Prednáška 3

Funkcie viacerých premenných

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Mgr. Jozef Kiseľák, PhD.

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných

7. marca 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Agenda

1. **Reálne funkcie viacerých premenných**
2. **Limita funkcie**
3. **Spojitosť funkcie viac premenných**
4. **Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných**

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Reálne funkcie viacerých premenných

Definícia 1.1

Nech množina $M \subset \mathbb{E}^n$. Ak každému $\mathbf{x} \in M$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je priradené práve jedno reálne číslo $y \in \mathbb{E}^1$, tak hovoríme, že na množine M máme danú reálnu funkciu $n-$reálnych premenných, označujeme ju $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in M$, resp. $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$. Množinu M nazývame definičný obor funkcie f, označujeme ho $D(f)$.

Definícia 1.2

Obor hodnôt zobrazenia $y = f(\mathbf{x})$ *je množina*

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : \ \exists\, \mathbf{x} \in D(f), \ y = f(\mathbf{x})\}.$$

Obrazom množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ *je*

$$f[A] = \{y \in \mathbb{R} : \ \exists\, \mathbf{x} \in A, \ y = f(\mathbf{x})\}.$$

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Poznámka 1.1

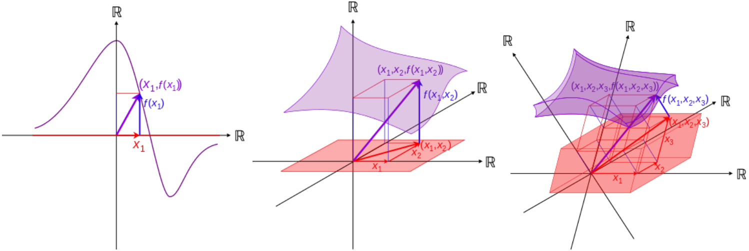
- *Reálne číslo* $f(\mathbf{x})$ *predstavuje funkčnú hodnotu funkcie* f *v bode* $\mathbf{x} \in D(f)$.
- *Z definície vyplýva, že funkcia* f *je jednoznačne určená* $D(f)$ *a predpisom, ktorý každému bodu* $\mathbf{x} \in D(f)$ *priradí jedinú funkčnú hodnotu* $f(\mathbf{x})$.
- *Pokiaľ je daný predpis ale nie definičný obor funkcie* f, *tak* $D(f)$ *sa rozumie množina všetkých bodov* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *pre ktoré má predpis zmysel.*

Definícia 1.3

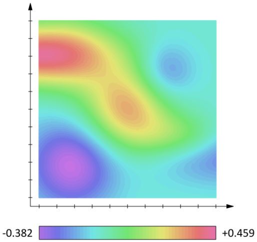
Grafom funkcie (zobrazenia) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *na množine* $M \subseteq D(f)$ *je množina usporiadaných dvojíc*

$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})),\ \mathbf{x} \in M.$$

Označenie: $\mathrm{gr}_{\mathrm{M}}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.



Obr.: Grafy funkcií v $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$. Červenou sú znázornené ich definičné obory.



Obr.: Farebné odtiene reprezentujú intenzitu skalárneho poľa (napr.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Príklad 1.1

V teórii kódovania je Leeova[a] *vzdialenosť*

$$\rho_L(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} \min(|x_i - y_i|, q - |x_i - y_i|).$$

medzi dvoma textovými reťazcami $x_1x_2\dots x_n$ *a* $y_1y_2\dots y_n$ *nad* q*-árnou abecedou,* $q \geq 2$*, vlastne funkcia* $2n$ *premenných.*

[a] Pre $q = 2, 3$ sa zhoduje s Hammingovou vzdialenosťou.

Príklad 1.2

- *Funkcia* $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *je reálnou funkciou dvoch reálnych premenných s* $D(f) = \mathbb{R}^2$, $H(f) = [0,\infty)$ *a jej graf predstavuje eliptický paraboloid.*
- *Funkcia* $g(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *je reálnou funkciou dvoch reálnych premenných s* $D(f) = \mathbb{R}^2$, $H(f) = \mathbb{R}$ *a jej graf predstavuje hyperbolický paraboloid.*

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Poznámka 1.2

Pri zostrojovaní grafu funkcie dvoch premenných je výhodné zostrojiť priesečnice grafu funkcie rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami (napr. $x = 0, y = 0, z = 0$), alebo rovinami prechádzajúcimi niektorou zo súradnicových osí. Nazývame ich rezmi. Rezy rovnobežné s rovinou R_{xy} nazývame vrstevnicami.

Poznámka 1.3

Ak chápeme graf funkcie dvoch premenných ako reliéf krajiny, potom vrstevnica funkcie na úrovni c je množina všetkých bodov s nadmorskou výškou rovnou číslu c. Pojem vrstevnice funkcie samozrejme môžeme definovať aj pre funkciu $n-$premenných, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ale v tomto prípade sa stráca jej "geografický" význam.

Príklad 1.3

Načrtnite (zostrojte) graf funkcie $g(x, y) = 4 - y^2$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Základné pojmy, ako sú ohraničenosť funkcie, ohraničenosť zdola, zhora funkcie, maximum, minimum funkcie na množine, parciálna funkcia, sú definované ako u funkcie jednej reálnej premennej. Aj operácie s funkciami viac premenných sa robia tak ako tomu bolo v prípade funkcií jednej premennej.

Definícia 1.4

Funkcia f sa nazýva ohraničená zdola (zhora) na množine $M \subseteq D(f)$, ak množina jej funkčných hodnôt na množine M je ohraničená zdola (zhora), tj. ak množina $\{y \in \mathbb{E}^1 : y = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in M\}$ je ohraničená zdola (zhora). Funkcia f sa nazýva ohraničená[a] na množine $M \subseteq D(f)$, ak je ohraničená zdola aj zhora na množine M.

[a] Zrejme je ohraničená na množine $M \subseteq D(f)$ práve vtedy, keď existuje $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ také, že pre každé $\mathbf{x} \in M$ platí $|f(\mathbf{x})| \leq c$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Definícia 1.5

Nech množina $M \subseteq D(f)$ a nech existuje bod $\mathbf{x_0} \in M$ taký, že pre všetky $\mathbf{x} \in M$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x_0})$ $(f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x_0}))$. Potom hovoríme, že funkcia f nadobúda v bode $\mathbf{x_0}$ maximum (minimum) na množine M a píšeme $f(\mathbf{x_0}) = \max\limits_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x})$ $\left(f(\mathbf{x_0}) = \min\limits_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x})\right)$. Maximum a minimum funkcie na množine M nazývame extrémami funkcie f na množine M.

Definícia 1.6

Nech funkcia f je definovaná na množine M a $M_1 \subset M$. Potom funkciu φ definovanú na množine M_1 takým spôsobom, že $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ pre $\mathbf{x} \in M_1$ nazývame parciálnou funkciou k funkcii f na množine M_1.

Definícia 1.7

Nech f, g sú funkcie, ktorých definičné obory sú $D(f)$, $D(g)$. Potom súčet $f+g$, rozdiel $f-g$, súčin $f\cdot g$ sú funkcie definované na množine $D(f)\cap D(g)$, pričom pre každé $\mathbf{x}\in D(f)\cap D(g)$ platí $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$, $(f-g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})$, $(f\cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})$. Podiel $\dfrac{f}{g}$ je funkcia definovaná na množine $D(f)\cap\{\mathbf{x}\in D(g):\ g(\mathbf{x})\neq 0\}$ a pre každý bod $\mathbf{x}$ z tejto množiny platí $(\dfrac{f}{g})(\mathbf{x}) = \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$.

Pozrime sa na to, ako bola zložená funkcia definovaná pre funkcie jednej premennej.

Definícia 1.7

Nech f, g sú funkcie, ktorých definičné obory sú $D(f)$, $D(g)$. Potom súčet $f+g$, rozdiel $f-g$, súčin $f \cdot g$ sú funkcie definované na množine $D(f) \cap D(g)$, pričom pre každé $\mathbf{x} \in D(f) \cap D(g)$ platí $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $(f-g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})$, $(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$. Podiel $\frac{f}{g}$ je funkcia definovaná na množine $D(f) \cap \{\mathbf{x} \in D(g) : \ g(\mathbf{x}) \neq 0\}$ a pre každý bod $\mathbf{x}$ z tejto množiny platí $(\frac{f}{g})(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$.

Pozrime sa na to, ako bola zložená funkcia definovaná pre funkcie jednej premennej. Nech sú dané dve funkcie: $u = \varphi(x)$, $x \in A$, $y = f(u)$, $u \in B$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Definícia 1.7

Nech f, g sú funkcie, ktorých definičné obory sú $D(f)$, $D(g)$. Potom súčet $f+g$, rozdiel $f-g$, súčin $f\cdot g$ sú funkcie definované na množine $D(f)\cap D(g)$, pričom pre každé $\mathbf{x}\in D(f)\cap D(g)$ platí $(f+g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$, $(f-g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})$, $(f\cdot g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})$. Podiel $\dfrac{f}{g}$ je funkcia definovaná na množine $D(f)\cap\{\mathbf{x}\in D(g):\ g(\mathbf{x})\neq 0\}$ a pre každý bod $\mathbf{x}$ z tejto množiny platí $\left(\dfrac{f}{g}\right)(\mathbf{x})=\dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$.

Pozrime sa na to, ako bola zložená funkcia definovaná pre funkcie jednej premennej. Nech sú dané dve funkcie: $u=\varphi(x)$, $x\in A$, $y=f(u)$, $u\in B$. Ľubovoľnému $x\in A$ takému, že $\varphi(x)=u\in B$ vieme priradiť prvok (hodnotu) $y=f(\varphi(x))$ a to nasledujúcim postupným priradením

$$x\in A\xrightarrow{\varphi}u=\varphi(x)\in B\xrightarrow{f}y=f(u)=f(\varphi(x))\in\mathbb{R}.$$

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Definícia 1.7

Nech f, g sú funkcie, ktorých definičné obory sú $D(f)$, $D(g)$. Potom súčet $f+g$, rozdiel $f-g$, súčin $f \cdot g$ sú funkcie definované na množine $D(f) \cap D(g)$, pričom pre každé $\mathbf{x} \in D(f) \cap D(g)$ platí $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $(f-g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})$, $(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$. Podiel $\frac{f}{g}$ je funkcia definovaná na množine $D(f) \cap \{\mathbf{x} \in D(g) : g(\mathbf{x}) \neq 0\}$ a pre každý bod $\mathbf{x}$ z tejto množiny platí $(\frac{f}{g})(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$.

Pozrime sa na to, ako bola zložená funkcia definovaná pre funkcie jednej premennej. Nech sú dané dve funkcie: $u = \varphi(x)$, $x \in A$, $y = f(u)$, $u \in B$. Ľubovoľnému $x \in A$ takému, že $\varphi(x) = u \in B$ vieme priradiť prvok (hodnotu) $y = f(\varphi(x))$ a to nasledujúcim postupným priradením

$$x \in A \xrightarrow{\varphi} u = \varphi(x) \in B \xrightarrow{f} y = f(u) = f(\varphi(x)) \in \mathbb{R}.$$

Takto sme si definovali zloženú funkciu $y = (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$ pre každé $x \in A$ také, že $\varphi(x) \in B$, pričom f je vonkajšia zložka a φ je vnútorná zložka danej zloženej funkcie.

Čo sa týka zloženej funkcie, v prípade funkcií viac premenných, je situácia o čosi zložitejšia!

Definícia 1.8

Nech funkcia $m-$premenných $y = f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ je definovaná na množine $P \subset \mathbb{E}^m$ a nech $t_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $t_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sú funkcie n-premenných definované na množine $M \subset \mathbb{E}^n$. Nech pre každý bod $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ je bod

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$$

z množiny P. Potom funkciu $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, resp. funkciu

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

nazývame zloženou funkciou definovanou na množine M. Funkcii f hovoríme hlavná zložka a funkciám $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ vedľajšie zložky zloženej funkcie.

Pri vyšetrovaní funkcií viac premenných budeme používať parciálne funkcie špeciálneho typu.

Čo sa týka zloženej funkcie, v prípade funkcií viac premenných, je situácia o čosi zložitejšia!

Definícia 1.8

Nech funkcia $m-$premenných $y = f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ je definovaná na množine $P \subset \mathbb{E}^m$ a nech $t_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $t_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sú funkcie n-premenných definované na množine $M \subset \mathbb{E}^n$. Nech pre každý bod $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ je bod

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$$

z množiny P. Potom funkciu $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, resp. funkciu

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

nazývame zloženou funkciou definovanou na množine M. Funkcii f hovoríme hlavná zložka a funkciám $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ vedľajšie zložky zloženej funkcie.

Pri vyšetrovaní funkcií viac premenných budeme používať parciálne funkcie špeciálneho typu. Nech funkcia $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je definovaná na množine $M \subset \mathbb{E}^n$.

Označme $M(x_i = a_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ množinu tých bodov z množiny M, ktorých i-té súradnice sú rovnaké a rovnajú sa číslu a_i. Podobne označme $M(x_i = a_i, x_j = a_j)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$ množinu tých bodov z M, ktorých i-té súradnice sú rovnaké, rovnajú sa číslu a_i a j-té súradnice sú rovnaké, rovnajú sa číslu a_j. Je zrejmé, že množina $M(x_i = a_i) \subset M$ a aj $M(x_i = a_i, x_j = a_j) \subset M$. Funkciu

$$F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

definovanú na množine $M(x_i = a_i)$, resp. funkciu

$$F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) =$$

$$= f(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

definovanú na množine $M(x_i = a_i, x_j = a_j)$, nazývame parciálnou funkciou k funkcii f na množine $M(x_i = a_i)$, resp. $M(x_i = a_i, x_j = a_j)$.

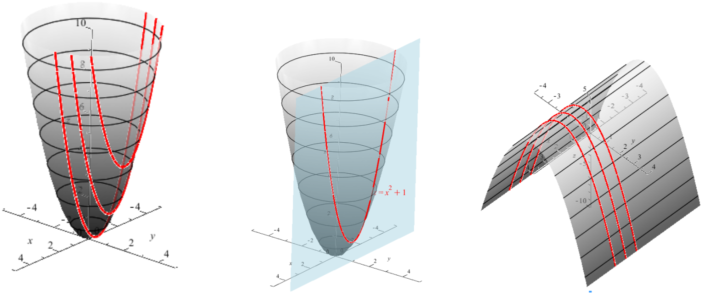
Poznámka 1.4

Parciálna funkcia k funkcii f na množine, ktorá má viac "pevných" súradníc sa definuje analogicky.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Príklad 1.4

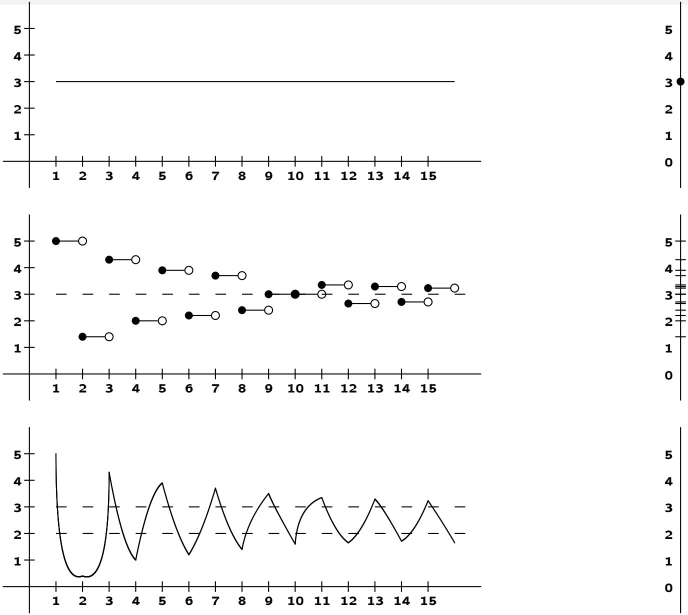
Uvažujme funkciu $f(x,y)=x^2+y^2$. *My už vieme, že jej grafom je eliptický (rotačný) paraboloid. Parciálnou funkciou k funkcii* f *na množine* $M(y=1)$ *je funkcia* $z=F(x)=f(x,1)=x^2+1$, $x\in\mathbb{E}^1$, *čo už je funkcia jednej reálnej premennej, pozri nasledujúci obrázok .*



Obr.: Funkcie $f(x,y)=x^2+y^2$ a $g(x,y)=4-y^2$ a príslušné rezy.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Limita funkcie



Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Limita funkcie

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Poznámka 2.1

Proces približovania sa k určitej hodnote funkcie f je možné vyšetrovať, určovať a teda definovať jej limitu len v hromadných bodoch jej definičného oboru.

Vyslovme si ako prvú Cauchyho definíciu limity v **nevlastnom bode**. Majme funkciu g s takým definičným oborom, že $(c_1, \infty) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$ pre každé $c_1 \in \mathbb{R}$.

Hovoríme, že číslo A je limitou funkcie g v bode $+\infty$, ak

- pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ a pre všetky dostatočne veľké $x \in \mathcal{D}(g)$ platí, že $g(x)$ je dostatočne blízko A.
- $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists L_1 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathcal{D}(g), x > L_1) : |g(x) - A| < \varepsilon$$

zápis: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = A$

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Veta 2.1

Ak funkcia f má limitu v $+\infty$, potom je ohraničená na $(c_1, \infty) \cap \mathcal{D}(f)$.

Veta 2.2 (O policajtoch)

Nech pre funkcie f, g, h platí:

a) $f \leq g \leq h$ *na* $(c_1, \infty) \cap \mathcal{D}(f)$,
$(c_1, \infty) \cap \mathcal{D}(f) = (c_1, \infty) \cap \mathcal{D}(g) = (c_1, \infty) \cap \mathcal{D}(h)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = A$.

Potom existuje $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ *a* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = A$.

Veta 2.3

Nech $\mathcal{D}(f \circ \varphi) \cap (c_1, +\infty) \neq \emptyset$ *pre každé* $c_1 \in \mathbb{R}$. *Ak* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ *a* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, *tak* $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \circ \varphi)(x) = A$.

Veta 2.4

Nech existuje $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, $(c_1,\infty)\cap\mathcal{D}(f) = (c_1,\infty)\cap\mathcal{D}(g)$ *a*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A, \lim_{x\to+\infty} g(x) = B.$$

Potom existujú i

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)), \lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x)), \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \ (B\neq 0),$$

pričom platí

a) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x)) = A+B$,

b) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$,

c) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Veta 2.5

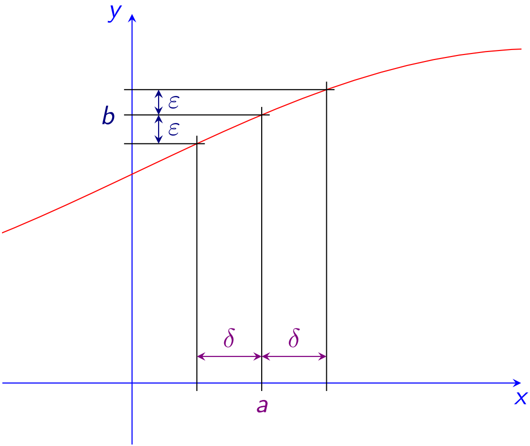
Priamka daná rovnicou $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$ je asymptotou so smernicou ku grafu funkcie f v bode $+\infty$ práve vtedy, keď pre konštanty $k, q \in \mathbb{R}$ platí, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad a \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Veta 2.6

Priamka daná rovnicou $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$ je asymptotou so smernicou ku grafu funkcie f v bode $-\infty$ práve vtedy, keď pre konštanty $k, q \in \mathbb{R}$ platí, že

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad a \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = q.$$



Obr.: Limita funkcie $f(x) = \sin(x - 1.3) + 1.72$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Pojem limity funkcie v bode patrí k základným pojmom diferenciálneho počtu. Popisuje správanie sa funkcie na prstencovom okolí bodu, v ktorom limitu určujeme.

Poznámka 2.2

- *Funkčná hodnota sa môže líšiť od hodnoty limity v danom bode.*
- *Dokonca funkcia nemusí byť v danom bode vôbec definovaná.*

Pri funkcii jednej premennej: $\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon),$$

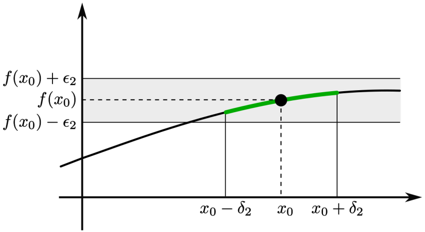
resp.

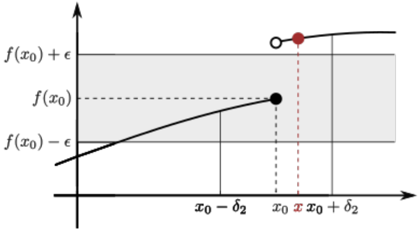
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(x \in O_\delta^*(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b)),$$

kde pre $\delta > 0$ zrejme
$O_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}, \; O_\delta^*(x_0) = O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}.$

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, ak

- pre každé $\varepsilon > 0$ a pre všetky x z $\mathcal{D}(f)$ dostatočne blízke bodu x_0 platí $f(x)$ je dostatočne blízke $f(x_0)$.
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$





Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Veta 2.7 (Nevlastná limita a prevrátená hodnota)

Majme $x_0 \in \mathbb{R}^*, x_1 \in \mathbb{R}$.

a) *Ak* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ *a* $f > 0$ $(f < 0)$ *na vhodnej množine, tak*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \ (-\infty).$$

b) *Ak* $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$, *tak*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

c) *Ak* $\lim\limits_{x \to x_1 \pm} |f(x)| = +\infty$, *tak*

$$\lim_{x \to x_1 \pm} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Veta 2.8

Nech funkcia f je taká, že $\mathcal{D}(f) \cap ((c_1, x_0) \cup (x_0, c_2)) \neq \emptyset$ *pre ľubovoľné* $c_1 < x_0 < c_2$. *Funkcia f je spojitá v bode* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ *práve vtedy, keď* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funkcia f je zľava spojitá v bode $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, ak

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Funkcia f má limitu A v bode $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ zľava, ak

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))(x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$

označenie: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$ alebo $f(x) \to A$ pre $x \to x_0-$

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Dirichletova funkcia

- nekonštantná periodická, pričom perióda je každé kladné racionálne číslo
- všade nespojitá
- nemá ani jednostranné limity

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to x_0-} \chi(x)$ neex. $\quad \lim\limits_{x \to x_0+} \chi(x)$ neex. $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \chi(x)$ neex.

$\chi(x_0)$ vždy definovaná

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Vyslovme si Cauchyho definíciu limity vo vlastnom bode pre prípad funkcie viacerých premenných.

Definícia 2.1 (Cauchyho definícia limity)

Nech bod $\mathbf{a}$ *je hromadným bodom definičného oboru* $D(f) \subset \mathbb{E}^n$ *funkcie* f*. Hovoríme, že číslo* $b \in \mathbb{E}^1$ *je limitou funkcie* f *v bode* $\mathbf{a}$*, ak*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in D(f))(0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - b| < \varepsilon),$$

čo zapisujeme $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$.

Poznámka 2.3

- *Definíciu tohto pojmu môžeme napísať aj v tvare:*
  $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b \Leftrightarrow$
  $$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\mathbf{x} \in D(f))(\mathbf{x} \in O^*_\delta(\mathbf{a}) \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(b)).$$
- *Presnejšie, v tejto definícii hovoríme o vlastnej limite funkcie vo vlastnom bode.*

Limitu funkcie v bode vieme definovať aj pomocou postupností bodov daného metrického priestoru. Dostávame sa k Heineho definícii limity.

Poznámka 2.3

- *Definíciu tohto pojmu môžeme napísať aj v tvare:*
  $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b \Leftrightarrow$

  $$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\mathbf{x} \in D(f))(\mathbf{x} \in O^*_\delta(\mathbf{a}) \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(b)).$$

- *Presnejšie, v tejto definícii hovoríme o vlastnej limite funkcie vo vlastnom bode.*

Limitu funkcie v bode vieme definovať aj pomocou postupností bodov daného metrického priestoru. Dostávame sa k Heineho definícii limity.

Definícia 2.2 (Heineho definícia limity)

Nech bod $\mathbf{a}$ *je hromadným bodom definičného oboru* $D(f) \subset \mathbb{E}^n$ *funkcie* f*. Hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *limitu číslo* $b \in \mathbb{E}^1$ *práve vtedy, keď pre každú postupnosť bodov* $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{x}_k \in D(f)$ *takú, že* $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ *pre* $k \to +\infty$ *postupnosť funkčných hodnôt* $\{f(\mathbf{x}_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje k číslu* b *pre* $k \to +\infty$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Veta 2.9

a) *Funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ nanajvýš jednu limitu.*

b) *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2$ *a* $b_1 < b_2$, *potom existuje* $O^*(\mathbf{a})$ *také, že* $\forall \mathbf{x} \in O^*(\mathbf{a}) \cap D(f) \cap D(g)$ *je* $f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x})$.

c) *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2$ *a existuje* $O^*(\mathbf{a})$ *také, že* $\forall \mathbf{x} \in O^*(\mathbf{a}) \cap D(f) \cap D(g)$ *je* $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$, *potom* $b_1 \le b_2$.

d) *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b$ *a existuje* $O^*(\mathbf{a})$ *také, že* $\forall \mathbf{x} \in O^*(\mathbf{a}) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ *je* $f(\mathbf{x}) \le h(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$. *Potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = b$.

e) *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ *a funkcia g je ohraničená na nejakom prstencovom okolí bodu* $\mathbf{a}$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = 0$.

f) *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})) = b_1 \pm b_2$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = b_1 \cdot b_2$. *Ak naviac* $b_2 \ne 0$, *potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Aj v prípade funkcie jednej premennej potrebujeme okrem existencií limít predpoklad naviac.

Príklad 2.1

Majme $f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ *a* $g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ *Zrejme*

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1,$ *ale* $g(f(x)) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$ *Takže*

$$0 = \lim_{x \to 0} g(f(x)) \neq \lim_{t \to 0} g(t) = 1.$$

Veta 2.10 (O limite zloženej funkcie)

Uvažujme zloženú funkciu $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$ *a označme* $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)$*. Nech existujú limity* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \varphi_i(\mathbf{x}) = b_i$*,* $i = 1, 2, \dots, m$ *a také prstencové okolie* $O^*(\mathbf{a})$ *bodu* $\mathbf{a}$*, že* $(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})) = \mathbf{t} \neq \mathbf{b}$ *pre každé* $\mathbf{x} \in O^*(\mathbf{a}) \cap D(F)$*, pričom* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$*. Nech ďalej existuje limita* $\lim\limits_{\mathbf{t} \to \mathbf{b}} f(\mathbf{t}) = A$*. Potom v bode* $\mathbf{a}$ *existuje aj limita zloženej funkcie* $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$ *a platí, že*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{t} \to \mathbf{b}} f(\mathbf{t}) = A.$$

Poznámka 2.4

Zásadný rozdiel medzi limitou funkcie jednej premennej a limitou funkcie viac premenných:

- *Pri funkcii jednej premennej sa k tomuto limitnému bodu môžeme približovať len po priamke, a to sprava alebo zľava.*
- *Funkcia jednej premennej má limitu v bode práve vtedy, keď má obidve jednostranné limity v tomto bode a tie sa rovnajú.*
- *V prípade funkcií viac premenných sa môžeme k danému limitnému bodu blížiť nekonečne veľa spôsobmi, tzv. "cestami".*
- *Napr. u funkcií dvoch premenných po (rôznych) priamkách, parabolách ale aj iných rozmanitých krivkách.*
- *Teda, existencia limity v danom bode znamená, že nezáleží na "ceste", po ktorej sa k danému limitnému bodu blížime.*
- *Ak pre rôzne "cesty" dostaneme rôzne hodnoty limity funkcie znamená to, že limita v danom bode neexistuje.*

Definujeme si limitu funkcie v bode vzhľadom na množinu - predstavuje to analógiu k pojmu limita funkcie sprava, zľava pri funkcii jednej premennej.

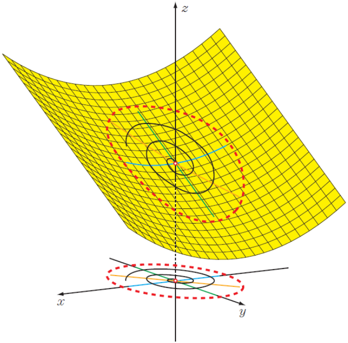
Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Príklad 2.2

Počítajme limitu

$$L = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{e^{x_1\dots x_n} - 1}{x_1 \dots x_n}.$$

Zrejme $\phi_1(\mathbf{x}) = x_1 \dots x_n$ *a* $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$. *Predpoklady vety sú splnené a teda* $L = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1.$



Obr.: Rôzne cesty v okolí bodu $(0, 0)$ - priamky a špirála.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Definícia 2.3 (Cauchyho definícia)

Nech množina $M \subset D(f)$ a bod $\mathbf{a}$ je hromadný bod množiny M. Hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ limitu číslo $b \in \mathbb{E}^1$ vzhľadom na množinu M, ak
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in M)(0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - b| < \varepsilon)$, *čo zapisujeme* $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in M}} f(\mathbf{x}) = b$.

Poznámka 2.5

- *Aj pre limitu funkcie v bode vzhľadom na množinu je možné vysloviť Heineho definíciu!*
- *Pri funkcii jednej premennej pojem* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ *vlastne predstavuje limitu funkcie v bode* $a \in \mathbb{E}^1$ *vzhľadom na množinu* $M = (a, +\infty) \cap D(f)$.

Nasledujúca veta, ktorá dáva do vzťahu limitu funkcie v bode a limitu funkcie v bode vzhľadom na množinu.

Nasledujúca veta, ktorá dáva do vzťahu limitu funkcie v bode a limitu funkcie v bode vzhľadom na množinu.

Veta 2.11

Nech existuje $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$ *a bod* $\mathbf{a}$ *je hromadný bod množiny* $M \subset D(f)$. *Potom* $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in M}} f(\mathbf{x}) = b$.

Poznámka 2.6

Táto veta sa používa hlavne na dokazovanie neexistencie limity. Ak nájdeme dve množiny ("cesty") $M_1 \subset D(f)$, $M_2 \subset D(f)$, *pričom bod* $\mathbf{a}$ *je ich hromadným bodom a* $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in M_1}} f(\mathbf{x}) \neq \lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in M_2}} f(\mathbf{x})$, *potom podľa predchádzajúcej vety* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *neexistuje.*

Zrejme platí nasledujúce:

Veta 2.12

Nech $M_1 \subset M \subset D(f)$ *a bod* $\mathbf{a}$ *je hromadný bod množiny* M_1. *Ak existuje* $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in M}} f(\mathbf{x}) = b$, *potom aj* $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in M_1}} f(\mathbf{x}) = b$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Je dobré si uvedomiť, že Cauchyho definícia limity funkcie v bode vyjadrená pomocou okolí predstavuje univerzálnu definíciu limity funkcie jednej ale aj viac premenných. Zahŕňa totiž vlastnú ($b \in \mathbb{E}^1$), nevlastnú ($b = +\infty$, resp. $b = -\infty$) limitu vo vlastnom bode $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ aj v nevlastnom bode. Nevlastné body priestoru $\mathbb{E}^2$ sú body

- $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, -\infty)$, $(+\infty, +\infty)$, $(+\infty, -\infty)$
- $(c, +\infty)$, $(c, -\infty)$, $(-\infty, c)$, $(+\infty, c)$, kde $c \in \mathbb{E}^1$.

Ako definovať okolia týchto bodov? Napr. okolie bodu $(+\infty, +\infty)$ v priestore $\mathbb{E}^2$ je v súlade s maximovou metrikou množina $(d_1, +\infty) \times (d_2, +\infty)$, kde $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Definícia 2.4

Pre funkciu dvoch premenných si definujme vlastnú limitu v nevlastnom bode $(+\infty, +\infty)$ ako $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y) = b \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists L > 0)(\forall (x, y) \in D(f))(x > L, y > L \Rightarrow |f(x, y) - b| < \varepsilon).$$

Poznámka 2.7

- *Podobne vieme zapísať ostatné prípady nevlastných limít.*
- *Ak v definíciách nahradíme $D(f)$ množinou $M \subset D(f)$, pričom bod* **a** *je jej hromadným bodom, tak dostaneme príslušné limity funkcie v bode* **a** *vzhľadom na množinu M.*

Ešte si uvedieme praktické tvrdenie na výpočet limít pomocou zámeny premenných, pričom BÚNV uvažujeme limitu v bode $(0,0)$.

Veta 2.13 (Limita v polárnych súradniciach)

Nech $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $(x_0, y_0) = (0,0) \in U^d$. Potom $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,\ L \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy a len vtedy, ak platí $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (r,\theta) \in W)(r \in (0,\delta) \Rightarrow F(r,\theta) \in O_\varepsilon(L))$, kde $W = R \times \Theta = \{(r, theta) : (x,y) \in D(f)\} \subseteq (0,\infty) \times (0, 2\pi]$ a $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Poznámka 2.8

Podľa predchádzajúcej vety nám na existenciu limity (v zmysle $\mathbb{R}^*$) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ stačí ukázať, že $g_1(r) \leq F(r,\theta) \leq g_2(r)$ pre každé $\theta \in (0, 2\pi] \cap \Theta$ a $\lim\limits_{r\to 0^+} g_i(r) = L,\ i = 1,2.$

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Spojitosť funkcie viac premenných

Sú typy funkcií, ktorá sa vyznačujú tým, že v bodoch blízkych danému reálnemu číslu $\mathbf{x}$ sa ich hodnoty "málo líšia" od $f(\mathbf{x})$. V tejto časti si zavedieme pojem spojitej funkcie viac premenných v bode a tiež všeobecnejší pojem spojitej funkcie v bode vzhľadom na množinu. Dá sa povedať, že

- hodnoty se menia plynule, teda pri dostatočne malej zmene hodnoty $\mathbf{x}$ sa hodnota $f(\mathbf{x})$ zmení ľubovolne málo;
- malej zmene argumentu odpovedá malá zmena funkčnej hodnoty.

Definícia 3.1

Nech bod $\mathbf{a}$ je hromadným bodom definičného oboru funkcie f a $\mathbf{a} \in D(f)$. Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $\mathbf{a} \in D(f)$ práve vtedy, keď $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Poznámka 3.1

Niekedy sa vynecháva podmienka[a] *bod* $\mathbf{a} \in D(f)^d$, *rozširuje totiž spojitosť aj do izolovaných bodov* $D(f)$. *Zrejme ak je bod* $\mathbf{a} \in D(f)$ *izolovaný, tak je v ňom funkcia* f *"triviálne" spojitá (dokážte!).*

[a]Potom hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $\mathbf{a} \in D(f)$, akk $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in D(f))(\rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon)$, resp. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in D(f))(\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{a}) \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{a})))$.

Pojem limity funkcie v bode vzhľadom na množinu nám umožňuje zaviesť aj pojem spojitej funkcie v bode vzhľadom na množinu. Tento pojem predstavuje analógiu k pojmu spojitosť funkcie sprava, zľava u funkcií jednej premennej.

Definícia 3.2

Nech bod $\mathbf{a}$ *je hromadným bodom množiny* $M \subset D(f)$, $\mathbf{a} \in M$. *Hovoríme, že funkcia* f *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *vzhľadom na množinu* M, *ak* $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in M}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Príklad 3.1

Ukážeme, že $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a} = (0, 0)$.

Zrejme pre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *platí* $|x_1 x_2| \leq \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, *preto*

$$\left|\sqrt{|x_1 x_2|} - 0\right| \leq \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{a}).$$

Nech $0 < \delta \leq \sqrt{2}\epsilon$, *potom pre* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\rho_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$ *platí*

$$|f(\mathbf{x}) - f(0)| \leq \frac{\rho_{\mathbb{E}^2}(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{\sqrt{2}} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq \epsilon.$$

Zrejmý je vzťah medzi pojmami spojitosť funkcie v bode a spojitosť funkcie v bode vzhľadom na množinu.

Veta 3.1

Ak funkcia f *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$, *potom je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *vzhľadom na každú množinu* $M \subset D(f)$, *ktorá obsahuje bod* $\mathbf{a}$ *a bod* $\mathbf{a}$ *je jej hromadným bodom.*

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Treba si opäť uvedomiť, že ''opačné'' tvrdenie neplatí.

Úloha 3.1

Ukážte, že funkcia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ *nie je spojitá v bode* $(0,0)$ *a ani ju nevieme predefinovať takým spôsobom, aby už v ňom spojitá bola.*

Príklad 3.2

Uvažujme funkciu f *z predchádzajúcej úlohy s* $D(f) = \mathbb{E}^2$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Treba si opäť uvedomiť, že ''opačné'' tvrdenie neplatí.

Úloha 3.1

Ukážte, že funkcia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ *nie je spojitá v bode* $(0,0)$ *a ani ju nevieme predefinovať takým spôsobom, aby už v ňom spojitá bola.*

Príklad 3.2

Uvažujme funkciu f *z predchádzajúcej úlohy s* $D(f) = \mathbb{E}^2$. *My už vieme, že* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ *neexistuje a teda f nie je spojitá v bode* $(0,0)$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Treba si opäť uvedomiť, že "opačné" tvrdenie neplatí.

Úloha 3.1

Ukážte, že funkcia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ *nie je spojitá v bode* $(0,0)$ *a ani ju nevieme predefinovať takým spôsobom, aby už v ňom spojitá bola.*

Príklad 3.2

Uvažujme funkciu f *z predchádzajúcej úlohy s* $D(f) = \mathbb{E}^2$*. My už vieme, že* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ *neexistuje a teda* f *nie je spojitá v bode* $(0,0)$*. Platí však to, že* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = 0 = f(0,0)$ *(pre ľubovoľné* $k \in \mathbb{R}$*), t.j. funkcia* f *je spojitá v bode* $(0,0)$ *vzhľadom na každú priamku* $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ *(vzhľadom na množinu).*

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Otázka: Kedy je funkcia f spojitá na množine $M \subset D(f)$?

Definícia 3.3

Nech $\mathbf{x}_0 \in M^d$. Hovoríme, že funkcia f je spojitá na množine $M \subset D(f)$, ak je spojitá v každom bode $\mathbf{x}_0 \in M$ vzhľadom na množinu M.

Poznámka 3.2

- *Ak $M = D(f)$, budeme stručne hovoriť, že funkcia f je spojitá.*
- *Definícia "ignoruje" izolované body množiny M, v týchto izolovaných bodoch je funkcia triviálne spojitá vzhľadom na množinu M.*
- *Spojitosť funkcie f na množine M nezávisí na hodnote funkcie f v izolovaných bodoch množiny M.*

Príklad 3.3

Majme funkciu $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2<1, \\ 1, & x^2+y^2=1. \end{cases}$ *Zrejme* $f \in C(\partial S)$ *ale* $f \notin C(S)$, *kde* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.

Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Z viet o limitách dostávame ihneď nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.1 (O operáciách so spojitými funkciami v bode)

Nech funkcie f, g sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom aj funkcie $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Naviac, ak $g(\mathbf{a}) \neq 0$ je aj funkcia $\dfrac{f}{g}$ spojitá v bode $\mathbf{a}$.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Z viet o limitách dostávame ihneď nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.1 (O operáciách so spojitými funkciami v bode)

Nech funkcie f, g sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom aj funkcie $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Naviac, ak $g(\mathbf{a}) \neq 0$ je aj funkcia $\dfrac{f}{g}$ spojitá v bode $\mathbf{a}$.

Pre spojitosť zloženej funkcie v bode platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.2

Nech funkcie $t_i = \varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sú spojité v bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Označme si $\mathbf{b} = (\varphi_1(\mathbf{a}), \varphi_2(\mathbf{a}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{a}))$ a nech funkcia $y = f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ je spojitá v bode $\mathbf{b}$. Potom zložená funkcia $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$.

Poznámka 4.1

Rovnaké tvrdenia môžeme vysloviť aj pre prípad spojitosti funkcie v bode vzhľadom na množinu.

Pojem spojitosť funkcie v bode nám umožňuje vysloviť nasledujúcu vetu, ktorá je častokrát užitočná pri výpočte limity zloženej funkcie.

Veta 4.3

Uvažujme zloženú funkciu $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$. *Nech existujú limity* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \varphi_i(\mathbf{x}) = b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ *a nech funkcia* f *je spojitá v bode* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. *Potom v bode* $\mathbf{a}$ *existuje aj limita zloženej funkcie* $F(\mathbf{x}) = f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$ *a platí, že* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})) = f(\mathbf{b})$.

Poznámka 4.2

Táto veta sa líši od vety 2.10 v tom, že predpoklad $(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})) \neq \mathbf{b}$ *pre každé* $\mathbf{x} \in O^*(\mathbf{a}) \cap D(F)$ *je nahradený spojitosťou funkcie* f *v bode* $\mathbf{b}$ *(tj. spojitosťou vonkajšej zložky zloženej funkcie v bode* $\mathbf{b}$*).*

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Veta 4.4 (Darbouxova veta o medzihodnote)

Nech funkcia f je spojitá na oblasti $G \subset \mathbb{E}^n$ a nech pre body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ platí $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$. Potom ku každému číslu $C \in \mathbb{E}^1$ ležiacemu medzi hodnotami $f(\mathbf{a})$ a $f(\mathbf{b})$ existuje bod $\mathbf{c} \in G$ taký, že $f(\mathbf{c}) = C$ (t.j. funkcia f nadobúda každú hodnotu medzi hodnotami $f(\mathbf{a})$, $f(\mathbf{b})$ aspoň v jednom bode oblasti G.)

Z tejto vety okamžite vyplýva Bolzanova veta, dôkaz ktorej je založený na Cantorovom princípe a implikuje de facto metódu bisekcie.

Lema 4.1 (Cantorov princíp vložených intervalov)

Nech $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť neprázdnych uzavretých intervalov taká, že

a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_{n+1} \subseteq I_n$;
b) *dĺžka intervalov I_n konverguje k nule.*

Potom prienik $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n$ obsahuje práve jedno reálne číslo.

Reálne funkcie viacerých premenných
Limita funkcie
Spojitosť funkcie viac premenných
Vlastnosti spojitej funkcie viac premenných

Veta 4.5 (Bolzanova veta)

Nech funkcia f je spojitá na oblasti $G \subset \mathbb{E}^n$ a nech pre body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ platí $f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) < 0$. Potom existuje aspoň jeden bod $\mathbf{c} \in G$ taký, že $f(\mathbf{c}) = 0$.