Prednáška 6

Diferenciálny počet funkcie jednej premennej

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Jozef Kiseľák
(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných
31. marca 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Agenda

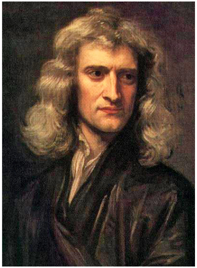
1. **Diferenciálny kalkulus funkcie jednej premennej**

2. **Taylorov vzorec**

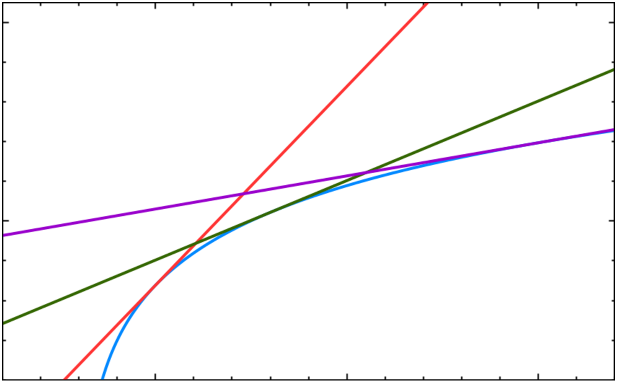
História

Podnetom na vznik diferenciálneho počtu boli problémy mechaniky (napr. určenie okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa telesa), problémy geometrie (napr. nájdenie dotyčnice ku krivkám).

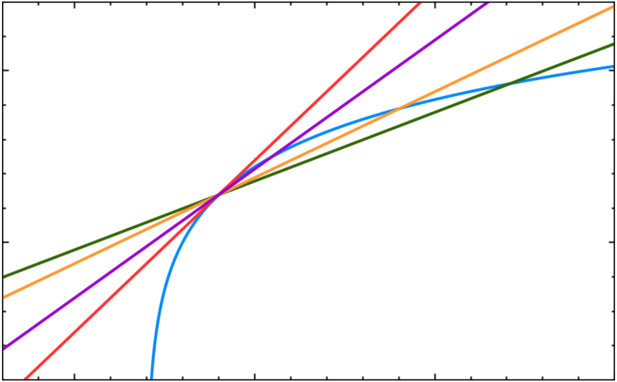
Riešenie týchto a mnoho ďalších problémov sa zavŕšilo v 17. storočí vznikom diferenciálneho počtu, zavedením pojmu derivácie funkcie. Zakladateľmi tejto teórie sú nezávisle na sebe I. Newton (1643–1727) a G.W. Leibniz (1646–1716).



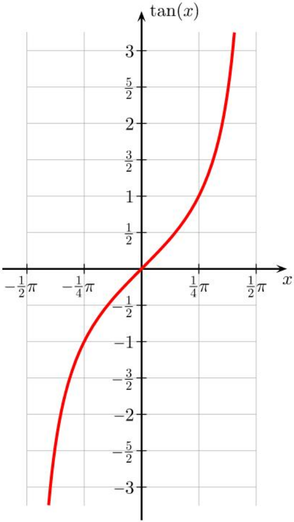
Vývoj ekonomiky a dotyčnica ku grafu funkcie

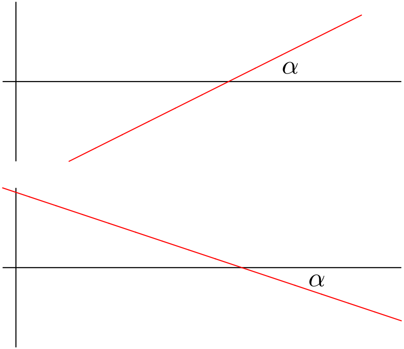


Sečnice grafu funkcie



Uhol priamky a smernica

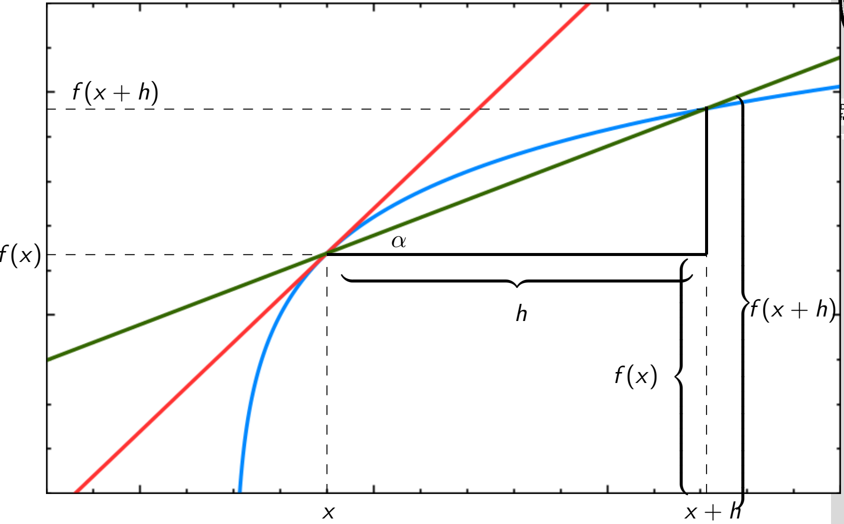




$$y = kx + q$$

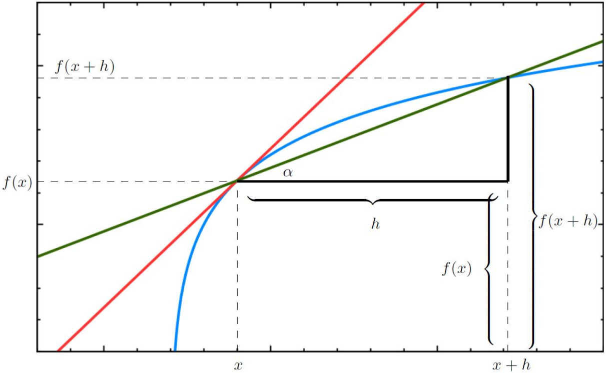
$$k = \operatorname{tg} \alpha \qquad \alpha = \operatorname{arctg} k$$

Smernica sečnice grafu funkcie



Smernica sečnice grafu funkcie

$$\Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta f(x,h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Smernica dotyčnice

funkcia f

$$F_{f,x}(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D(F_{f,x}) = (D(f)-x) \setminus \{0\}$$

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} F_{f,x}(h) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\Delta f(x,h)}{h}$$

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0-} F_{f,x}(h) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\Delta f(x,h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} F_{f,x}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x,h)}{h}$$

Derivácia funkcie

Nech funkcia f je definovaná na (c_1, c_2) pre $c_1 < x_0 < c_2$.

Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

potom túto limitu nazývame deriváciou funkcie f v bode x_0 a označujeme ju $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x_0, h)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

- operáciu výpočtu derivácie nazývame derivovanie
- ak $y = f(x)$, namiesto f' môžeme písať y'
- keďže $\lim\limits_{x\to x_0} F_{f,x_0}(x - x_0) = \lim\limits_{h\to 0} F_{f,x_0}(h)$, tak
  $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivácia a spojitosť

Veta 1.1

Nech funkcia f má v bode x_0 deriváciu. Potom funkcia f je v bode x_0 spojitá.

Veta 1.2

Nech funkcia f má v bode x_0 deriváciu sprava. Potom funkcia f je v bode x_0 spojitá sprava.

Veta 1.3

Nech funkcia f má v bode x_0 deriváciu zľava. Potom funkcia f je v bode x_0 spojitá zľava.

$$(\operatorname{sgn} x)'_{+x=0} = \lim_{h\to 0+} \frac{\operatorname{sgn} h}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} = +\infty$$

$$(\operatorname{sgn} x)'_{-x=0} = \lim_{h\to 0-} \frac{\operatorname{sgn} h}{h} = \lim_{h\to 0-} -\frac{1}{h} = +\infty$$

Diferencovateľnosť a diferenciál funkcie

Nech funkcia f je definovaná na (c_1, c_2), kde $c_1 < x_0 < c_2$.

$$\triangle f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

diferencia, **prírastok funkcie** f **v** x_0 **pre prírastok argumentu** h

Je možné diferenciu funkcie f v bode x_0 nahradiť pre malé hodnoty prírastku argumentu h (h blízke číslu nula) priamou úmerou prírastku argumentu h (lineárnou funkciou premennej h)?

??? $\triangle f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \approx A \cdot h$, kde $A \in \mathbb{R}$ a h malé ???

Diferencovateľnosť a diferenciál funkcie

Nech funkcia f je definovaná na (c_1, c_2), kde $c_1 < x_0 < c_2$.

Hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode x_0, ak existuje konštanta $A \in \mathbb{R}$ a funkcia ω spojitá v bode 0 s hodnotou $\omega(0) = 0$ také, že pre hodnoty h z $(-\delta_1, \delta_2)$, kde $\delta_1, \delta_2 > 0$, (pre h malé) prírastok funkcie f v bode x_0 sa dá vyjadriť v tvare

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + h \cdot \omega(h).$$

Ak v definícii položíme $h = x - x_0$, tak dostaneme, že pre každé x z (c_3, c_4), kde $c_3 < x_0 < c_4$, platí

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + (x - x_0) \cdot \omega_1(x),$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a funkcia ω_1 je spojitá v bode x_0 s hodnotou $\omega_1(x_0) = 0$.

Výraz $A \cdot h$, resp. $A(x - x_0)$ nazývame diferenciálom funkcie f v bode x_0 a označujeme ho $\mathbf{d}f(x_0, h)$, resp. $\mathbf{d}f(x_0, x)$.

diferencovateľnosť: $\quad \triangle f(x_0, h) = \mathbf{d}f(x_0, h) + h \cdot \omega(h)$

Diferencovateľnosť a diferenciál funkcie

Diferenciál funkcie f v bode x_0 je lineárnou funkciou prírastku h argumentu x, resp. lineárnou funkciou výrazu (prírastku argumentu) $x - x_0$.

Veta 1.4

Funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 práve vtedy, ak má deriváciu v bode x_0. Pričom platí, že $\mathbf{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$.

iné označenie: $\mathbf{d}f(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0)$

Funkciu, ktorá má deriváciu v každom bode intervalu (a, b) nazývame diferencovateľnou na intervale (a, b).

Ak je funkcia f diferencovateľná na intervale (a, b) a existuje derivácia $f'_+(a)$ a $f'_-(b)$, tak ju nazývame diferencovateľnou na intervale $\langle a, b\rangle$.

Základné vety kalkulu

Primitívna funkcia k $f : I \to \mathbb{R}$ môžeme definovať aj pomocou určitého integrálu, lebo $f \in \mathcal{R}[I]$ implikuje $\forall x \in I$ je $f \in \mathcal{R}[a, x]$. Hodnota integrálu $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ závisí od polohy bodu x v I, t.j. integrál je funkciou premennej x. Označme ju $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a nazveme ju integrál ako funkcia hornej hranice. Podobne môžeme zaviesť integrál ako funkcia dolnej hranice $G(x) := \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in I$. Zrejme $G(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t = -F(x)$.

Veta 1.5

1. *Nech f má deriváciu f' z $\mathcal{R}[a, b]$. Potom*
$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$
2. *Nech $f \in \mathcal{R}[a, b]$ potom $F \in C([a, b])$ a navyše, ak f je spojitá v bode $\xi \in [a, b]$, potom je F diferencovateľná v ξ a platí $F'(\xi) = f(\xi)$.*

Derivácia vyššieho rádu

Nech funkcia f má na okolí bodu x_0 derivácie

$$f', f'', \dots, f^{(n-1)}, n \geq 2.$$

Ak funkcia $f^{(n-1)}$ má deriváciu v bode $x_0 \in I$, tak túto deriváciu nazývame $n-$tou deriváciou alebo deriváciou $n-$tého rádu funkcie f v bode x_0 a označujeme ju

$$f^{(n)}(x_0),\ \frac{\mathbf{d}^n f}{\mathbf{d}x^n}(x_0) \text{ alebo } \left(f^{(n)}(x)\right)_{x=x_0}.$$

Podľa definície, ak má funkcia f v bode x_0 deriváciu $n-$tého rádu, tak

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h},\ n \geq 2.$$

Zaveďme definitoricky pojem nultej derivácie funkcie f nasledovne: $f^{(0)} = f$.

Diferencovateľnosť a diferenciál $n-$tého rádu funkcie

Funkciu, ktorá má v bode x_0 deriváciu $n-$tého rádu nazývame $n-$**krát diferencovateľnou funkciou v bode** x_0**.**

Ak funkcia f je $n-$krát diferencovateľná v každom bode intervalu I, tak hovoríme, že **funkcia** f **je** $n-$**krát diferencovateľná na intervale** I**.**

Ak funkcia f má na intervale I deriváciu každého rádu (t.j. pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $f^{(n)}$), tak ju nazývame **nekonečne veľa krát diferencovateľnou na intervale** I**.**

Nech funkcia f je $n-$krát diferencovateľná v bode x_0.

Diferenciálom $n-$tého rádu (alebo $n-$tým diferenciálom) funkcie f v bode x_0 nazývame výraz

$$d^n f(x_0, x) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = f^{(n)}(x_0)(dx)^n.$$

Derivácia vyššieho rádu a operácie

Veta 1.6

Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a funkcie f, g majú v každom bode intervalu I derivácie do takého rádu, aby ich derivácie vystupujúce v tvrdeniach existovali. Potom platí

a) $(f^{(m)})^{(n)}(x) = f^{(n+m)}(x)$, $x \in I$,

b) $(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$, $x \in I$,

c) $(c \cdot f)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x)$, $x \in I$, $c \in \mathbb{R}$.

Veta 1.7 (Leibnizov vzorec)

Nech funkcie f, g majú v každom bode intervalu I deriváciu $n-$tého rádu, potom funkcia $f \cdot g$ má v každom bode intervalu I deriváciu $n-$tého rádu a platí

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x) \cdot g^{(i)}(x),\ x \in I.$$

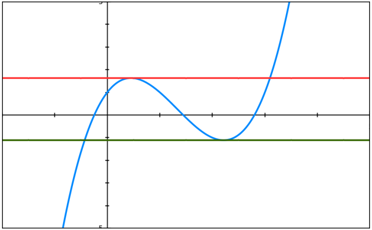
Fermat

V bode $x_0 \in (a, b)$ má funkcia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ lokálne maximum, ak $(\exists \varepsilon > 0)$ tak, že $(\forall x \in (a, b))\, |x - x_0| < \varepsilon \implies f(x_0) \geq f(x)$.

Veta 1.8 (Fermatova veta)

Nech funkcia f je definovaná na intervale $I = (a, b)$ a má v bode $x_0 \in I$ lokálne minimum alebo lokálne maximum. Potom buď $f'(x_0) = 0$ alebo $f'(x_0)$ neexistuje (vlastná).

Pierre de Fermat
1601 - 1665



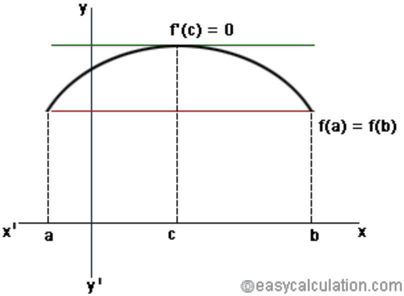
Rolle

Bod x_0, v ktorom $f'(x_0) = 0$, sa nazýva stacionárnym bodom funkcie f.

Veta 1.9 (Rollova veta)

Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, má deriváciu na intervale (a, b) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje stacionárny bod $c \in (a, b)$.

Michel Rolle
1652 - 1719

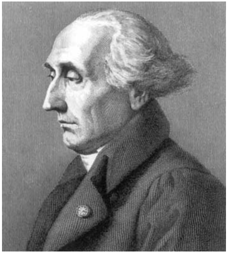


Lagrange

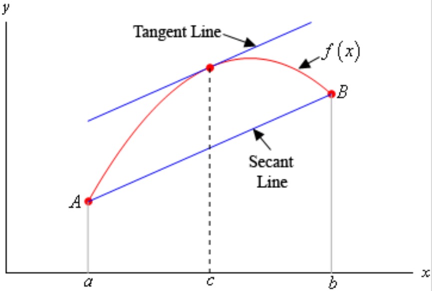
Veta 1.10 (Lagrangeova veta o strednej hodnote (o prírastku))

Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a má deriváciu na intervale (a, b). Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ resp. } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Joseph Louis Lagrange
1736 - 1813



Dôsledky Lagrangeovej vety

Dôsledok 1.1

Nech funkcia f je diferencovateľná na intervale (a, b) a $f'(x) = 0$ pre každé $x \in (a, b)$. Potom existuje $d \in \mathbb{R}$ také, že $f(x) = d$ pre každé $x \in (a, b)$.

Dôsledok 1.2

Nech funkcie f, g sú diferencovateľné na intervale (a, b) a $f'(x) = g'(x)$ pre každé $x \in (a, b)$. Potom existuje $d \in \mathbb{R}$ také, že $f(x) = g(x) + d$ pre každé $x \in (a, b)$.

Dôsledky Lagrangeovej vety

Dôsledok 1.3

Nech funkcie f, g sú diferencovateľné na intervale $(x_0, +\infty)$ a sú spojité na intervale $\langle x_0, +\infty)$, pričom vyhovujú podmienkam $f(x_0) \leq g(x_0)$ a $f'(x) < g'(x)$ pre každé $x \in (x_0, +\infty)$. Potom pre každé $x \in (x_0, +\infty)$ je $f(x) < g(x)$.

Dôsledok platí aj pre konečný interval, t.j. pre interval (x_0, b), kde $b \in \mathbb{R}$!

Dôsledok 1.4

Nech funkcie F, G sú diferencovateľné na intervale $(-\infty, x_0)$ a sú spojité na intervale $(-\infty, x_0\rangle$, pričom vyhovujú podmienkam $F(x_0) \leq G(x_0)$ a $G'(x) < F'(x)$ pre každé $x \in (-\infty, x_0)$. Potom pre každé $x \in (-\infty, x_0)$ je $F(x) < G(x)$.

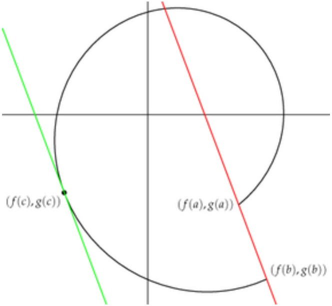
Dôsledok platí aj pre konečný interval, t.j. pre interval (b, x_0), kde $b \in \mathbb{R}$!

Cauchy

Veta 1.11 (Cauchyho veta o prírastku)

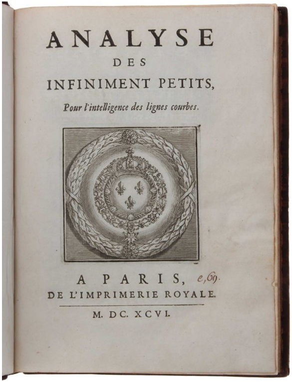
Nech funkcie f, g sú spojité na intervale $\langle a, b\rangle$, diferencovateľné na intervale (a, b) a pre každé $x \in (a, b)$ je $g'(x) \neq 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Augustin Louis Cauchy
1789 - 1857



l'Hospital

Guillaume Franoçois Antoine
Marquis de l'Hôpital
1661 - 1704



Ľahké l'Hospitalovo pravidlo

Veta 1.12 (Ľahké l'Hospitalovo pravidlo)

Majme funkcie f, g a $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Ak

1. $\dfrac{f'}{g'}$ *existuje pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ dostatočne blízke x_0, resp. pre všetky dostatočne veľké alebo malé $x \in \mathbb{R}$,*
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$,

tak existuje aj $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí, že

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Ťažké l'Hospitalovo pravidlo

Veta 1.13 (Ťažké l'Hospitalovo pravidlo)

Majme funkcie f, g a $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Ak

1. $\dfrac{f'}{g'}$ *existuje pre všetky* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ *dostatočne blízke* x_0, *resp. pre všetky dostatočne veľké alebo malé* $x \in \mathbb{R}$,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$,
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$,

tak existuje aj $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí, že*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Taylorov vzorec

Vieme aproximovať danú funkciu viac premenných na nejakom okolí daného bodu polynómom (polynomickou funkciou) viac premenných? Kvôli tomu si zavedieme pojmy Taylorov polynóm a Taylorov rad. Pre funkciu jednej premennej sme mali nasledujúce závery.

- Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f v bode x_0 je polynóm tvaru

$$T_n(f, x_0; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

  pričom má vlastnosť, že $T_n^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(f, x_0; x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, \dots, n$.
- Taylorov polynóm sme používali k približnému výpočtu funkčných hodnôt funkcie f na okolí daného bodu a.
- Chybu, akej sa dopustíme, ak na okolí bodu x_0 nahradíme funkciu f jej n-tým Taylorovým polynómom, určuje zvyšok R_n (a tým aj postupnosť zvyškov), daný Taylorovým vzorcom

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + R_n(x), \ x \in \mathcal{O}(x_0). \qquad (1)$$

Veta 2.1 (O najlepšej lokálnej aproximácii funkcie polynómom)

Nech f má vo bode x_0 deriváciu n-tého rádu a nech $Q_n(x)$ je polynóm stupňa najviac n, pričom $T_n(f, x_0; x) \neq Q_n(x)$, potom existuje $\mathcal{O}(x_0)$: $\forall x \neq x_0$ je $|f(x) - T_n(f, x_0; x)| \leq |f(x) - Q_n(x)|$.

Ak funkcia je definovaná na $\mathcal{O}(x_0)$ a má v tomto bode deriváciu ľubovoľného rádu, je prirodzené rozšíriť Taylorov polynóm na nekonečný mocninový rad.

Definícia 2.1

Nech funkcia f má v bode x_0 deriváciu ľubovoľného rádu. Mocninový rad

$$T(f, x_0; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame Taylorov rad funkcie f v bode x_0.

Veta 2.2

Nech funkcia $f : \mathcal{O}(x_0) \to \mathbb{R}$ *je n-krát diferencovateľná na* $\mathcal{O}(x_0)$ *a má v každom* $x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ $(n+1)$*-tú deriváciu. Potom* $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$ *platí*

$$f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right] + R_n(x),$$

kde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\xi \in (x_0, x)$ *je tzv. Lagrangeov tvar zvyšku.*

Veta 2.3

Taylorov rad $T(f, x_0; x)$ *nekonečne diferencovateľnej funkcie v bode* x_0 *konverguje na nejakom intervale* J *obsahujúcom bod* x_0 *k funkcii* f *práve vtedy, ak postupnosť zvyškov* $R_n(x)$ *konverguje k nule pre* $x \in J$.

Funkciu $f : I \to \mathbb{R}$ nazveme reálna analytická[1] ak sa dá lokálne definovať konvergentným mocninovým radom. Otázka je, či existuje nekonečne diferencovateľná funkcia, ktorá nie je analytická.

Príklad 2.1

Majme funkciu φ, kde $\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ *Dá sa ukázať, že funkcia φ je nekonečne diferencovateľná na $\mathbb{R}$, ale súčet odpovedajúceho Taylorovho radu je rôzny od φ.*

[1] Nekonečne diferencovateľná funkcia, ktorej Taylorov rad konverguje v každom bode.

Veta 2.4

Nech funkcia f je nekonečne diferencovateľná na otvorenom intervale J a existuje konštanta $M > 0$ taká, že

$$(\forall n \geq 0)(\forall x \in J)\ |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Potom Taylorov rad funkcie f v bode x_0 konverguje k funkcii f na intervale J.

Veta 2.5

Nech na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$, resp. $\mathbb{R}$, je funkcia f súčtom mocninového radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Potom je tento rad Taylorov rad funkcie f v bode x_0.

e^x	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\ x^{2n+1}}{4^n\ (n!)^2\ (2n+1)}$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{16} + \dots$	$x \in \langle -1, 1 \rangle$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ x^{2n+1}}{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$x \in (-1, 1)$
$\ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$x \in (-1, 1 \rangle$
$\ln(1-x)$	$\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$	$x \in \langle -1, 1)$