ ;  
 c)  $\int \sqrt{\cos^3 x} \sin x dx$ ,  $t = \cos x$ ;  
 d)  $\int x e^{x^2} dx$ ,  $t = x^2$ ;  
 e)  $\int \frac{dx}{x \ln x}$ ,  $t = \ln x$ ;  
 f)  $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$ ,  $t = x^3 + 1$ ;  
 g)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+4)}}$ ,  $t = \frac{\sqrt{x}}{2}$ ;  
 h)  $\int \frac{x dx}{1+x^4}$ ,  $t = x^2$ ;  
 i)  $\int \frac{dx}{e^x-1}$ ,  $t = e^{-x}$ ;  
 j)  $\int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}} dx$ ,  $t = \operatorname{arctg} e^x$ ;  
 k)  $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$ ,  $t = \frac{1}{x}$ ;  
 l)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$ ,  $t = \sqrt{x+1}$ ;  
 m)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ ,  $x = \sin^2 t$ ;  
 n)  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$ ,  $x = \frac{1}{t}$ .

1.5. Pomocou substitučnej metódy vypočítajte integrály:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\int \sqrt{4x-11} dx$                                     | b) $\int \frac{6 dx}{5-3x}$                                  |
| c) $\int \frac{x}{4+x^4} dx$                                  | d) $\int \frac{14 dx}{(2x+3)^8}$                             |
| e) $\int 10x(x^2+7)^4 dx$                                     | f) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^2}}$                          |
| g) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$                                | h) $\int x \sqrt[5]{4-x^2} dx$                               |
| i) $\int \sin^6 x \cos x dx$                                  | j) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} dx$                  |
| k) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$                                 | l) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2}}$                          |
| m) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$                      | n) $\int (x+2)e^{x^2+4x-5} dx$                               |
| o) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$                                | p) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$                           |
| q) $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$                             | r) $\int \frac{\operatorname{cotg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$   |
| s) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} dx$ | t) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{cotg} x-1}}$ |

$$\begin{array}{ll}
 \text{u)} \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx & \text{v)} \int \frac{e^{2x}}{4+e^x} dx \\
 \text{w)} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} & \text{x)} \int \frac{3 dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} \\
 \text{y)} \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx, \quad a^2 \neq b^2 & \text{z)} \int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx
 \end{array}$$

1.6. Použite naznačenie metódy per partes na výpočet integrálov:

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} \int \ln x dx, \quad u' = 1, \quad v = \ln x; \\
 \text{b)} \int \frac{\ln x dx}{x^2}, \quad u' = \frac{1}{x^2}, \quad v = \ln x; \\
 \text{c)} \int x \cos x dx, \quad u' = \cos x, \quad v = x; \\
 \text{d)} \int x e^{-2x} dx, \quad u' = e^{-2x}, \quad v = x; \\
 \text{e)} \int \operatorname{arccotg} x dx, \quad u' = 1, \quad v = \operatorname{arccotg} x; \\
 \text{f)} \int \frac{x}{\sin^2 x} dx, \quad u' = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad v = x; \\
 \text{g)} \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx, \quad u' = \frac{\cos x}{\sin^3 x}, \quad v = x; \\
 \text{h)} \int x \sinh x dx, \quad u' = \sinh x, \quad v = x; \\
 \text{i)} \int \sqrt{1-x^2} dx, \quad u' = 1, \quad v = \sqrt{1-x^2}; \\
 \text{j)} \int x \operatorname{tg}^2 x dx, \quad u' = \operatorname{tg}^2 x, \quad v = x.
 \end{array}$$

1.7. Použitím metódy per partes vypočítajte integrály:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \int x \ln x dx & \text{b)} \int x \sin 3x dx \\
 \text{c)} \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx & \text{d)} \int 5x e^{-4x} dx \\
 \text{e)} \int x \arctg x dx & \text{f)} \int \arccos x dx \\
 \text{g)} \int x \cosh x dx & \text{h)} \int \arcsin^2 x dx \\
 \text{i)} \int (2x+1) \cos\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) dx & \text{j)} \int \frac{x}{5^x} dx \\
 \text{k)} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx & \text{l)} \int 4x^3 \ln(x^5) dx \\
 \text{m)} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx & \text{n)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 \text{o)} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &
 \end{array}$$

1.8. Nech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je dvakrát diferencovateľná funkcia. Nájdite neurčitý integrál  $\int x f''(x) dx$ .

1.9. Použitím metódy per partes odvodte rekurentné vzťahy pre výpočet nasledujúcich integrálov:

$$\text{a)} I_n = \int (a^2 - x^2)^n dx, \quad a > 0 \qquad \text{b)} I_n = \int \cos^n x dx$$

$$c) I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a^2}} dx, \quad a > 0$$

**1.10.** Opakovaným použitím metody per partes vypočítajte integrály:

$$a) \int x^2 \sin x dx$$

$$b) \int e^x \cos 2x dx$$

$$c) \int (x^2 + 5) \cos x dx$$

$$d) \int x^2 \sinh x dx$$

$$e) \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$$

$$f) \int x \ln^2 x dx$$

$$g) \int \ln^2 x dx$$

$$h) \int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx$$

$$i) \int \sin(\ln x) dx$$

$$j) \int x^2 e^{3x} dx$$

$$k) \int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$$

$$l) \int x^n \ln x dx, \quad n \neq -1$$

$$m) \int e^{-x^2} x^5 dx$$

$$n) \int x^3 \cos x dx$$

**1.11.** Vypočítajte integrály rýdzoracionálnych funkcií:

$$a) \int \frac{dx}{x^2+2x}$$

$$b) \int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$c) \int \frac{dx}{x^3+x}$$

$$d) \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$e) \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$f) \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$$

$$g) \int \frac{2dx}{x^2+2x+5}$$

$$h) \int \frac{dx}{3x^2+5}$$

$$i) \int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$$

$$j) \int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$k) \int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$$

$$l) \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$$

**1.12.** Vypočítajte integrály racionálnych funkcií:

$$a) \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$$

$$b) \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$$

$$c) \int \frac{x^2}{x^2-6x+10} dx$$

$$d) \int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$$

$$e) \int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} dx$$

$$f) \int \frac{x^4}{x^4-1} dx$$

$$g) \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2} dx$$

$$h) \int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$i) \int \frac{x^2}{(x^2+2x+x)^2} dx$$

$$j) \int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx$$

$$k) \int \frac{x^4}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$$

$$l) \int \frac{dx}{x^6+4x^4+4x^2}$$

$$m) \int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx$$

$$n) \int \frac{x^9}{(x^4-1)^2} dx$$

$$o) \int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2+4x+3} dx$$

**1.13.** Pre aké hodnoty parametrov  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c^2 + d^2 > 0$ , je funkcia  $f(x) = \int \frac{ax+b}{cx+d} dx$  racionálna?

**1.14.** Vypočítajte integrály iracionálnych funkcií:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$          | b) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$                |
| c) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$                 | d) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$                  |
| e) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$ | f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt[4]{x})^3}$ |
| g) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$        | h) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$         |
| i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}$                  | j) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$                 |
| k) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3(x-3)}}$          | l) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-5x^2}}$               |
| m) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$          | n) $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$            |
| o) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$       | p) $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$                        |
| q) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx$            | r) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx$                |
| s) $\int \frac{dx}{\sqrt{25+9x^2}}$               | t) $\int \frac{3 dx}{\sqrt{9x^2-1}}$                |
| u) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$              | v) $\int \sqrt{1+x^2} dx$                           |
| w) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx$              | x) $\int \frac{x^3+5x^2+8x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx$  |
| y) $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx$          | z) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$                |

**1.15.** Nájdite nasledujúce neurčité integrály:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\int \sin^3 x \cos x dx$                                  | b) $\int \cos^5 2x \sin 2x dx$                       |
| c) $\int \operatorname{tg} 4x dx$                             | d) $\int \cos^2 2x dx$                               |
| e) $\int \cos^5 x dx$   | f) $\int \frac{dx}{\sin x}$                          |
| g) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$                        | h) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$                 |
| i) $\int \operatorname{cotg}^3 x dx$                          | j) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ |
| k) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$                                | l) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$                 |
| m) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$                          | n) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$                 |
| o) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$                     | p) $\int \sin 3x \sin 5x dx$                         |
| q) $\int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4} dx$               | r) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$                  |
| s) $\int \cosh^3 x dx$  | t) $\int \operatorname{tgh} x dx$                    |
| u) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx$ | v) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$     |

w)  $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$

x)  $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^3 x}{\sin 2x} dx$

y)  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 3} dx$

z)  $\int \frac{dx}{4 \cos x - 3 \sin x - 5}$

**1.16.** Kombináciou rôznych metód vypočítajte neurčité integrály:

a)  $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx$

b)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

c)  $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$

d)  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

e)  $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

f)  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx$

g)  $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$

h)  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

i)  $\int x \operatorname{arctg}(x+1) dx$

j)  $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}} \frac{dx}{x}$

k)  $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$

l)  $\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx$

m)  $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$

n)  $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

o)  $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$

p)  $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx$

q)  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

r)  $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$

s)  $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx$

t)  $\int \frac{x \operatorname{arccotg} x}{(1+x^2)^2} dx$

## Výsledky

**1.1.** a)  $x^3 + x^2 - x + c$ ; b)  $-\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} + c$ ; c)  $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + c$ ; d)  $\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x + c$ ;  
 e)  $\frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + c$ ; f)  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + c$ ; g)  $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c$ ;  
 h)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8\ln|x| + c$ ; i)  $\sin x + \frac{5}{4}x\sqrt[5]{x^3} + c$ ; j)  $-\cos x + \frac{3}{2}\arcsin x + c$ ;  
 k)  $\frac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x} + c$ ; l)  $x + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{10^x \ln 10} + c$ ; m)  $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c$ ;  
 n)  $\frac{1}{3}(x - \operatorname{arctg} x) + c$ ; o)  $-x - \operatorname{cotg} x + c$ ; p)  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + c$ ; q)  $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + c$ ;  
 r)  $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x} + c$ ; s)  $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$ ; t)  $\operatorname{tg} x - x + c$ ; u)  $\arcsin x + \operatorname{argsinh} x + c$ ;  
 v)  $\frac{1}{6}\operatorname{arctg} \frac{3}{2}x + c$ ; w)  $\operatorname{argsinh}(x+2) + c$ ; x)  $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + c$ . **1.2.** a)  $-\frac{x^2}{2} + c$  pre  $x < 0$  a  $\frac{x^2}{2} + c$  pre  $x \geq 0$ ; b)  $\frac{x^2}{2} + 2 + c$  pre  $x \leq 2$  a  $2x + c$  pre  $x > 2$ ; c)  $\frac{x^3}{3} + c$  pre  $x < -1$ ,  $x + \frac{2}{3} + c$  pre  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  a  $\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} + c$  pre  $x > 1$ . **1.3.** Príklad bol uvedený na prednáške. **1.4.** a)  $\sqrt{x^2 - 4} + c$ ; b)  $\ln|1 + \sin x| + c$ ; c)  $-\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + c$ ;  
 d)  $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$ ; e)  $\ln|\ln x| + c$ ; f)  $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3 + 1)^3} + c$ ; g)  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2} + c$ ; h)  $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + c$ ;  
 i)  $\ln|e^{-x} - 1| + c$ ; j)  $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + c$ ; k)  $\arccos \frac{1}{x} + c$ ; l)  $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + c$ ;  
 m)  $2\arcsin \sqrt{x} + c$ ; n)  $\arccos \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$ . **1.5.** a)  $\frac{1}{6}\sqrt{(4x-11)^3} + c$ ; b)  $-2\ln|5-3x| + c$ ;  
 c)  $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + c$ ; d)  $\frac{1}{(2x+3)^7} + c$ ; e)  $(x^2 + 7)^5 + c$ ; f)  $-\sqrt{3-x^2} + c$ ;  
 g)  $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + c$ ; h)  $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(4-x^2)^6} + c$ ; i)  $\frac{1}{7}\sin^7 x + c$ ; j)  $-2\sqrt{2+\cos x} + c$ ;

- k)  $\operatorname{arctg}(x+1)+c$ ; l)  $\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)+c$ ; m)  $-e^{\frac{1}{x}}+c$ ; n)  $\frac{1}{2}e^{x^2+4x-5}+c$ ;  
o)  $\frac{1}{5}\ln^5 x+c$ ; p)  $\sin(\ln x)+c$ ; q)  $-e^{\cos^2 x}+c$ ; r)  $2\ln|\sin\sqrt{x}|+c$ ; s)  $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}+c$ ;  
t)  $-2\sqrt{\cotg x-1}+c$ ; u)  $\frac{\arcsin 2x}{\ln 2}+c$ ; v)  $e^x-4\ln|4+e^x|+c$ ; w)  $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$ ;  
x)  $3\arcsin(\ln x)+c$ ; y)  $\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+c$ ; z)  $\frac{2}{3}\ln^{3/2}(x+\sqrt{1+x^2})+c$ . **1.6.**  
a)  $x\ln x-x+c$ ; b)  $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+c$ ; c)  $x\sin x+\cos x+c$ ; d)  $-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$ ;  
e)  $x\operatorname{arccotg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$ ; f)  $-x\cotg x+\ln|\sin x|+c$ ; g)  $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\cotg x+c$ ;  
h)  $x\cosh x-\sinh x+c$ ; i)  $\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+c$ ; j)  $xtg x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+c$ .  
**1.7.** a)  $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$ ; b)  $-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c$ ; c)  $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+c$ ;  
d)  $-\frac{5}{4}xe^{-4x}-\frac{5}{16}e^{-4x}+c$ ; e)  $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c$ ; f)  $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$ ;  
g)  $x\sinh x-\cosh x+c$ ; h)  $x\arcsin^2 x+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2x+c$ ;  
i)  $-\frac{2x+1}{5}\sin(\frac{\pi}{3}-5x)+\frac{2}{25}\cos(\frac{\pi}{3}-5x)+c$ ; j)  $-\frac{x5^{-x}}{\ln 5}-\frac{5^{-x}}{\ln^2 5}+c$ ; k)  $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+c$ ;  
l)  $5x^4\ln x-\frac{5}{4}x^4+c$ ; m)  $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+c$ ; n)  $c-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$ ;  
o)  $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c$ . **1.8.** pomocou per partes,  $xf'(x)-f(x)+c$ .  
**1.9.** a)  $I_n = \frac{1}{2n+1}x(a^2-x^2)^n + \frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}$ ,  $n \neq -\frac{1}{2}$ ; b)  $I_n = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ,  $n \neq 0$  alebo použitím substitúcie  $x = t - \frac{\pi}{2}$  a rekurentného vzťahu pre  $\int \sin^n x dx$ ; c) použitím  $u' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ,  $v = x^{n-1}$ ,  $I_n = \frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - a^2\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ,  $n \neq 0$ . **1.10.** a)  $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$ ; b)  $\frac{e^x}{5}(\cos 2x+2\sin 2x)+c$ ;  
c)  $(x^2+3)\sin x+2x\cos x+c$ ; d)  $(x^2+2)\cosh x-2x\sinh x+c$ ;  
e)  $-e^{-x}(x^2+5)+c$ ; f)  $\frac{1}{2}x^2(\ln^2 x-\ln x)+\frac{1}{4}x^2+c$ ; g)  $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$ ;  
h)  $-\frac{8}{17}e^{-2x}(\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2})+c$ ; i)  $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+c$ ; j)  $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+c$ ;  
k)  $\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x+c$ ; l)  $\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x-\frac{1}{n+1})+c$ ; m)  $c-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)+c$ ;  
n)  $(x^3-6x)\sin x+(3x^2-6)\cos x+c$ . **1.11.** a)  $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+c$ ;  
b)  $\ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}+c$ ; c)  $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$ ; d)  $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^2}{(x+2)^4}\right|+c$ ; e)  $\frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$ ;  
f)  $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+c$ ; g)  $\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+c$ ; h)  $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)+c$ ;  
i)  $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+c$ ; j)  $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$ ; k)  $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$ ;  
l)  $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c$ . **1.12.** a)  $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+c$ ;  
b)  $5x+\ln\left|\frac{\sqrt{x}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right|+c$ ; c)  $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)+c$ ;  
d)  $x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+c$ ; e)  $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c$ ; f)  $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c$ ;  
g)  $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}+c$ ; h)  $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+c$ ; i)  $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)+c$ ;  
j)  $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$ ; k)  $\frac{16}{3}\ln|x+2|+c$ ;  
l)  $-\frac{1}{4}-\frac{x}{8(x^2+2)}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c$ ; m)  $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-32x^2+128x-256\ln|x+2|+c$ ;  
n)  $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+c$ ; o)  $(\frac{x^2}{3}-\frac{14}{3}x+37)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+c$ . **1.13.** ak  $c=0$  alebo  $ad=bc$ .  
**1.14.** a)  $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+c$ ; b)  $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+c$ ; c)  $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+c$

c; d)  $3 \left( \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln |1 + \sqrt[3]{x}| \right) + c$ ; e)  $6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3 \ln(1+t^2) - 6 \operatorname{arctg} t + c$ , kde  $t = \sqrt[6]{x+1}$ ; f)  $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + c$ ; g)  $\frac{x}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + c$ ; h)  $-6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| + c$ ; i)  $\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{x-4}}{2} \right) + c$ ; j)  $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c$ ; k)  $2\sqrt{\frac{x-3}{x-2}} + c$ ; l)  $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{5x+1}{4} + c$ ; m)  $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + c$ ; n)  $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}} + c$ ; o)  $2\sqrt{1 + \ln x} - \ln |\ln x| + 2 \ln |\sqrt{1 + \ln x} - 1| + c$ ; p)  $\frac{x+1}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + c$ ; q)  $2\sqrt{x^2 + x} + c$ ; r)  $\sqrt{x^2 + 2x} + \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + c$ ; s)  $\frac{1}{3} \ln |3x + \sqrt{25 + 9x^2}| + c$ ; t)  $\ln |3x + \sqrt{9x^2 - 1}| + c$ ; u)  $-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$ ; v)  $\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})) + c$ ; w)  $\frac{12}{13}(1 + \sqrt[4]{x})^{13/3} - \frac{18}{5}(1 + \sqrt[4]{x})^{10/3} + \frac{36}{7}(1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{4/3} + c$ ; x)  $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 1\right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - \frac{3}{2} \ln |x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + c$ ; y)  $\left(\frac{63}{256}x - \frac{21}{128}x^3 + \frac{21}{160}x^5 - \frac{9}{80}x^7 + \frac{1}{10}x^9\right) \sqrt{1+x^2} - \frac{63}{256} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$ ; z)  $\frac{2x^2+1}{3x^3} \sqrt{x^2-1} + c$ . **1.15.** a)  $\frac{1}{4} \sin^4 x + c$ ; b)  $-\frac{\cos^6 x}{12} + c$ ; c)  $-\frac{1}{4} \ln |\cos 4x| + c$ ; d)  $\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + c$ ; e)  $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c$ ; f)  $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$ ; g)  $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + c$ ; h)  $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x| + c$ ; i)  $-\frac{1}{2 \sin^2 x} - \ln |\sin x| + c$ ; j)  $-\ln |\sin x + \cos x| + c$ ; k)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + c$ ; l)  $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$ ; m)  $-x + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + c$ ; n)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + c$ ; o)  $\operatorname{arctg} (1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + c$ ; p)  $-\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + c$ ; q)  $-\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{x}{2} + c$ ; r)  $-\frac{\cos 2x}{8} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} + c$ ; s)  $\frac{\sinh^3 x}{3} + \sinh x + c$ ; t)  $\ln |\cosh x| + c$ ; u)  $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + c$ ; v)  $4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + c$ ; w)  $\frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-\sqrt{2} \cos x}{1+\sqrt{2} \cos x} \right| + c$ ; x)  $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 x + c$ ; y)  $\frac{x}{10} + \frac{3}{20} \ln \left( \frac{(\operatorname{tg} x - 3)^2}{1 + \operatorname{tg} x} \right) + c$ ; z)  $\frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-\sqrt{2} \cos x}{1+\sqrt{2} \cos x} \right| + c$ . **1.16.** a)  $\frac{1}{2} \ln^2 \operatorname{tg} x + c$ ; b)  $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$ ; c)  $3[(2 - \sqrt[3]{x^2}) \cos \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} \sin \sqrt[3]{x}] + c$ ; d)  $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c$ ; e)  $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + c$ ; f)  $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + c$ ; g)  $x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + c$ ; h)  $-2 \arcsin e^{-x/2} + c$ ; i)  $-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x+1) + c$ ; j)  $3[\ln |u| - \ln(1 + \sqrt{1-u^2}) - \arcsin u] + c$ , kde  $u = \sqrt[3]{x}$ ; k)  $\frac{x}{\ln x} + c$ ; l)  $\frac{\sqrt{2}}{2} [\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}} + \ln(\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x)] + c$ ; m)  $\frac{e^x}{1+x} + c$ ; n)  $x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + c$ ; o)  $-\frac{1}{24}(15 + 10x + 8x^2) \sqrt{x(1-x)} + \frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x} + c$ ,  $x \in (0, 1)$ ; p)  $-\frac{4}{3} \sqrt{1-x\sqrt{x}} + c$ ,  $x > 0$ ; q)  $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \arcsin^2 x + \ln |x| + c$ ,  $0 < |x| < 1$ ; r)  $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1) \right) + c$ ; s)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x} + c$ ; t)  $-\frac{x}{4(1+x^2)} - \frac{1-x^2}{4(1+x^2)} \operatorname{arctg} x + c$ .