Prednáška 9

Diferenciálny počet funkcií viacerých premenných

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Jozef Kiseľák

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných
5. mája 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Parciálna derivácia funkcie viac premenných

Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál

Derivácie a diferenciály vyšších rádov

Lokálne extrémy funkcie viac premenných

Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Agenda

1. Parciálna derivácia funkcie viac premenných
2. Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
3. Derivácie a diferenciály vyšších rádov
4. Lokálne extrémy funkcie viac premenných
5. Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie

Geometricky číslo $f'(x_0) = \tan\alpha$ predstavuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $T = (x_0, f(x_0))$.

- U funkcií dvoch a viac premenných môžeme vyšetrovať obdobný podiel prírastkov, avšak k uvažovanému bodu sa možno blížiť z nekonečne veľa smerov[1].
- Najrpv sa budeme približovať po rovnobežke s niektorou súradnicovou osou (odpovedajúcej nezávislej premennej).
- Teda k bodu $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ (v prípade funkcie dvoch premenných) sa budeme blížiť v smere súradnicových osí x a y.
- Takto sa dostaneme k pojmu parciálna derivácia funkcie viac premenných v danom bode **a**.
- Pri "parciálnom" (čiastočnom) derivovaní sa vlastne na jednu z premenných x, y pozeráme ako na konštantu a podľa druhej derivujeme.
- Ak sa budeme blížiť k bodu **a** v smere ľubovoľného daného vektora $\vec{\mathbf{u}}$, dostaneme sa k pojmu derivácia funkcie v bode v smere vektora $\vec{\mathbf{u}}$ (smerová derivácia)[2].

[1] To sme už videli v predchádzajúcich častiach pri pojme limita.

[2] Je to prirodzené zovšeobecnenie pojmu parciálna derivácia funkcie v bode.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Uvažujme funkciu $z = f(x, y)$ s definičným oborom $D(f)$, grafom G a bod $\mathbf{a} = (x_0, y_0) \in D(f)$. Predpokladajme, že body tvaru (x, y_0) pre x blízke x_0 patria definičnému oboru[3]. Nech ρ je rovina daná rovnicou $y = y_0$. Potom prienikom $G \cap \rho$ je (v rozumnom prípade) krivka γ, ktorá je grafom parciálnej funkciu $g(x) = f(x, y_0)$. Derivácia tejto pomocnej funkcie, ktorá je zúžením funkcie f na úsečku, je vlastne derivácia funkcie jednej premennej.

Definícia 1.1

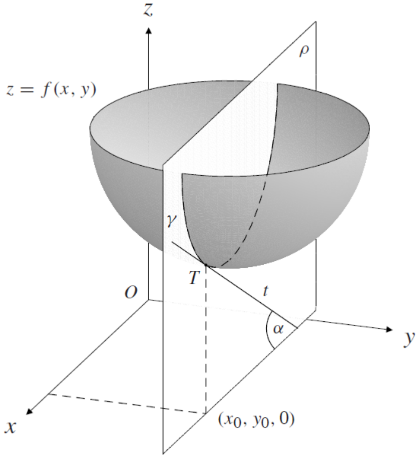
Nech funkcia $f : z = f(x, y)$ je definovaná v bode (x_0, y_0). Ak má funkcia $g(x) = f(x, y_0)$ deriváciu v bode x_0, nazveme ju parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x v bode (x_0, y_0) a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, prípadne $f'_x(x_0, y_0)$ alebo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. To jest

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

[3] Potrebujeme zaručiť, že v $D(f)$ má ležať malá úsečka so stredom v $\mathbf{a}$ rovnobežná s osou x. To bude napríklad splnené, ak $\mathbf{a} \in D(f)^\circ$.

Poznámka 1.1 (Geometrická interpretácia parc. derivácie)

Parciálna derivácia $f_x(x_0, y_0)$ udáva smernicu dotyčnice t ku krivke γ bode $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a je rovná hodnote $\tan\alpha$.



Obr.: Parciálna derivácia funkcie dvoch premenných.

Poznámka 1.2

Obdobne sa definuje parciálna derivácia funkcie f podľa premennej y v bode (x_0, y_0):

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Pre definíciu parciálnej derivácie funkcie f v bode $\mathbf{a}$ podľa premennej x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ predpokladáme buď, že $\mathbf{a} \in D(f)^\circ$, alebo, že $\mathbf{a} \in D(f)^d$ a f je definovaná na množine $I_i = \{\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) : x_j = a_j, \text{ kde } j \neq i, j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Definícia 1.2

Nech funkcia $f : z = f(\mathbf{x})$ je definovaná v bode $\mathbf{a}$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ak existuje vlastná limita $(\varphi_i'(a_i) =) \lim_{x_i \to a_i} \frac{\varphi_i(x_i) - \varphi_i(a_i)}{x_i - a_i} =$

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{x_i - a_i},$$

tak ju nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x_i v bode $\mathbf{a}$, označujeme $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}$, *resp.* $\left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$, $f'_{x_i}(\mathbf{a})$,

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Poznámka 1.3

- *Parciálnou deriváciou funkcie* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *podľa premennej* x_i *rozumieme takú funkciu* $g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, ktorej* $D(g)$ *je množina bodov, v ktorých existuje* f_{x_i} *a ktorých hodnota sa v každom bode jej definičného oboru rovná parciálnej derivácii funkcie* f *podľa* x_i *v tom bode.*
- *Treba si dobre uvedomiť, že parciálna derivácia funkcie* f n *premenných podľa premennej* x_i *je opäť funkcia* n *premenných, označujeme ju* $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$*, resp.* $f'_{x_i}(\mathbf{x})$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*
- *Ak počítame napr. parciálnu deriváciu funkcie* f *podľa premennej* x_i*,* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, tak funkciu* f *považujeme za funkciu len premennej* x_i *a ostatné jej premenné považujeme za konštanty.*
- *Keďže parciálna derivácia je definovaná ako "obyčajná" derivácia (parciálnej) funkcie jednej premmenej, platia pre výpočet parciálnych derivácií obvyklé pravidlá - súčtu, rozdielu, súčinu a podielu.*

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Pre funkciu jednej premennej z existencie derivácie funkcie v danom bode vyplýva jej spojitosť v tomto bode. U funkcií viac premenných toto tvrdenie neplatí.

Úloha 1.1

Uvažujme funkciu

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ukážte, že f má parciálnu deriváciu podľa premennej x aj y v bode $(0,0)$*. ďalej ukážte, že f nie je v bode* $(0,0)$ *spojitá.*

Poznámka 1.4

Je to spôsobené tým, že parciálne derivácie charakterizujú, dávajú informáciu, popisujú správanie sa funkcie len v smeroch rovnobežných so súradnicovými osami, v ostatných smeroch sa daná funkcia môže správať "veľmi divoko".

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Úloha 1.2

Vypočítajte parciálne derivácie v bode $(0,0)$ funkcie f danej vzťahom

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \vee y = 0 \\ 0, & inak. \end{cases}$$

Je funkcia v bode $(0,0)$ spojitá?

Poznámka 1.5

Uvedomme si, že parciálne derivácie funkcie dávajú informáciu len o správaní sa funkcie v smeroch rovnobežných so súradnicovými osami.
O správaní sa funkcie v iných smeroch nevieme zatiaľ povedať nič (na to nám poslúži pojem derivácia funkcie v smere).

Pokračujme ďalej v úvahe pre funkciu dvoch premenných. Rovnice vyššie spomínaných dotyčníc sú nasledovné:

$$z - f(\mathbf{a}) = f_x(\mathbf{a})\,(x - x_0), \quad y = y_0,$$
$$z - f(\mathbf{a}) = f_y(\mathbf{a})\,(y - y_0), \quad x = x_0.$$

Ich parametrické rovnice pre $t \in \mathbb{R}$ sú:

$$
\begin{aligned}
x &= t & x &= x_0, \\
y &= y_0 & y &= t, \\
z &= f(\mathbf{a}) - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}\, x_0 + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}\, t, & z &= f(\mathbf{a}) - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}\, y_0 + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}\, t.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Smerovými vektormi týchto dotyčníc sú vektory $\left(1, 0, \dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}\right)$ a $\left(0, 1, \dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}\right)$. Tie sú lineárne nezávislé a teda uvedené dotyčnice určujú dotykovú rovinu ku grafu G funkcie f v bode T. Ich vektorový súčin predstavuje normálový vektor

$$
\vec{\mathbf{n}} = \left(1, 0, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}, -\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}, 1\right)
$$

danej dotykovej roviny.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Keďže bod $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ patrí do danej roviny, dostávame tak nasledujúcu rovnicu dotykovej roviny ku grafu G funkcie f v bode T

$$z - f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}(y - y_0).$$

Otázkou ale ostáva, kedy dotyková rovina ku grafu funkcie v bode existuje?

Poznámka 1.6 (Fyzikálny význam parciálnych derivácií)

Ak funkcia f vyjadruje závislosť nejakej veličiny z od veličín x, y, t.j. $z = f(x, y)$, tak $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x}$ charakterizuje, udáva rýchlosť akou sa menia hodnoty veličiny z vzhľadom na zmenu hodnôt veličiny x za predpokladu, že hodnoty veličiny y sa nemenia ($y = a_2$) v bode (a_1, a_2). Analogický význam má aj $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial y}$.

Uvedieme si ešte všeobecnejšie tvrdenie derivovania integrálu s pohyblivými hranicami.

Veta 1.1 (O derivácii integrálu)

Nech je
$f, \dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(R),\ \ R = [x_0, x_1] \times [a(x), b(x)], \quad a, b \in C^1([x_0, x_1]).$
Potom pre $x \in [x_0, x_1]$ *je*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) = f(x, b(x))\, b'(x) - f(x, a(x))\, a'(x) +$$

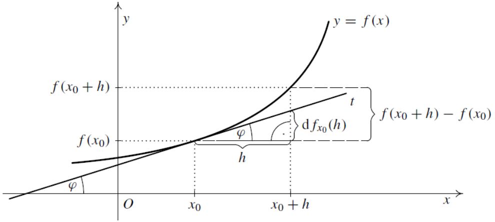
$$+\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Kedy vieme danú funkciu v okolí nejakého bodu (lokálne) aproximovať lineárnou funkciou? Potrebujeme zaviesť užitočný pojem diferencovateľnosti funkcie viac premenných v bode a pojem totálneho diferenciálu funkcie v bode. Ako to bolo v prípade funkcie jednej premennej?



Obr.: Diferenciál funkcie jednej premennej.

Cieľom bolo nájsť číslo $A \in \mathbb{R}$: $\quad f(x_0+h) - f(x_0) \doteq A\,h$, kde $|h|$ je malé reálne číslo, pritom chybou je $\omega(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - A\,h$ a má pre ňu platiť $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\omega(h)}{h} = 0$.

So zavedením týchto pojmov okamžite vznikajú otázky: Kedy je daná funkcia diferencovateľná v bode? Stačí k tomu iba existencia parciálnych derivácií ako u funkcií jednej premennej?

- U funkcie viac premenných má diferenciál podstatne väčší význam.
- Jeho geometricky význam je síce podobný (náhrada grafu funkcie dotykovou rovinou), ale jeho súvislosť s parciálnymi deriváciami je oveľa zložitejšia.

Uvažujme najprv funkciu dvoch premenných f definovanú na okolí bodu (x_0, y_0). Vezmime čísla (prírastky nezávislých premenných) $h, k: \ 0 < |h|, |k| \ll 1$ a posuňme sa do bodu $(x_0 + h, y_0 + k)$[4]. Prírastok závislej premennej $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ je dobre definovaný. Teraz chceme funkciu f nahradiť lineárnou funkciou (jej grafom je rovina). Takže chceme nájsť čísla

$$A, B \in \mathbb{R} : \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \doteq A\,h + B\,k$$

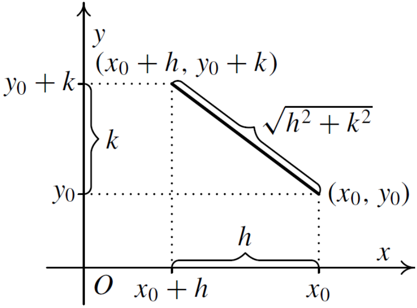
(v dostatočnej blízkosti bodu (x_0, y_0)).

[4] Z bodu (x_0, y_0) sa posunieme o hodnotu h horizontálne a o hodnotu k vertikálne.

Chyba, ktorej sa dopúšťame je

$$\omega(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - A\,h - B\,k.$$

Opäť chceme, aby pre dostatočne malé h, k nadobúdala hodnoty blízke nule. Takže je rozumné požadovať, aby sa limita ω podelená vzdialenosťou bodov (x_0+h, y_0+k) a (x_0, y_0) rovnala nule pre $h, k \to 0$.



Obr.: Prírastky v 2D, pričom $h < 0, k > 0$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Požadujeme teda aby $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$

Definícia 2.1

Nech funkcia f je definovaná na nejakom $O(x_0, y_0)$. Hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode (x_0, y_0), ak existujú $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ a funkcia $\omega(x, y)$ spojitá v bode (x_0, y_0) s hodnotou $\omega(x_0, y_0) = 0$ také, že pre každý bod (x, y) z $O(x_0, y_0)$ platí

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = k_1(x-x_0)+k_2(y-y_0)+\omega(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Poznámka 2.1

Prakticky to znamená, že na overenie diferencovateľnosti funkcie f z definície treba spočítať limitu[a] (s "nájdenými" konštantami k_1, k_2):

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-k_1(x-x_0)-k_2(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \qquad (2)$$

a ukázať, že je nulová.

---

[a] $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{\omega(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$

Všimnime si teraz konštanty k_1 a k_2. Predpokladajme, že je funkcia f diferencovateľná v bode (x_0, y_0). Teda platí (2) a špeciálne pre $x - x_0 = h,\ y - y_0 = k$ a voľbu $k = 0$ dostaneme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - k_1\, h}{|h|} = 0.$$

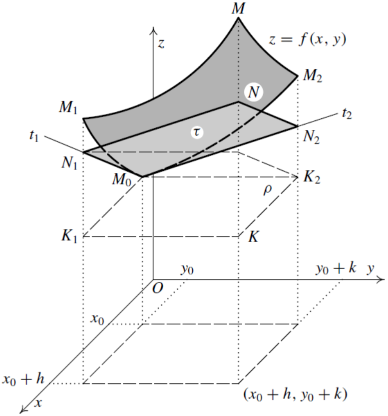
Keďže je výraz $\dfrac{h}{|h|}$ pre $h \neq 0$ ohraničený, platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - k_1\, h}{|h|} \frac{|h|}{h} = 0,$$

a teda nutne $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = k_1$. To však znamená, že existuje parciálna derivácia $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ a je rovná k_1. Podobne platí $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = k_2$.

Geometrický význam diferenciálu. Už vieme, že

- z diferencovateľnosti vyplýva existencia parciálnych derivácií;
- to znamená, že máme 2 priamky t_1, t_2 - dotyčnice v bode $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ku krivkám, ktoré sú priesečnice grafu G a rovín idúcich cez bod M_0 rovnobežne so súr. osami;
- rovina τ určená priamkami t_1, t_2 je práve dotykovou rovinou ku grafu G funkcie f v bode M_0;



Obr.: Geometrický význam diferenciálu.

Pozrime sa na predchádzajúci obrázok, pričom pracujeme v 1. oktante.

- rovina $\rho \ni M_0$ je vodorovná
- trojuholník $M_0 K_1 N_1$ je pravouhlý, teda
  - $|\overrightarrow{K_1 N_1}| = |\overrightarrow{M_0 K_1}| \tan \sphericalangle(\overrightarrow{M_0 K_1}, \overrightarrow{M_0 N_1}) = h \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$
  - teda $\overrightarrow{M_0 N_1} = \left(h, 0, h \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right)$
- trojuholník $M_0 K_1 N_1$ je tiež pravouhlý
- teda podobne $\overrightarrow{M_0 N_2} = \left(0, k, k \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$
- celkovo:

  $$\overrightarrow{M_0 N} = \overrightarrow{M_0 N_1} + \overrightarrow{M_0 N_2} = (h, k, h\, f_x(x_0, y_0) + k\, f_y(x_0, y_0)),$$

  kde $h\, f_x(x_0, y_0) + k\, f_y(x_0, y_0) := df_{(x_0, y_0)}(h, k)$
- avšak z $\overrightarrow{M_0 N} = (h, k, |\overrightarrow{KN}|)$ máme $|\overrightarrow{KN}| = df_{(x_0, y_0)}(h, k)$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Z týchto úvah vidíme, že $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = |\overrightarrow{KM}| = |\overrightarrow{KN}| + |\overrightarrow{NM}| = df_{(x_0,y_0)}(h,k) + |\overrightarrow{NM}|$. Zrejme teda

$$|\overrightarrow{NM}| = \omega(h,k) \;\text{ a }\; |\overrightarrow{KN}| = df_{(x_0,y_0)}(h,k)$$

(nelineárna resp. lineárna časť prírastku) vyjadrujú spolu skutočný prírastok $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$. Podobne zavedieme pojem diferencovateľnosti pre funkcie troch a viac premenných.

Definícia 2.2

Nech funkcia f je definovaná na $O(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$, ak existujú $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ a funkcia $\omega(\mathbf{x})$ spojitá v bode $\mathbf{a}$ s hodnotou $\omega(\mathbf{a}) = 0$ také, že pre každý bod $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ z $O(\mathbf{a})$ platí

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - a_i) + \omega(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}).$$

- Výraz (rozdiel) $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ nazývame diferenciou, resp. prírastkom funkcie f v bode $\mathbf{a}$, označujeme ho $\triangle f(\mathbf{a}, \mathbf{x})$.
- Výraz $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - a_i)$ nazývame totálny diferenciál funkcie f v bode $\mathbf{a}$, označujeme ho $df(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ (príp. $df_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$).
- Je dôležité si uvedomiť, že diferenciál funkcie f v bode $\mathbf{a}$ je opäť lineárnou funkciou výrazov $x_i - a_i$, resp. prírastkov nezávislých premenných x_i alebo presnejšie lineárnou funkciou nezávislých premenných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Pozor pre funkciu viac premenných neplatí tvrdenie: "f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď má všetky parciálne derivácie v bode $\mathbf{a}$."

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Videli sme, že Lagrangeova veta o strednej hodnote, resp. o prírastku funkcie jednej premennej mala veľký význam pri skúmaní vlastností tejto funkcie. Dokážeme, že podobná veta platí i pre funkcie viac premenných, pričom "body strednej hodnoty" budú ležať na hranách $n-$rozmerného kvádra určeného danými dvoma bodmi.

Veta 2.1 (Lagrangeova veta o prírastku funkcie)

Nech funkcia f je definovaná na $O(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a nech na tom okolí má parciálne derivácie (podľa každej svojej premennej). Nech bod $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ je ľubovolný bod z $O(\mathbf{a})$. Potom existujú body $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ v $O(\mathbf{a})$ také, že $\rho(\mathbf{P}_i, \mathbf{a}) < \rho(\mathbf{b}, \mathbf{a})$, $i = 1, 2, \dots, n$ a platí

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{P}_i)}{\partial x_i}(b_i - a_i).$$

Lagrangeova veta má aj nasledujúci dôsledok, ktorý predstavuje istú analógiu odpovedajúceho dôsledku pre funkcie jednej premennej.

Dôsledok 2.1

Nech funkcia f má na oblasti $M \subset \mathbb{E}^n$ všetky parciálne derivácie rovné nule. Potom funkcia f je konštantná na tejto oblasti.

My už vieme, že z existencie parciálnych derivácii funkcie v bode **a** nevyplýva spojitosť danej funkcie v tomto bode. Je potrebné pridať nejaký predpoklad.

Veta 2.2

Ak funkcia f má ohraničené všetky parciálne derivácie na otvorenej množine M, potom je na nej spojitá.

Dôsledok 2.2

Ak má funkcia f parciálne derivácie v $O(\mathbf{a})$ a sú v bode $\mathbf{a}$ spojité, potom existuje okolie bodu $\mathbf{a}$, na ktorom je f spojitá.

Veta 2.3 (Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode)

Ak funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$, potom je v ňom spojitá.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Úloha 2.1

Je funkcia z úlohy 1.2 všade diferencovateľná?

Veta 2.4 (Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode)

Ak funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$, potom má všetky parciálne derivácie v bode $\mathbf{a}$, pričom $\dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (konštanty k_i sú tie z definície diferencovateľnosti funkcie v bode).

Predchádzajúca veta hovorí, že diferencovateľnosť funkcie v bode zaručuje existenciu jej všetkých parciálnych derivácií v tom bode. Pozor! Opačné tvrdenie neplatí, t.j. neplatí: "ak funkcia f má všetky parciálne derivácie v bode, potom je v tom bode diferencovateľná." Stačí uvažovať funkciu z úlohy 1.1.

Platí však nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.5 (Postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode)

Nech funkcia f má na nejakom okolí bodu $\mathbf{a}$ parciálne derivácie podľa každej svojej premennej a sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.

Príklad 2.1

Overme, že funkcia $f : z = \arctan \frac{x}{y}$ má v bode $(-1, 1)$ totálny diferenciál, a nájdime ho.
Zrejme je $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Na $D(f)$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

pričom derivácie sú tam spojité. Totálny diferenciál teda existuje a keďže $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = \frac{1}{2}$ máme

$$df_{(-1,1)}(h, k) = \frac{h + k}{2} = \frac{x + 1 + y - 1}{2}.$$

Pozor predchádzajúca podmienka nie je nutnou podmienkou. Existuje funkcia, ktorá je v bode diferencovateľná, nemá v tom bode spojité parciálne derivácie.

Príklad 2.2

Nech $\phi(t) = \begin{cases} t^2 \sin \dfrac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$ *Potom sa dá ukázať, že funkcia* $\Phi(x, y) = \phi(x) + \phi(y)$ *nemá v bode* $(0, 0)$ *spojité parciálne derivácie, ale je v ňom diferencovateľná.*

Pre poriadok si uveďme zhrnutie (žiadna z implikácií sa nedá obrátiť):

df existuje	$\Rightarrow$	f je spojitá
df existuje	$\Rightarrow$	f_x a f_y existujú
f_x a f_y existujú	potom	df nemusí existovať
f je spojitá f_x a f_y existujú	potom	df nemusí existovať
f_x a f_y sú spojité	$\Rightarrow$	df existuje
df existuje	potom	f_x a f_y nemusia byť spojité

Tabuľka: Zhrnutie

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Poznámka 2.2 (Vzťah diferencie a diferenciálu funkcie v bode)

Ak funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$, *tak pre ľubovoľný bod* $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$ *platí* $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i) + \omega(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a})$.

Keďže $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \omega(\mathbf{x}) = 0$, *tak pre všetky body* $\mathbf{x}$ *"blízke" bodu* $\mathbf{a}$ *môžeme výraz* $\omega(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ *zanedbať. Pre takéto body* $\mathbf{x}$ *je*

$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \doteq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i)$, *resp.* $\triangle f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \doteq df(\mathbf{a}, \mathbf{x})$. *Tento vzťah sa používa na približný výpočet funkčných hodnôt.*

Príklad 2.3

Vypočítajme približne hodnotu $\sqrt[3]{0.98^2 + 0.05^3}$. *Označme* $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^3}$, *máme určiť* $f(0.98, 0.05)$. *Zvoľme* $(x_0, y_0) = (1, 0)$ *a* $(x - 1, y - 0) = (h, k) = (-0.02, 0.05)$. *Zrejme* $f(0.98, 0.05) \doteq f(1, 0) + df_{(1,0)}(-0.02, 0.05)$ *a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{2}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

Teda $f(0.98, 0.05) \doteq 1 - 0.4 \times 0.02 + 0 \times 0.05 = 0.992$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Rovnako ako u funkcie jednej premennej potrebujeme aj u funkcií viac premenných určiť parciálne derivácie zložených funkcií. Rozlíšime nasledujúce dva prípady:

1. Uvažujme funkciu $F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, teda zložená funkcia F je funkciou len jednej premennej. Platí tvrdenie.

Veta 2.6

Nech funkcie $t_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ majú deriváciu v bode $a \in \mathbb{E}^1$. Nech funkcia $y = f(t_1, t_2, \dots, t_m)$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{b} = (\varphi_1(a), \varphi_2(a), \dots, \varphi_m(a)) \in \mathbb{E}^m$. Potom zložená funkcia $F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$ má deriváciu v bode a, pričom platí $F'(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial t_i} \cdot \varphi_i'(a)$.

Poznámka 2.3

Deriváciu zloženej funkcie $F(x)$ môžeme zapísať v tvare

$$F'(x) = \frac{\partial f(t_1, \dots, t_m)}{\partial t_1} \cdot \varphi_1'(x) + \cdots + \frac{\partial f(t_1, \dots, t_m)}{\partial t_m} \cdot \varphi_m'(x),$$

pričom do parciálnych derivácií $\dfrac{\partial f(t_1, \dots, t_m)}{\partial t_i}$ treba dosadiť $\varphi_i(x)$ namiesto t_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

11. Uvažujme teraz zloženú funkciu $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, teda zložená funkcia F je funkciou viac premenných. Platí nasledujúca veta.

Veta 2.7

Nech funkcie $t_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$ majú parciálne derivácie podľa každej svojej premennej v bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{E}^n$. Nech funkcia $y = f(t_1, t_2, \dots, t_m)$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{b} = (\varphi_1(\mathbf{a}), \varphi_2(\mathbf{a}), \dots, \varphi_m(\mathbf{a})) \in \mathbb{E}^m$. Potom zložená funkcia $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$ má parciálne derivácie podľa každej svojej premennej v bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, pričom platí

$$\frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{a})}{\partial x_k},$$

$k = 1, 2, \dots, n$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Poznámka 2.4

Parciálne derivácie prvého rádu zloženej funkcie $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ *podľa každej jej premennej môžeme stručne zapísať v tvare*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n},$$

pričom do parciálnych derivácií $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}$ *treba dosadiť* $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *namiesto* t_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

Položme si teraz otázku: Kedy uvedená zložená funkcia je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$?

Veta 2.8

Nech funkcie $t_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ *sú diferencovateľné v bode* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{E}^n$. *Nech funkcia* $y = f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{b} = (\varphi_1(\mathbf{a}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{a})) \in \mathbb{E}^m$. *Potom zložená funkcia* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *a pre jej diferenciál v bode* $\mathbf{a}$ *platí* $dF(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial t_i}\cdot\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{a})}{\partial x_k}$.

Pri funkcii jednej premennej sme mali zavedené algebraické operácie s funkciami majúcimi deriváciu v bode. V prípade funkcie viac premenných si algebraické operácie zavedieme len pre diferencovateľné funkcie v bode.

Veta 2.9

Nech funkcie f_1, f_2 *sú diferencovateľné v bode* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *a nech* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Potom aj funkcie* $c_1 f_1 + c_2 f_2$, $f_1 \cdot f_2$ *sú diferencovateľné v bode* $\mathbf{a}$, *ak naviac* $f_2(\mathbf{a}) \neq 0$, *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$ *aj funkcia* $\dfrac{f_1}{f_2}$. *Pre diferenciály týchto funkcií platí*

a) $d(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = c_1 df_1(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + c_2 df_2(\mathbf{a}, \mathbf{x})$;
b) $d(f_1 \cdot f_2)(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = df_1(\mathbf{a}, \mathbf{x}) f_2(\mathbf{a}) + f_1(\mathbf{a}) df_2(\mathbf{a}, \mathbf{x})$;
c) $d\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \dfrac{df_1(\mathbf{a}, \mathbf{x}) f_2(\mathbf{a}) - f_1(\mathbf{a}) df_2(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{f_2^2(\mathbf{a})}$.

Už vieme, že parciálne derivácie dávajú informáciu o správaní sa funkcie v smeroch rovnobežných so súradnicovými osami. Informáciu o tom ako sa funkcia správa v iných smeroch nám dáva tzv. derivácia funkcie v smere – smerová derivácia. Ide o prirodzené zovšeobecnenie pojmu parciálnej derivácie funkcie.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Túto deriváciu funkcie f v danom bode $\mathbf{a}$ v smere vektora $\vec{\mathbf{u}}$ získame pomocou "špeciálnej" parciálnej funkcie, ktorej definičný oborom bude zúženie definičného oboru funkcie f na "priamku" idúcu daným bodom $\mathbf{a}$ a majúcu smer daného vektora $\vec{\mathbf{u}}$. To znamená, že budeme vlastne vyšetrovať funkciu $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t \cdot \vec{\mathbf{u}})$, ktorá už je len funkciou jednej premennej.

Definícia 2.3

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ a nech $\vec{\mathbf{u}}$ je jednotkový vektor v priestore $\mathbb{E}^n$. Hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ deriváciu v smere jednotkového vektora $\vec{\mathbf{u}}$, ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(\mathbf{a} + t \cdot \vec{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{t}$, označujeme ju $\dfrac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{u}}}$.

Uvedomme si, že platí

$$\frac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{u}}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\mathbf{a} + t \cdot \vec{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'_+(0),$$

pričom $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t \cdot \vec{\mathbf{u}})$.

Podstatná je "jednotková" veľkosť vektora $\vec{\mathbf{u}}$, t.j. skutočnosť, že $|\vec{\mathbf{u}}| = 1$[5]. Uvažujme $\vec{\mathbf{v}} = c \cdot \vec{\mathbf{u}}$, kde $c \in \mathbb{R}^+$.
Potom máme

$$\frac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{v}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\mathbf{a}+t\cdot\vec{\mathbf{v}}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(f(\mathbf{a}+t\cdot c\cdot\vec{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a}))\cdot c}{t\cdot c} =$$

$$\left| \begin{array}{c} c\cdot t = s \\ t\to 0^+ \Rightarrow s\to 0^+ \end{array} \right| = c\lim_{s\to 0^+} \frac{f(\mathbf{a}+s\cdot\vec{\mathbf{u}}) - f(\mathbf{a})}{s} = c\cdot\frac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{u}}}.$$

- Hodnota derivácie funkcie v danom bode **a** v smere ľubovoľného vektora $\vec{\mathbf{v}}$ závisí od jeho veľkosti.
- To nie je žiadúce, lebo my chceme hodnoty smerových derivácií porovnávať.
- K tomu je nutné uvažovať vždy jednotkový vektor $\vec{\mathbf{u}}$.

Poznámka 2.5

Parciálne derivácie funkcie $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sú vlastne smerové derivácie tejto funkcie v danom bode v smere súradnicových osí (presnejšie v smere príslušných jednotkových vektorov).

[5] Ak $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, tak $|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = 1$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Naozaj, zrejme pre $y = f(x_1, x_2)$ máme, že

$$\frac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{i}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\mathbf{a} + t \cdot \vec{\mathbf{i}}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} =$$

$= \dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}$, kde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{\mathbf{i}} = (1, 0)$. Podobne $\dfrac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{j}}} = \dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}$,

kde $\vec{\mathbf{j}} = (0, 1)$. Uvažujme ďalej jednotkový vektor $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ v ľubovoľnom smere (t.j. $|\vec{\mathbf{u}}| = 1$). Tento ľubovoľný jednotkový vektor vieme vyjadriť aj inak. Platí

- $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{i}}| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$, $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{i}} = u_1$ a teda $u_1 = \cos\alpha$, kde α je uhol, ktorý zviera vektor $\vec{\mathbf{u}}$ s vektorom $\vec{\mathbf{i}}$ (resp. s osou x);
- podobne $u_2 = \cos\beta$, kde β je uhol, ktorý zviera vektor $\vec{\mathbf{u}}$ s vektorom $\vec{\mathbf{j}}$ (resp. s osou y);
- podobne $u_3 = \cos\gamma$, kde γ je uhol, ktorý zviera vektor $\vec{\mathbf{u}}$ s vektorom $\vec{\mathbf{k}}$ (resp. s osou z).

Teda jednotkový vektor $\vec{\mathbf{u}}$ v ľubovoľnom smere vieme napísať v tvare $\vec{\mathbf{u}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Uvažujme teraz funkciu $y = f(x_1, x_2, x_3)$, ktorá je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Pozrime sa na deriváciu funkcie f v bode $\mathbf{a}$ v smere ľubovoľného jednotkového vektora $\vec{\mathbf{u}}$. Označme si

$$\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t \cdot \vec{\mathbf{u}}) = f(a_1 + t\cos\alpha, a_2 + t\cos\beta, a_3 + t\cos\gamma).$$

Vieme, že $\dfrac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{u}}} = \varphi'_+(0)$. Na druhej strane, funkcia φ je zloženou funkciou tvaru $\varphi(t) = f(x_1, x_2, x_3)$, kde $x_1 = a_1 + t\cos\alpha$, $x_2 = a_2 + t\cos\beta$, $x_3 = a_3 + t\cos\gamma$. Pre jej deriváciu platí, že

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}\cos\beta + \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}\cos\gamma,$$

pričom $x_1 = a_1 + t\cos\alpha$, $x_2 = a_2 + t\cos\beta$, $x_3 = a_3 + t\cos\gamma$. Teda

$$\frac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{u}}} = \varphi'_+(0) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}\cos\beta + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_3}\cos\gamma.$$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Pravá strana predchádzajúcej rovnosti je vlastne skalárny súčin dvoch vektorov, presnejšie vektora

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_3}\right) = \vec{\mathbf{i}}\,\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} + \vec{\mathbf{j}}\,\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} + \vec{\mathbf{k}}\,\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_3}$$

a vektora

$$\vec{\mathbf{u}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \vec{\mathbf{i}}\cos\alpha + \vec{\mathbf{j}}\cos\beta + \vec{\mathbf{k}}\gamma.$$

Vektor $\left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_3}\right)$ nazývame gradientom funkcie f v bode $\mathbf{a}$, označujeme ho $\mathrm{grad} f(\mathbf{a})$, resp. $\nabla f(\mathbf{a})$. Následne môžeme písať formulu

$$\frac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{u}}} = \mathrm{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{u}},$$

ktorá hovorí (ak je f diferencovateľná), že derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$ v smere jednotkového vektora $\vec{\mathbf{u}}$ sa rovná skalárnemu súčinu gradientu funkcie f v bode $\mathbf{a}$ a vektora $\vec{\mathbf{u}}$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Úloha 2.2

Ukážte, že funkcia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

nie je diferencovateľná v bode $(0,0)$, *ale má v ňom deriváciu v každom smere.*

Otázka: Kedy je derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$ najväčšia? V ktorom smere? Ak δ je uhol, ktorý zviera jednotkový vektor $\vec{\mathbf{u}}$ s vektorom $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$, potom

$$\frac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{u}}} = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = |\operatorname{grad} f(\mathbf{a})| \cdot |\vec{\mathbf{u}}| \cdot \cos\delta = |\operatorname{grad} f(\mathbf{a})| \cdot \cos\delta.$$

Vidíme, že hodnota $\dfrac{df(\mathbf{a})}{d\vec{\mathbf{u}}}$ je najväčšia, keď $\cos\delta = 1$, t.j. vtedy, keď vektor $\vec{\mathbf{u}}$ a vektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ zvierajú uhol $\delta = 0$. Takže gradient funkcie v bode "ukazuje" v smere najväčšieho rastu. Taktiež si uvedomme, že vektor $-\operatorname{grad} f(\mathbf{a})$ udáva smer najväčšieho poklesu funkcie f v bode $\mathbf{a}$.

Poznámka 2.6

Predstavme si lyžiara stojaceho na šikmom svahu (ktorý je grafom funkcie $f(x, y)$) tak, že smer lyží je kolmý k vrstevniciam a špičky mieria hore. Potom je veľkosť gradientu rovná tangensu uhla, ktorý zvierajú lyže s vodorovnou rovinou. Kolmý priemet lyží do vodorovnej roviny má rovnaký smer a orientáciu (určenú špičkami) ako gradient.

Derivácie a diferenciály vyšších rádov

- Uvažujme funkciu $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a predpokladajme, že má na množine $M \subseteq D(f)$ parciálne derivácie prvého rádu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.
- Každá z týchto funkcií (derivácií) je opäť funkciou n premenných definovanou na množine M.
- Môže sa stať, že existujú ich parciálne derivácie prvého rádu na nejakej množine $M_1 \subseteq M$.
- Ak tieto parciálne derivácie existujú, budeme im hovoriť parciálne derivácie druhého rádu funkcie f a budeme ich označovať $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ alebo stručnejšie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
- Ak bude $x_i = x_j$, tak budeme označovať príslušnú druhú parciálnu deriváciu funkcie f podľa x_i znakom $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
- Funkcia f má n^2 parciálnych derivácií druhého rádu.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

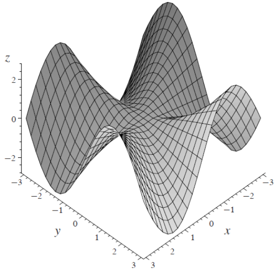
Príklad 3.1

Uvažujme funkciu $f(x,y) = x^3y^2 + y^3x^4$. *Všimnime si, že* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *na celom priestore* $\mathbb{E}^2$.

Tento príklad ukazuje, že pre danú funkciu sa parciálne derivácie druhého rádu rovnajú. Hovoríme tomu, že parciálne derivácie sú zámenné. Sú druhé parciálne derivácie ľubovoľnej funkcie zámenné? Ak nie, za akých podmienok, predpokladov už budú zámenné? Odpoveď na prvú otázku je záporná.

Úloha 3.1

Uvažujme funkciu $f(x,y) =$
$$\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}.$$
Ukážte, že $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$. *Teda, že parciálne derivácie druhého rádu funkcie* f *v bode* $(0,0)$ *nie sú zámenné!*



Za dosť rozumných predpokladov, ktoré sú v bežných prípadoch splnené, rovnosť platí. Uvedieme si niekoľko tvrdení. Najprv si uvedieme vetu, ktorá zahŕňa informáciu o hladkosti práve tých derivácií, ktoré chceme zamieňať (uvedieme ju len pre rád 2).

Veta 3.1

Nech v $O(\mathbf{a})$ *existujú parciálne derivácie* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ *a sú v bode spojité. Potom sú v bode* $\mathbf{a}$ *zámenné.*

Predchádzajúca veta má jednu nevýhodu. Aby sme overili jej predpoklady, musíme spočítať $f_{x_j x_i}$ a $f_{x_i x_j}$ a zistiť, či sú spojité. Ale to už zároveň vidíme, ak sú aj rovnaké. Takže jej použitie nie je veľmi efektívne. To odstraňuje silnejšia verzia.

Veta 3.2

Nech funkcia $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *je taká, že parciálne derivácie* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ *sú diferencovateľné v bode* $\mathbf{a}$.
Potom platí, že $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$, *t.j. tieto parciálne derivácie druhého rádu funkcie* f *v bode* $\mathbf{a}$ *sú zámenné.*

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Veta 3.3 (Schwarzova veta)

Nech parciálne derivácie $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ *existujú v* $O(\mathbf{a})$ *a* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existuje v* $O^*(\mathbf{a})$ *a existuje limita*[a]

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Potom v bode $\mathbf{a}$ *existuje aj* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *a platí, že* $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$.

[a] Na to stačí aby $f_{x_i x_j}$ bola v $\mathbf{a}$ spojitá.

Väčšinou pracujeme s rozumnými funkciami a ľahko sa overia predpoklady nasledujúceho dôsledku.

Dôsledok 3.1

Ak sú všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie f *spojité v bode* $\mathbf{a}$*, potom sú všetky v tomto bode zámenné.*

Podobne ako to bolo pri parciálnych deriváciách druhého rádu. Ak parciálne derivácie rádu $k-1$ funkcie f majú parciálne derivácie, nazývame tieto parciálne derivácie parciálnymi deriváciami k-tého rádu funkcie f, označujeme ich $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Budeme hovoriť, že dve parciálne derivácie k-tého rádu funkcie f $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}}$ sa líšia len poradím derivovania, ak k-tica $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ vznikne len premiestnením zložiek k-tice $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

Poznámka 3.1

Vo všeobecnosti sa parciálne derivácie k-tého rádu funkcie f, ktoré sa líšia len poradím derivovania, nemusia rovnať.

Platí však veta, ktorá hovorí kedy parciálne derivácie k-tého rádu funkcie f sú zámenné, t.j. kedy parciálne derivácie k-tého rádu funkcie f líšiace sa len poradím derivovania sa sebe rovnajú.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Veta 3.4

Ak sú všetky parciálne derivácie k-tého rádu funkcie f spojité v bode **a**, *potom sú všetky parciálne derivácie až do k-tého rádu funkcie f zámenné v tomto bode* **a**.

Napr. ak $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}$ sú spojité v bode **a**, potom platí, že

$$\frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}.$$

Uvažujme teraz zloženú funkciu $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, kde hlavná zložka $y = f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ je definovaná na množine $\mathbb{E}^m$ a vedľajšie zložky $t_i = \varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sú definované na množine $\mathbb{E}^n$.

Predpokladajme, že

- funkcie $t_i = \varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ majú parciálne derivácie prvého rádu, ktoré sú diferencovateľné v bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$;
- funkcia $y = f(\mathbf{t})$ má parciálne derivácie prvého rádu, ktoré sú diferencovateľné v bode $\mathbf{b} = (\varphi_1(\mathbf{a}), \varphi_2(\mathbf{a}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{a}))$.

Potom

- existujú parciálne derivácie prvého rádu zloženej funkcie F;
- majú tvar $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial t_m} \cdot \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$;
- navyše sú funkcie $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ diferencovateľné v bode $\mathbf{a}$, keďže
  - diferencovateľnosť $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ v bode $\mathbf{a}$ implikuje diferencovateľnosť φ_k v bode $\mathbf{a}$;
  - diferencovateľnosť $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}$ v bode $\mathbf{b}$ implikuje diferencovateľnosť $f_i(\varphi(\mathbf{x}))$ v bode $\mathbf{a}$;
  - súčin a súčet diferencovateľných funkcií v bode $\mathbf{a}$ je diferencovateľná funkcia v bode $\mathbf{a}$.

To znamená, že funkcie $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ majú parciálne derivácie podľa všetkých premenných v bode **a**. Teda existujú parciálne derivácie druhého rádu zloženej funkcie F v bode **a**.

Poznámka 3.2

Tieto parciálne derivácie druhého rádu dostaneme tak, že nájdeme parciálne derivácie prvých parciálnych derivácií funkcie F.
To sa dá prirodzene zovšeobecniť na prípady vyšších rádov.

Pre jednoduchosť uvedieme formuly (vzorce) pre parciálne derivácie druhého rádu zloženej funkcie dvoch premenných. Uvažujme zloženú funkciu $F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$, t.j. $F(x, y) = f(u, v)$, kde $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Platí

- $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial y};$
- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 +$
  $\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$

- $$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$
- $$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

keďže $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ sú diferencovateľné, a teda platí $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Poznámka 3.3

Ak $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ sú diferencovateľné na množine $M \subset \mathbb{E}^2$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ sú diferencovateľné na množine $P \subset \mathbb{E}^2$, pričom $\forall\ (x,y) \in P$ je bod $(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \in M$, tak uvedené vzorce predstavujú parciálne derivácie druhého rádu zloženej funkcie F na celej množine P, pričom v deriváciách $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ treba položiť $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$.

Vidíme, že tieto vzorce sú už pomerne komplikované. Pre derivácie vyšších rádov zložitosť rastie. Odvádzať ich nemá zmysel. Dôležité je vedieť princíp, predovšetkým treba poznať štruktúru jednotlivých funkcií vyskytujúcich sa v procese získavania uvedených parciálnych derivácií danej zloženej funkcie F. Ukážeme si to na príkladoch.
Pozrime sa ešte na pojem diferenciálu k-tého rádu funkcie f v bode.
Diferenciálom k-tého rádu funkcie jednej premennej v bode a je mocninová (polynomická) funkcia stupňa najviac k prírastku $x-a$, t.j.

$$d^k f(a,x) = f^{(k)}(a)(x-a)^k,$$

pričom existencia k-tého diferenciálu funkcie v bode a je ekvivalentná s existenciou k-tej derivácie funkcie v bode a. Situácia u funkcie viac premenných je o dosť komplikovanejšia[6].

[6] Existencia parciálnych derivácií nie je ekvivalentná s diferencovateľnosťou funkcie a navyše parciálne derivácie vyšších rádov nemusia byť zámenné.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Spojitosť parciálnych derivácií istého rádu funkcie f v bode $\mathbf{a}$ je vhodným predpokladom pre nasledujúcu definíciu i ďalšie úvahy. Kvôli prehľadnosti začnime našu úvahu pre funkciu dvoch premenných $z = f(x, y)$, ktorá je definovaná na nejakom okolí bodu $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.

Definícia 3.1

Nech funkcia $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^1$ má v bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ spojité všetky parciálne derivácie k-tého rádu. Diferenciálom k-tého rádu funkcie f v bode $\mathbf{a}$ (pre bod $\mathbf{x} = (x, y)$) rozumieme polynomickú funkciu (polynóm) dvoch premenných x, y stupňa najviac k tvaru

$$d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f(\mathbf{a})}{\partial x^{k-j} \partial y^j} (x - a_1)^{k-j} (y - a_2)^j .$$

Na ukážku napíšme niekoľko diferenciálov k-tého rádu pre hodnoty $k = 1$, $k = 2$ a $k = 3$, pričom použijeme pomôcku vychádzajúcu z rozvoja mocniny dvojčlena $(a + b)^k$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

- $df(\mathbf{a},\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}(x-a_1) + \dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}(y-a_2) = \left[(x-a_1)\dfrac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\dfrac{\partial}{\partial y}\right] f(\mathbf{a});$
- $d^2f(\mathbf{a},\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x^2}(x-a_1)^2 + 2\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x \partial y}(x-a_1)(y-a_2) + \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial y^2}(y-a_2)^2 = \left[(x-a_1)\dfrac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\dfrac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(\mathbf{a});$
- $d^3f(\mathbf{a},\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x^3}(x-a_1)^3 + 3\dfrac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x^2 \partial y}(x-a_1)^2(y-a_2) + 3\dfrac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x \partial y^2}(x-a_1)(y-a_2)^2 + \dfrac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial y^3}(y-a_2)^3 = \left[(x-a_1)\dfrac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\dfrac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(\mathbf{a}).$

Poznámka 3.4

Formálne diferenciál k-tého rádu funkcie f v bode **a** *môžeme zapísať aj v tvare*

$$d^k f(\mathbf{a},\mathbf{x}) = \left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(\mathbf{a}).$$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Príklad 3.2

Určme (totálny) diferenciál druhého rádu funkcie $f : z = x^2y^3$ *v bode* $(1, -2)$. *Platí*

$$f_x = 2xy^3, \quad f_y = 3x^2y^2, \quad f_{xx} = 2y^3, \quad f_{xy} = 6xy^2, \quad f_{yy} = 6x^2y.$$

Po dosadení máme
$d^2 f_{(1,-2)}(x, y) = -16(x-1)^2 + 48(x-1)(y+2) - 12(y+2)^2.$

Podobne môžeme definovať diferenciál k-tého rádu funkcie v bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ pre funkciu n premenných $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorá je definovaná na nejakom okolí bodu $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Definícia 3.2

Nech funkcia $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ *má v bode* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *spojité všetky parciálne derivácie k-tého rádu. Diferenciálom k-tého rádu funkcie f v bode* $\mathbf{a}$ *(pre bod* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$*) nazývame polynomickú funkciu (polynóm) n premenných stupňa najviac k, ktorú môžeme formálne zapísať v tvare* $d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) =$

$$\left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(\mathbf{a}).$$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Taylorovým polynómom funkcie viac premenných $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$ je polynóm viac premenných, ktorý má s funkciou f v danom bode $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ rovnakú funkčnú hodnotu a rovnakú hodnotu všetkých parciálnych derivácií až do k-tého rádu, pričom k je stupeň tohto polynómu (resp. stupeň Taylorovho polynómu). Vyslovme nasledujúcu vetu o chybe aproximácie Taylorovým polynómom.

Veta 3.5 (Taylorova veta)

Nech funkcia $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v nejakom okolí bodu $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ spojité parciálne derivácie rádu $(k+1)$. Potom pre každý bod $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$ existuje číslo $\theta \in (0,1)$ také, že platí

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{df(\mathbf{a},\mathbf{x})}{1!} + \cdots + \frac{d^k f(\mathbf{a},\mathbf{x})}{k!} + \frac{d^{k+1} f(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{x}+\mathbf{c})}{(k+1)!},$$

kde $\mathbf{c} = \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ a $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ je medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{x}$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Definícia 3.3

Výraz

$$f(\mathbf{a}) + \frac{df(\mathbf{a},\mathbf{x})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{a},\mathbf{x})}{2!} + \cdots + \frac{d^k f(\mathbf{a},\mathbf{x})}{k!}$$

z predchádzajúcej vety nazývame k-tým Taylorovým polynómom funkcie f v bode $\mathbf{a}$, označujeme ho $T_k(f,\mathbf{a};\mathbf{x})$ alebo skrátene $T_k(\mathbf{x})$. Ak bod $\mathbf{a} = (0,0,\ldots,0)$, tak uvedený polynóm nazývame Maclaurinov polynóm. Výraz

$$\frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}), \mathbf{x} + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}))$$

sa nazýva (Lagrangeov) zvyšok k-tého Taylorovho polynómu funkcie f v bode $\mathbf{a}$, označujeme ho $R_k(\mathbf{x})$.

Vzhľadom na uvedené označenie, z Taylorovej vety máme tzv. Taylorov vzorec, t.j. identitu $f(\mathbf{x}) = T_k(\mathbf{x}) + R_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$. Podobne ako u funkcií jednej premennej uvažujme funkciu, ktorá má diferenciál v bode $\mathbf{a}$ ľubovoľného rádu.

Potom môžeme zaviesť nekonečný rad

$$T(f,\mathbf{a};\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k f(\mathbf{a},\mathbf{x}),$$

ktorý nazývame Taylorov rad funkcie viac premenných f v bode $\mathbf{a}$.

Príklad 3.3

Uvažujme funkciu $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ a bod $\mathbf{a} = (0,0)$. Dá sa jednoducho ukázať (DÚ), že

$$T(f,\mathbf{a};\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

Taylorov rad $T(f,\mathbf{a};\mathbf{x})$ zobrazenia f konverguje v bode $\mathbf{x}$ k hodnote $f(\mathbf{x})$ práve vtedy, keď konverguje postupnosť zvyškov $R_k(\mathbf{x})$ (prislúchajúci danej postupnosti Taylorových polynómov) k nule.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Podľa toho vieme ukázať, že Taylorovým radom danej funkcie $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ v bode $\mathbf{a} = (0,0)$ (jeho súčtom) je funkcia, pomocou ktorej vznikol, t.j. platí, že $\mathrm{e}^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$ pre ľubovoľný bod $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathbb{E}^2$ (oborom konvergencie tohto radu je $\mathbb{E}^2$).

Príklad 3.4

Nájdite Taylorov polynóm druhého rádu funkcie $f : z = x^3y + x^2y^2$ v bode $(1,-2)$ a vyjadrite zvyšok R_2. Zrejme platí

$$f(x,y) = f(1,-2) + df_{(1,-2)}(h,k) + \frac{1}{2} df_{(1,-2)}(h,k) + R_2(x,y),$$

kde $h = x - 1, k = y + 2$. Œahko sa ukáže, že

$$f(1,-2) = 2, \quad f_x(1,-2) = 2, \quad f_y(1,-2) = -3, \quad f_{xx}(1,-2) = -4,$$

$$f_{xy}(1,-2) = -5, \quad f_{yy}(1,-2) = 2.$$

Teda
$T_2(x,y) = 2+2(x-1)-3(y+2)-2(x-1)^2-5(x-1)(y+2)+(y+2)^2.$

Navyše $R_2(x,y) = \{\theta(y+2)-2\}(x-1)^3 + \{3\theta(x-1)+2\theta(y+2)-1\}(x-1)^2(y+2) + 2\{1+\theta(x-1)\}(x-1)(y+2)^2$, pričom

$$|R_2(x,y)| \le \delta^3(8\delta+5), \text{ pre } |x-1| \le \delta, |y+2| \le \delta, \quad 0 < \delta \ll 1.$$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Lokálne extrémy funkcie viac premenných

- Vyšetrovanie extrémov funkcií je jednou z najdôležitejších častí diferenciálneho počtu.
- V každodennom živote sa stretávame s riešením extremálnych úloh.
- V ekonómii ide napríklad o minimalizáciu nákladov a maximalizáciu výnosov, zisku.
- Vo fyzike je dôležitá oblasť tzv. (energetických) funkcionálov, konkrétne ich maximalizácia (minimalizácia), prípadne "iba" hľadanie ich stacionárnych bodov.
- Optimalizácia hrá dôležitú úlohu aj v informatike.

Už sme definovali maximálnu (najväčšiu) a minimálnu (najmenšiu) hodnotu funkcie viac premenných na množine $M \subseteq D(f)$. Tieto hodnoty nazývame absolútne, resp. globálne extrémy funkcie f na množine M. Weierstrassova veta o maxime a minime, za istých predpokladov, zaručuje existenciu týchto globálnych extrémov, avšak nedáva návod ako ich nájsť – to bude tiež jedným z našich ďalších cieľov.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Najprv sa však sa pozrime na lokálne extrémy funkcie viac premenných. Definícia lokálnych extrémov je podobná ako u funkcie jednej reálnej premennej. Predpokladajme v celej tejto kapitole, že bod $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ je vnútorným bodom definičného oboru uvažovanej funkcie !!!

Definícia 4.1

Hovoríme, že funkcia $y = f(\mathbf{x})$ má v bode $\mathbf{a} \in D(f) \subset \mathbb{E}^n$ lokálne maximum (minimum), ak existuje také okolie $O(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a}$, že pre každý bod $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ $(f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}))$. Hovoríme, že funkcia $y = f(\mathbf{x})$ má v bode $\mathbf{a} \in D(f) \subset \mathbb{E}^n$ ostré lokálne maximum (minimum), ak existuje také okolie $O(\mathbf{a})$ bodu $\mathbf{a}$, že pre každý bod $\mathbf{x} \in O^*(\mathbf{a})$ platí $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ $(f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}))$. Pre (ostré) lokálne maximá a minimá budeme používať spoločný názov (ostré) lokálne extrémy.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Príklad 4.1

- *Funkcia* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2}$ *má v bode* $(0,0)$ *ostré lokálne minimum, lebo* $f(0,0) = \frac{1}{2}$ *a pre každý bod* $(x,y) \neq (0,0)$ *je* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} = f(0,0)$. f *nemá parciálne derivácie v bode* $(0,0)$.
- *Funkcia*
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
má v bode $(0,0)$ *ostré lokálne maximum, lebo* $f(0,0) = 1$ *a* $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$ *"dostatočne" blízko*[a] *bodu* $(0,0)$ *je* $f(x,y) = x^2+y^2 < 1 = f(0,0)$. f *nie je spojitá v bode* $(0,0)$.

[a] t.j. pre každý bod $(x,y) \neq (0,0)$ z nejakého "malého" okolia bodu $(0,0)$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

- Funkcia $f(x,y) = 4 + xy$ nemá v bode $\mathbf{a} = (0,0)$ lokálny extrém, lebo v ľubovoľnom okolí bodu $(0,0)$ budú existovať body $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ také, že $f(\mathbf{x}_1) > 4 = f(0,0)$ a $f(\mathbf{x}_2) < 4 = f(0,0)$. Presnejšie, pre ľubovoľné $\delta > 0$ existuje bod $\mathbf{x}_1 = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \in O_\delta(\mathbf{a})$ taký, že $f(\mathbf{x}_1) = \frac{\delta^2}{4} + 4 > 4 = f(0,0)$, t.j. v bode **a** nemôže byť lokálne maximum funkcie f a taktiež existuje bod $\mathbf{x}_2 = \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \in O_\delta(\mathbf{a})$ taký, že $f(\mathbf{x}_2) = 4 - \frac{\delta^2}{4} < 4 = f(0,0)$, t.j. v bode **a** nemôže byť lokálne minimum funkcie f. Teda funkcia f nemá v bode **a** lokálny extrém.

Tieto príklady ilustrujú skutočnosť, že funkcia môže mať lokálny extrém aj v bode, v ktorom nemá parciálne derivácie, resp. nie je spojitá.
Pozrime sa teraz na nutné a postačujúce podmienky pre existenciu lokálneho extrému v prípade, keď má uvažovaná funkcia v danom bode parciálne derivácie prvého rádu.

Nasledujúca veta, ktorá stanovuje nutnú podmienku existencie lokálneho extrému, je v niektorej literatúre citovaná ako Fermatova veta ale aj Eulerova veta.

Veta 4.1 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému)

Nech funkcia $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ lokálny extrém a nech má v tomto bode všetky parciálne derivácie prvého rádu. Potom $\dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definícia 4.2

Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ sa nazýva stacionárny bod funkcie $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ak funkcia f má v tomto bode všetky parciálne derivácie prvého rádu rovné nule, t.j. $\dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Poznámka 4.1

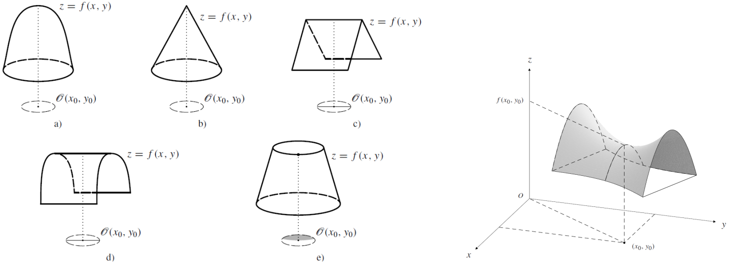
V stacionárnom bode funkcia nemusí mať lokálny extrém, predchádzajúca veta dáva iba nutnú podmienku existencie lokálneho extrému, viď nasledujúce príklady.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Príklad 4.2

- *Funkcia* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ *má v bode* $(0,0)$ *lokálny extrém a bod* $(0,0)$ *je jej stacionárnym bodom.*
- *Funkcia* $f(x,y) = 4 + xy$ *nemá v bode* $(0,0)$ *lokálny extrém a bod* $(0,0)$ *je jej stacionárnym bodom.*

Predchádzajúca veta hovorí, že funkcia f môže mať (ale nemusí) lokálny extrém len v stacionárnych bodoch tejto funkcie alebo potom v bodoch, v ktorých neexistuje niektorá z parciálnych derivácií prvého rádu.



Obr.: Stacionárne body - (ne)ostré lokálne maximá a sedlový bod.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Poznámka 4.2

- *Z definície stacionárneho bodu vyplýva, že sa v tomto bode diferenciál funkcie (ak existuje) rovná nule.*
- *Teda graf funkcie dvoch premenných $z = f(x, y)$ má v tomto bode dotykovú rovinu rovnobežnú s rovinou ρ_{xy}.*
- *Stacionárny bod funkie f, v ktorom funkcia nemá lokálny extrém sa nazýva sedlový bod funkcie f, resp. skrátene sedlo.*

Už vieme, v ktorých bodoch funkcia f môže mať lokálny extrém.

Veta 4.2 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému)

Nech funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ spojité parciálne derivácie druhého rádu a nech bod $\mathbf{a}$ je jej stacionárnym bodom. Potom platí:

a) *ak pre každý bod $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ priestoru $\mathbb{E}^n$ je $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) > 0$, tak funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ (ostré) lokálne minimum;*

b) *ak pre každý bod $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ priestoru $\mathbb{E}^n$ je $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < 0$, tak funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ (ostré) lokálne maximum;*

c) *ak existujú body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ priestoru $\mathbb{E}^n$ také, že $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) \cdot d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_2) < 0$, tak funkcia f nemá v bode $\mathbf{a}$ lokálny extrém.*

Druhý diferenciál funkcie f v bode $\mathbf{a}$ je polynomická funkcia (polynóm) druhého stupňa. Aby sme nemuseli vždy určovať, či je kladný, záporný alebo mení znamienko, uvedieme si jednoduchšie tvrdenie. Najprv pre funkcie dvoch premenných.

Veta 4.3

Nech funkcia $z = f(x, y)$ má v bode $\mathbf{a}$ spojité parciálne derivácie druhého rádu a nech bod $\mathbf{a}$ je jej stacionárnym bodom. Potom platí:

1. *Ak hodnota* $D = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$, *potom funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ (ostrý) lokálny extrém a to:*
   a) *ak* $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x^2} > 0$ *je to (ostré) lokálne minimum;*
   b) *ak* $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x^2} < 0$ *je to (ostré) lokálne maximum.*
2. *Ak hodnota $D < 0$, potom funkcia f nemá v bode $\mathbf{a}$ lokálny extrém.*

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Všimnime si, že predchádzajúca veta hovorí, že ak tzv. Hessova matica

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}(x,y)$$

je pozitívne definitná v bode **a**, tak tam f má lokálne maximum, ak je je negatívne definitná v bode **a**, tak tam f má lokálne minimum, a ak je indefinitná v bode **a**, tak tam nemá lokálny extrém (je to sedlo).

Poznámka 4.3

- *Veta nič nehovorí o tom, čo sa deje, keď $D = 0$ pre vyšetrovaný stacionárny bod danej funkcie.*
- *V tomto prípade o existencii lokálneho extrému nevieme povedať nič, lokálny extrém v tomto stacionárnom bode môže, ale nemusí existovať.*
- *Musíme použiť inú úvahu, napr. definíciu lokálneho extrému a pomocou nej rozhodnúť o existencii lokálneho extrému.*

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

- Uvažujme funkciu $f(x,y) = x^4 + y^4$. Jej jediným stacionárnym bodom je bod $\mathbf{a} = (0,0)$. Hodnota $D = 0$, lebo $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x \partial y} = 0$, ale funkcia f má v bode $(0,0)$ ostré lokálne minimum, lebo pre každý bod $(x,y) \neq (0,0)$ je $f(x,y) = x^4 + y^4 > 0 = f(0,0)$.
- Uvažujme funkciu $f(x,y) = x^3$. Jej jedným stacionárnym bodom je opäť bod $\mathbf{a} = (0,0)$ (táto funkcia má nekonečne veľa stacionárnych bodov, sú to body priamky $x = 0$). Hodnota $D = 0$, lebo $\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x \partial y} = 0$, ale funkcia f nemá v bode $(0,0)$ lokálny extrém, dokážte!

Poznámka 4.4

Pozor! Aj v prípade, keď $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ *je* $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq 0$ (resp. $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq 0$), *tak vo svojom stacionárnom bode* $\mathbf{a}$ *funkcia* f *môže, ale nemusí mať lokálny extrém.*

Predchádzajúcu postačujúcu podmienku existencie lokálneho extrému vieme zovšeobecniť aj pre funkcie viac premenných ($n \geq 3$). Dá sa ukázať, že platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.4 (Sylvestrovo kritérium)

Nech funkcia $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bode **a** *spojité parciálne derivácie druhého rádu a nech bod* **a** *je jej stacionárnym bodom.*

Symetrická Hessova matica $H_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ je

a) *kladne definitná (f má v bode* **a** *(ostré) lokálne minimum) $\Leftrightarrow$ všetky jej (rohové) hlavné minory sú kladné, t.j. ak*

$$H_{11} > 0, \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

b) *záporne definitná (f má v bode* **a** *(ostré) lokálne maximum) $\Leftrightarrow$ všetky jej (rohové) hlavné minory striedajú znamienka v tomto zmysle*

$$H_{11} < 0, \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

c) *indefinitná (f má v bode* **a** *sedlo) $\Leftrightarrow$ všetky jej (rohové) hlavné minory sú nenulové a striedajú znamienka inak ako v a), b).*

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Pri hľadaní lokálnych extrémov danej funkcie postupujeme takto:

- najprv nájdeme všetkých kandidátov na lokálny extrém, t.j. všetky stacionárne body a body, v ktorých niektorá parciálna derivácia prvého rádu neexistuje;
- každý z týchto bodov vyšetríme, t.j. zistíme, či v ňom má daná funkcia lokálne extrém alebo nie;
- pri stacionárnych bodoch môžeme použiť predchádzajúce postačujúce podmienky;
- pri bodoch kde neexistuje derivácia je nutné použiť inú úvahu.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Veta 5.1 (Weierstrassova veta o ohraničenosti)

Nech funkcia f je spojitá na uzavretej, ohraničenej množine $M \subset \mathbb{E}^n$. Potom je funkcia f ohraničená na množine M.

Veta 5.2 (Weierstrassova veta o minime a maxime)

Nech funkcia f je spojitá na uzavretej, ohraničenej množine $M \subset \mathbb{E}^n$. Potom funkcia f nadobúda svoje maximum a minimum na množine M (tj. existujú body $\mathbf{d}, \mathbf{c} \in M$ také, že pre všetky $\mathbf{x} \in M$ platí $f(\mathbf{d}) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{c})$).

Poznámka 5.1

Všetky predpoklady týchto dvoch viet, spojitosť funkcie f, uzavretosť a ohraničenosť množiny M, sú nutné!

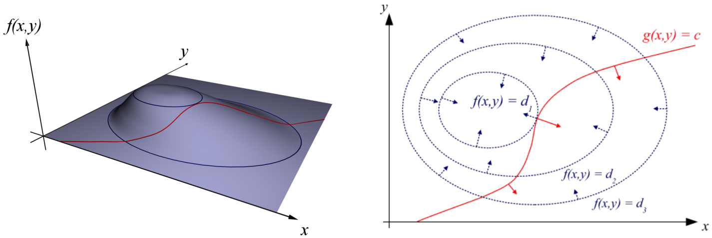
Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

- Pri praktických aplikáciách sa často hľadá maximálna (minimálna) hodnota funkcie nie na celom jej definičnom obore, ale len na nejakej jeho časti (napr. na nejakej krivke alebo na priestorovej ploche).
- Môže to byť v prípade, že maximalizujeme funkciu za nejakých dodatočných podmienok.
- Daná podmienka sa chápe ako väzba premenných - preto ide o tzv. viazané extrémy.
- Je to aj dôležité pri hľadaní globálnych extrémov.

Uvažujme nasledujúcu úlohu: Nech je daná funkcia dvoch premenných $z = f(x, y)$ definovaná na množine $M \subset \mathbb{E}^2$ a nech $P \subset M$ je množina takých bodov z množiny M, ktorých súradnice vyhovujú rovnici $g(x, y) = 0$ (príp. $g(x, y) = c$), t.j. $P = \{(x, y) \in M : g(x, y) = 0\}$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

- Našou úlohou je nájsť lokálne extrémne hodnoty funkcie f na množine P.
- Teda máme nájsť lokálne extrémy parciálnej funkcie, ktorá je určená funkciou f na množine P.
- Takýmto (lokálnym) extrémom hovoríme viazané (lokálne) extrémy funkcie f. Podmienku $g(x, y) = 0$, ktorá určuje množinu P, nazývame väzba.



Obr.: Účelová funkcia f a väzba g.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Definícia 5.1

Hovoríme, že funkcia $y = f(\mathbf{x})$ *má v bode* $\mathbf{a} \in D(f) \subset \mathbb{E}^n$ *lokálny extrém viazaný podmienkami* $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1, \dots, m,\ m < n$, *ak existuje okolie* $O(\mathbf{a})$ *bodu* $\mathbf{a}$, *že* $\forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$, *pre ktoré platia dané väzby, nastane 1 z prípadov:* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}),\ \ f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$.

Ako nájsť viazané lokálne extrémy? Ako postupovať pri hľadaní viazaných lokálnych extrémov danej funkcie $z = f(x, y)$ pri väzbe $g(x, y) = 0$?

- Ak sa z väzby dá jednoznačne vyjadriť jedna premenná pomocou druhej, t.j. $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow$

$$x = \varphi(y),\ y \in I,\ \text{resp. } y = \psi(x),\ x \in J,$$

  tak ľahko nájdeme vyjadrenie parciálnej funkcie F určenej funkciou f na danej väzbe. Bude mať tvar $F(y) = f(\varphi(y), y)$, $y \in I$, resp. $F(x) = f(x, \psi(x))$, $x \in J$. Následne hľadáme (voľné) lokálne extrémy tejto funkcie (už len jednej premennej).

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

- Ak sa z väzby $g(x, y) = 0$ nedá jednoznačne vyjadriť (resp. nevieme vyjadriť) jedna z premenných, tak úloha nájsť viazaný lokálny extrém je zložitejšia.
- Možno použiť tzv. Lagrangeovu metódu multiplikátorov:
- Je založená na myšlienke, že v bode maxima f nemôže rásť v smere bodov z okolia, kde $g = 0$.
- Predstavme si teraz, že kráčame po krivke danej väzbou.
- Chceme "naraziť" na body, v ktorých f nemení hodnoty.
- Buď je krivka daná väzbou vrstevnicou funkcie f, vtedy sú f, g rovnobežné, alebo sme dosiahli takú hladinu funkcie f, že sa jej hodnoty nemenia v žiadnom smere.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Teda hľadáme také body x, y, aby platili rovnice

$$g(x, y) = 0, \quad \nabla f(x, y) = -\lambda \nabla g(x, y)$$

pre nejakú hodnotu $\lambda \in \mathbb{R}$. Túto konštantu (parameter) λ nazývame Lagrangeov multiplikátor. Aby sme zahrnuli obe rovnice do jednej zaveďme si pomocnú funkciu

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

ktorú nazývame Lagrangeova funkcia.

- Funkcia L je určite definovaná na množine P.
- Pre každý bod $(x, y) \in P$ je $g(x, y) = 0$, preto pre každý takýto bod je $L(x, y) = f(x, y)$.
- Nech funkcia L má v bode $\mathbf{a} \in P$ lokálne maximum.
- Zrejme $L(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$ a vieme, že existuje $O(\mathbf{a}) : \ \forall \mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$ je $L(\mathbf{x}) \leq L(\mathbf{a})$, t.j. $f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) + \lambda g(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$, lebo $g(\mathbf{a}) = 0$, keďže $\mathbf{a} \in P$.
- Takže $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ pre $\mathbf{x} \in P \cap O(\mathbf{a})$, t.j. v bode $\mathbf{a}$ má funkcia f lokálne maximum vzhľadom na množinu P.
- V bode $\mathbf{a}$ má teda lokálne maximum parciálna funkcia určená funkciou f na množine (väzbe) P, teda v bode $\mathbf{a}$ má funkcia f viazané lokálne maximum pri väzbe $g(\mathbf{x}) = 0$.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Veta 5.3

Nech funkcia L *má v bode* $\mathbf{a} \in P$ *(kde* P *je množina určená väzbou* $g(x, y) = 0$*) lokálny extrém (voľný lokálny extrém), potom funkcia* f *má v tomto bode* $\mathbf{a}$ *viazaný lokálny extrém pri väzbe* $g(x, y) = 0$.

Poznámka 5.2

Treba si uvedomiť, že obrátená veta neplatí, t.j. neplatí, že "ak funkcia f *má v bode* $\mathbf{a}$ *viazaný lokálny extrém pri väzbe* $g(x, y) = 0$*, tak funkcia* L *má v tomto bode* $\mathbf{a} \in P$ *lokálny extrém."*

Príklad 5.1

Uvažujme funkciu $f(x, y) = 2xy$ *s väzbou* $x - y = 0$*. Je evidentné, že funkcia* f *má v bode* $(0, 0)$ *viazané lokálne minimum pri väzbe* $x - y = 0$*. Na druhej strane, však funkcia* $L(x, y) = 2xy + \lambda(x - y)$ *nemá v bode* $(0, 0)$ *ležiacom na priamke* $x - y = 0$ *lokálny extrém (bod* $(0, 0)$ *s hodnotou* $\lambda = 0$ *je jediným kandidátom na lokálny extrém tejto funkcie* L *s vlastnosťou, že má ležať na priamke* $x - y = 0$*, avšak je zrejmé, že funkcia* L *s parametrom* $\lambda = 0$*, t.j. funkcia* $L(x, y) = 2xy$ *nemá lokálny extrém v bode* $(0, 0)$*).*

Poznámka 5.3

Pozor, ak funkcia L nemá v bode $\mathbf{a} \in P$ *lokálny extrém, potom o viazanom (lokálnom) extréme funkcie f v tomto bode* **a** *pri danej väzbe nevieme povedať nič.*
Teda táto metóda, v niektorých prípadoch (my sa pokúsime im vyhnúť), nezaručuje nájdenie všetkých viazaných lokálnych extrémov.

Pozrime sa ešte ako budeme vlastne hľadať (voľné) lokálne extrémy funkcie L ležiace na množine P. Predpokladajme, že $f, g \in C^2(P)$. Funkcia L môže mať lokálny extrém ležiaci na množine P len v stacionárnych bodoch tejto funkcie, ktoré ležia na množine P, t.j. v bodoch, ktorých súradnice vyhovujú rovniciam (podmienkam)

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial \lambda} = g(x,y) = 0.$$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

- Dostávame sústavu troch rovníc o troch neznámych x, y, λ.
- Ak trojica x_0, y_0, λ_0 je riešením tejto sústavy, tak bod $(x_0, y_0) \in P$ je kandidátom na to, že v ňom funkcia f môže mať viazaný (lokálny) extrém pri väzbe $g(x, y) = 0$ (lokálny extrém vzhľadom na množinu P).
- O tom, či v tomto nájdenom stacionárnom bode ležiacom v množine P má funkcia L (pri nájdenej hodnote $\lambda = \lambda_0$) lokálny extrém už vieme rozhodnúť.

Veta 5.4 (Nutná Lagrangeova podmienka)

Nech $(x_0, y_0) \in P$ je taký bod, že v ňom funkcia f má lokálny extrém vzhľadom na množinu P a platí, že $f, g \in C^1(\mathcal{O}(x_0, y_0))$, pričom $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Potom $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\dfrac{\partial L(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial L(x_0, y_0)}{\partial y} = 0, g(x_0, y_0) = 0.$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Príklad 5.2

- *Nech* $f(x,y) = x + y$ *a* $g(x,y) = x^2 + y^2$, *potom triviálne* $P = \{(0,0)\}$. *Teda* f *má v tomto bode aj maximum aj minimum.*
- *Nech* $f(x,y) = x$ *a* $g(x,y) = y^2 + x^4 - x^3$. *Krivka generovaná väzbou má v bode* $(0,0) \in P$ *singularitu - hrot. Funkcia* f *má v tomto bode minimum.*

V oboch prípadoch $\nabla g(0,0) = (0,0)$ *a* $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\nabla f(0,0) = -\lambda \nabla g(0,0).$$

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na množine $P \subset D(f) \subset \mathbb{E}^n$, pričom množina P je určená väzbami (rovnicami) $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, sa situácia výpočtovo komplikuje, ale princíp ostáva rovnaký.
A už vieme, že body, v ktorých Jacobiho matica $(\nabla g_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla g_m(\mathbf{x}))^T$ nemá plnú hodnosť m, treba vyšetriť zvlášť.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

- Ak sa z väzby dá jednoznačne vyjadriť jedna premenná alebo niekoľko premenných ako funkcie ostatných premenných, po ich dosadení do pôvodnej funkcie f, úloha sa redukuje na voľné extrémy.
- Ak sa z väzieb nedá jednoznačne vyjadriť jedna alebo niekoľko premenných pomôžeme si Lagrangeovou funkciou

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) +$$

$$+\lambda_2 g_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n),$$

kde $\lambda_i \in \mathbb{E}^1$, $i = 1, 2, \dots, m$. Ak nájdeme (voľný) lokálny extrém funkcie L, ktorý leží na množine P, potom v tomto bode má funkcia f viazaný lokálny extrém pri daných väzbách (lokálny extrém vzhľadom na množinu P).

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

V tejto časti využijeme poznatky prezentované v predchádzajúcich dvoch častiach, a to na hľadanie maxima a minima, resp. najväčšej a najmenšej hodnoty funkcie viac premenných na nejakej množine $M \subseteq D(f)$. Globálne maximum a globálne minimum funkcie f na množine M nazývame globálne (absolútne) extrémy funkcie f na množine M. Pre funkcie viac premenných je situácia analogická ako v prípade jednej premennej. V našom prípade existenciu globálnych extrémov spojitej funkcie f na uzavretej, ohraničenej množine M zaručuje Weierstrassova veta o maxime a minime, avšak nič nám táto veta nehovorí o tom ako ich nájsť. Praktický návod ako nájsť globálne extrémy dáva nasledujúca veta.

Veta 5.5

Nech funkcia f je spojitá na uzavretej, ohraničenej množine $M \subset \mathbb{E}^n$. Potom funkcia f nadobúda globálny (absolútny) extrém na množine M buď v bode lokálneho extrému ležiaceho vo vnútri množiny M alebo v niektorom hraničnom bode množiny M.

Pri hľadaní extrémov budeme postupovať nasledovne:

- Nájdeme všetky tzv. "podozrivé" body (podozrivé z toho, že by v nich funkcia f mohla mať globálny extrém na danej množine M).Podľa predchádzajúcej vety sú to tieto body:
  - body ležiace vo vnútri množiny M, v ktorých funkcia f môže mať lokálny extrém;
  - body ležiace na hranici množiny M, v ktorých funkcia f môže mať viazaný extrém vzhľadom na hranicu množiny M (viazaný extrém na hranici množiny M);
- Vypočítame funkčné hodnoty funkcie f vo všetkých "podozrivých" bodoch a najväčšia (najmenšia) hodnota z nich je globálne maximum (globálne minimum) funkcie f na množine M.

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných

Niekoľko jednoduchých úloh:

1. Určte najmenšiu vzdialenosť bodu $B = (1, 10)$ od paraboly $y^2 = 4x$ pomocou diferenciálneho počtu funkcie viac premenných.
   $[d = \sqrt{45}]$
2. Pomocou diferenciálneho počtu funkcie viac premenných na ploche $z = 3 + xy$ nájdite bod, ktorý je najbližšie k počiatku súradnicovej sústavy.
   $[A_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1), A_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1); d = \sqrt{5}]$
3. Aké sú rozmery pravouhlého otvoreného bazénu, ktorý má pri danom objeme V najmenší povrch?
   $[a = \sqrt[3]{2V}\,,\ b = \sqrt[3]{2V}\,,\ c = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}]$

Parciálna derivácia funkcie viac premenných
Diferencovateľnosť funkcie a jej diferenciál
Derivácie a diferenciály vyšších rádov
Lokálne extrémy funkcie viac premenných
Viazané a globálne extrémy funkcie viac premenných