Vzorové vypracovanie niektorých úloh

1. *Riešte v* $\mathbb{R}$*:* $\sqrt{x^2-4x-12} > 3+2x$

Podmienka: Keďže výraz pod odmocninou musí byť nezáporný, tak $x^2-4x-12 = (x-6)(x+2) \geq 0$, čo platí pre všetky $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 6, +\infty)$. Vyšetrime hodnotu výrazu na pravej strane nerovnosti.

Ak $3+2x < 0$, t.j. $x < -\frac{3}{2}$, potom druhá odmocnina z nezáporného čísla je vždy väčšia ako ľubovoľné záporné číslo, a preto nerovnica je splnená pre všetky čísla z intervalu $[(-\infty,-2\rangle \cup \langle 6,+\infty)] \cap (-\infty, -\frac{3}{2}) = (-\infty, -2\rangle$.

Ak $3+2x \geq 0$, t.j. $x \geq -\frac{3}{2}$, potom umocnením oboch strán nerovnice na druhú dostaneme

$$\begin{aligned} x^2-4x-12 &> 9+12x+4x^2 \\ 0 &> 3x^2+16x+21 \\ 0 &> 3(x+3)\left(x+\frac{7}{3}\right). \end{aligned}$$

Tejto nerovnosti vyhovujú čísla $x \in \left(-3, -\frac{7}{3}\right)$, a preto riešením tejto vetvy je

$$x \in \left(-3, -\frac{7}{3}\right) \cap \left\langle -\frac{3}{2}, +\infty\right) \cap [(-\infty,-2\rangle \cup \langle 6,+\infty)] = \emptyset.$$

Zhrnutím teda dostávame, že riešením pôvodnej nerovnosti je $(-\infty,-2\rangle \cup \emptyset = (-\infty,-2\rangle$.

2. *Riešte v* $\mathbb{R}$*:* $\log_2(9-2^x) = 3-x$

Najprv stanovíme podmienky, za ktorých má uvažovaná rovnosť zmysel. Keďže logaritmus je definovaný pre kladné reálne čísla, tak $9-2^x > 0$, teda $9 > 2^x$, z čoho dostávame $x < \log_2 9$. Za platnosti tejto podmienky upravíme danú rovnicu nasledovne

$$\begin{aligned} \log_2(9-2^x) &= 3-x \\ \log_2(9-2^x) &= \log_2 2^{3-x} \\ 9-2^x &= 2^{3-x} \\ 9-2^x &= \frac{8}{2^x} \\ (2^x)^2 - 9\cdot 2^x + 8 &= 0. \end{aligned}$$

Použitím substitúcie $2^x = t$ sa posledná rovnica prevedie na kvadratickú rovnicu $t^2-9t+8 = 0$, ktorá sa dá ekvivalentne zapísať v tvare $(t-8)(t-1) = 0$, čiže jej korene sú $t_1 = 8$ a $t_2 = 1$. Ak sa vrátime späť k pôvodnej premennej, potom riešeniami pôvodnej rovnice sú také čísla, že $2^{x_1} = 8$ a $2^{x_2} = 1$, teda $x_1 = 3$ a $x_2 = 0$. Keďže obe tieto čísla vyhovujú podmienke $x < \log_2 9$, skúška správnosti potvrdí, že riešením sú obe čísla 3 a 0.

3. *Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla* n *platí* $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na n. Ak $n = 1$, potom $2! = 2 < 2^2\cdot(1!)^2 = 4$, čo zrejme platí. Nech teda výrok platí pre nejaké prirodzené číslo k, t.j. $(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$. Potom pre $k+1$ máme

$$\begin{aligned} [2(k+1)]! &= (2k+2)(2k+1)(2k)! \overset{IP}{<} (2k+2)(2k+1)\cdot 2^{2k}(k!)^2 < (2k+2)(2k+2)\cdot 2^{2k}(k!)^2 \\ &= 2^2(k+1)^2\cdot 2^{2k}(k!)^2 = 2^{2k+2}[(k+1)k!]^2 = 2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2, \end{aligned}$$

čo sme chceli ukázať. Na základe vety o matematickej indukcii daný výrok platí pre všetky prirodzené čísla.

4. *Vyšetrite ohraničenosť množiny* $M = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{n^2+2}{2n^2+1} + (-1)^n \sin \frac{2n!+8}{3^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Na vyšetrenie ohraničenosti použijeme vetu, že množina M je ohraničená práve vtedy, keď existuje kladné reálne číslo K také, že pre všetky $x \in M$ platí $|x| \le K$. Preto

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+2}{2n^2+1} + (-1)^n \sin \frac{2n!+8}{3^n}\right| &\le \left|\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right| + \left|(-1)^n \sin \frac{2n!+8}{3^n}\right| \\ &= \frac{n^2+2}{2n^2+1} + |(-1)^n| \cdot \left|\sin \frac{2n!+8}{3^n}\right| \le \frac{n^2+2}{2n^2+1} + 1,\end{aligned}$$

kde sme využili vlastnosti absolútnej hodnoty a ohraničenosť funkcie sínus. Ostáva nám vyšetriť ohraničenosť výrazu $\frac{n^2+2}{2n^2+1}$. Avšak pre všetky prirodzené čísla n platí

$$\frac{n^2+2}{2n^2+1} \le \frac{n^2+2}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\left|\frac{n^2+2}{2n^2+1} + (-1)^n \sin \frac{2n!+8}{3^n}\right| \le \frac{n^2+2}{2n^2+1} + 1 \le \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2},$$

teda množina M je ohraničená.

5. *Dokážte, že* $\sup\left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{n-3}{4n+20}, n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{1}{4}$.

Ukážme, že $\frac{1}{4}$ je najmenšie horné ohraničenie množiny $M = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{n-3}{4n+20}, n \in \mathbb{N}\right\}$. To, že je horným ohraničením, dokazuje nasledujúca postupnosť ekvivalentných úprav

$$\frac{n-3}{4n+20} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(n-3) \le 4n+20 \Leftrightarrow -12 \le 20,$$

čo zrejme platí pre každé prirodzené číslo n. Aby sme ukázali, že $\frac{1}{4}$ je najmenšie horné ohraničenie množiny M, zoberme ľubovoľné reálne číslo $t < \frac{1}{4}$. Hľadáme také prirodzené číslo n_0, aby platila nerovnosť

$$\frac{n_0-3}{4n_0+20} > t.$$

Úpravou dostávame

$$\frac{n_0-3}{4n_0+20} > t \Leftrightarrow n_0 - 3 > 4tn_0 + 20t \Leftrightarrow n_0(1-4t) > 20t+3 \Leftrightarrow n_0 > \frac{20t+3}{1-4t},$$

pretože $1-4t > 0$. Ak však $20t+3 \le 0$, t.j. $t \le -\frac{3}{20}$, potom hľadané $n_0 = 1$. Ak $t \in (-\frac{3}{20}, \frac{1}{4})$, tak stačí položiť $n_0 = \left[\frac{20t+3}{1-4t}\right] + 1$.