Milá študentka, milý študent,

tento učebný text je ešte vo fáze vývoja - aj keď je to druhá verzia. Preto by som Vás chcela poprosiť o spätnú väzbu prostredníctvom anonymného dotazníka, ktorého vyplnenie by Vám nemalo trvať viac ako 3 minúty a ktorým prispejete k skvalitneniu tohto textu.

Spätnú väzbu môžete poskytnúť, aj keď ste čítali iba niektorú/é z kapitol učebného textu.

Dotazník nájdete tu: https://forms.gle/zeXf8KcWpDa4MEoq9
Ďakujem.

Výpočet limity zloženej funkcie

(druhá verzia učebného textu)

Tento učebný text, ako už aj názov hovorí, sa venuje výpočtu limít zložených funkcií pomocou vety O limite zloženej funkcie. Pre prehľadnosť je rozdelený do nasledujúcich kapitol.

Lenka Košárová, Učiteľské štúdium matematika - chémia, prvý ročník magisterského štúdia.

Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, 2021.

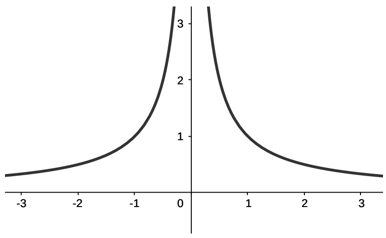
Prvá verzia učebného textu bola vytvorená ako praktická časť bakalárskej práce. Finálna verzia tohto textu by sa mala stať súčasťou praktickej časti magisterskej práce.

Predstavme si, že máme typickú úlohu, ktorú by sme našli v zbierke príkladov z matematickej analýzy v časti zaoberajúcej sa limitami funkcií.

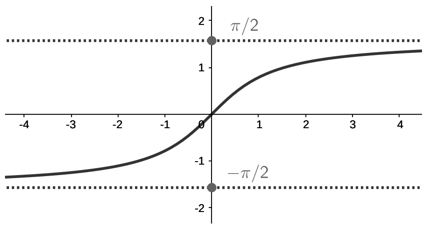
Príklad 1

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} \left|\frac{1}{x}\right|$.

Uvažujme, ako by sme mohli tento príklad vypočítať. Funkcia $\operatorname{arctg}\left|\frac{1}{x}\right|$ nie je definovaná v 0, teda nie je v tomto bode ani spojitá. Z čoho vyplýva, že v bode 0 nemôžeme počítať funkčnú hodnotu. Taktiež táto funkcia nevznikla z elementárnych funkcií pomocou algebrických operácií súčinu, súčtu a podobne, ale zložením. Skúsme ju rozložiť tak, aby nám to pomohlo. Nech vnútorná zložka $g(x)$ je absolútna hodnota z lineárne lomenej funkcie $\left|\frac{1}{x}\right|$ (Obr.1) a vonkajšia zložka $f(y)$ je funkcia $\operatorname{arctg}(y)$ (Obr.2).



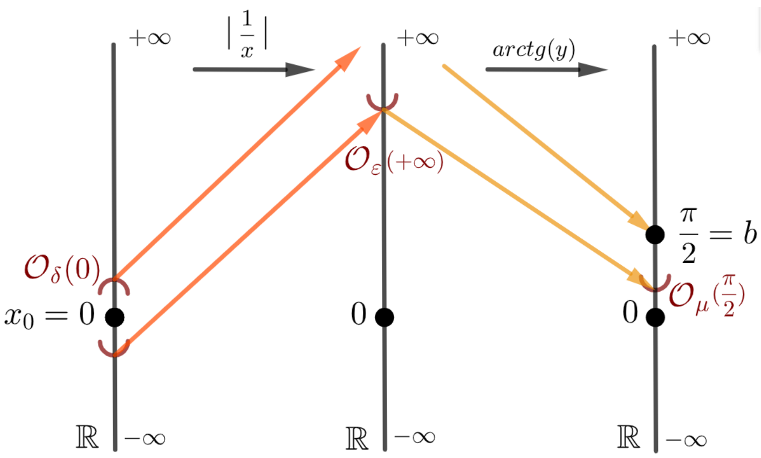
Obr. 1 : $g(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$



Obr. 2 : $f(y) = \operatorname{arctg}(y)$

Ľahko vieme vypočítať limitu vnútornej funkcie v čísle 0, čiže $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$. No a vo výsledku, teda v $+\infty$ zase vieme vypočítať limitu vonkajšej funkcie, čiže $\lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$.

Je možné, aby tieto dva výpočty stačili na vyriešenie príkladu? Skúsme sa nad tým zamyslieť pomocou diagramu s tromi reálnymi osami (Obr.3). Naľavo je os s definičným oborom vnútornej zložky $g(x)$, na strednej osi je obor hodnôt funkcie $g(x)$ a zároveň definičný obor vonkajšej zložky $f(y)$. Napravo je os s oborom hodnôt funkcie $f(y)$.



Obr. 3 : Presúvanie bodov na okoliach

Keďže sme vypočítali, že $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$, tak na obrázku 3 funkcia $\left|\frac{1}{x}\right|$ po oranžových čiarach presúva hodnoty z okolia $\mathcal{O}_\delta(0)$ čísla 0 na okolie $\mathcal{O}_\varepsilon(+\infty)$ nevlastného bodu $+\infty$. Tiež sme vypočítali $\lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$, a tak odtiaľ z okolia $\mathcal{O}_\varepsilon(+\infty)$ nevlastného bodu $+\infty$ funkcia $\operatorname{arctg}(y)$ presúva tieto hodnoty po žltých čiarach na ľavé okolie $\mathcal{O}_\mu(\frac{\pi}{2})$ čísla $\frac{\pi}{2}$. Všimnime si, že okolie $\mathcal{O}_\mu(\frac{\pi}{2})$ je jednostranné zľava, nakoľko hodnoty funkcie arkustangens blízko pri $+\infty$ sú nanajvýš $\frac{\pi}{2}$. Takto vyzerá cesta hodnôt z okolia $\mathcal{O}_\delta(0)$ na okolie $\mathcal{O}_\mu(\frac{\pi}{2})$.

Dúfame, že po našej doterajšej úvahe už nie je prekvapením, že platí nasledujúca veta.

Veta 1

Majme reálne číslo x_0, ktoré je hromadným bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = b$. Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to+\infty} f(y) = b.$$

Vďaka Vete 1 môžeme náš príklad vyriešiť veľmi jednoducho.

Riešenie - Príklad 1

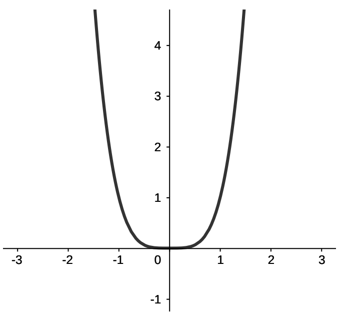
0 je hromadným bodom $D_{f\circ g} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Existujú limity: $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$ a $\lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$.
Záver: $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left|\frac{1}{x}\right| = \lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$.

Pozrime sa na príklad 2, v ktorom využijeme naše doterajšie úvahy.

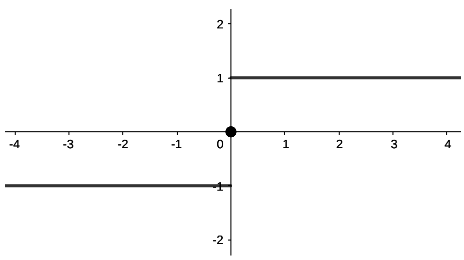
Príklad 2

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sgn}(x^4)$.

Zloženú funkciu si rozložme na vnútornú zložku mocninovú funkciu $g(x) = x^4$ (Obr.4) a vonkajšiu zložku funkciu signum $f(y) = \operatorname{sgn}(y)$ (Obr.5), ktorá kladným číslam priraďuje 1, záporným číslam -1 a nule priraďuje nulu.



Obr. 4 : $g(x) = x^4$



Obr. 5 : $f(y) = \operatorname{sgn}(y)$

Rovnako ako v príklade 1 aj teraz začneme výpočtom limity vnútornej zložky v nevlastnom bode $-\infty$, čiže $\lim\limits_{x_0 \to -\infty} x^4 = +\infty$ a následne vypočítame limitu vonkajšej zložky vo výsledku limity vnútornej zložky, teda v $+\infty$, čiže $\lim\limits_{y \to +\infty} \operatorname{sgn}(y) = 1$.
Opäť si predstavme cestu hodnôt z okolia bodu, v ktorom počítame limitu na okolie hodnoty limity zloženej funkcie, prípadne si ju môžete nakresliť. Vypočítali sme, že $\lim\limits_{x_0 \to -\infty} x^4 = +\infty$, a tak vnútorná funkcia x^4 prenáša hodnoty z okolia nevlastného bodu $-\infty$ na okolie nevlastného bodu $+\infty$. Odtiaľ z okolia $+\infty$ ich funkcia $\operatorname{sgn}(y)$ prenáša na okolie čísla 1, keďže sme vypočítali, že $\lim\limits_{y \to +\infty} \operatorname{sgn}(y) = 1$.

Aj pre túto situáciu platí veta. Zapísali sme ju ako nasledujúcu Vetu 2.

Veta 2

Nech $-\infty$ je hromadným bodom $D_{f \circ g}$ a existuje $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = b$. Potom

$$\lim_{x \to -\infty} f(g(x)) = \lim_{y \to +\infty} f(y) = b.$$

Preto riešenie príkladu môžeme zhrnúť nasledovne.

Riešenie - Príklad 2

$-\infty$ je hromadným bodom $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.
Existujú limity: $\lim\limits_{x_0 \to -\infty} x^4 = +\infty$ a $\lim\limits_{y \to +\infty} \operatorname{sgn}(y) = 1$.
Záver: $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sgn}(x^4) = \lim\limits_{y \to +\infty} \operatorname{sgn}(y) = 1$.

Vety 1 a 2 sa na seba veľmi podobajú, preto sa núka otázka. Mohli by sme ich zapísať iba do jednej vety?

Všimnime si, že vo Vete 1 je limita vnútornej zložky $+\infty$, zatiaľ čo vo Vete 2 je limita vnútornej zložky $-\infty$, preto by sme mohli použiť zápis $\pm\infty$. Ďalej venujme pozornosť bodu x_0. V príklade 2 sme vyšetrovali limitu v nevlastnom bode $-\infty$ a následne vyslovili Vetu 2 pre $x_0 = -\infty$. Obdobná veta pre $+\infty$ platí tiež, preto znovu môžeme použiť zápis $\pm\infty$. Vo Vete 1 však $x_0 \in \mathbb{R}$. Vedeli by sme spojiť do jedného zápisu $x_0 \in \mathbb{R}$ a $x_0 = \pm\infty$? Použijeme značenie $\mathbb{R}^*$ pre rozšírenú množinu reálnych čísel o $+\infty$ a $-\infty$ a zapíšeme $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Veta 3

Majme $x_0 \in \mathbb{R}^*$, ktoré je hromadným bodom $D_{f \circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{y \to \pm\infty} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$. Potom

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to \pm\infty} f(y) = b.$$

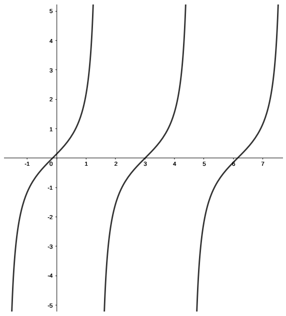
Práve sme sa venovali špeciálnemu prípadu vety O limite zloženej funkcie, konkrétne variantu b). V kapitole 5 si môžete pozrieť zosumarizované všetky varianty tejto vety. Rovnako tam nájdete aj všeobecnú verziu vety, ktorá pokrýva tieto varianty súčasne.

V predchádzajúcej kapitole v oboch príkladoch bola hodnota limity vnútornej zložky $+\infty$ alebo $-\infty$. Zmení sa niečo, ak hodnota vnútornej zložky bude reálne číslo? Pozrime sa na príklad 3.

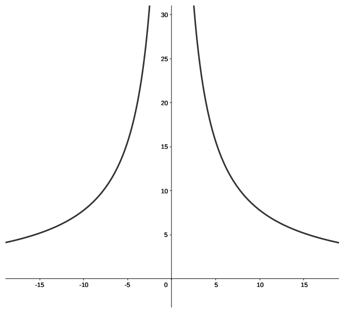
Príklad 3

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 3} \left|\frac{78}{\operatorname{tg}(x-3)}\right|$.

Rozložme si zloženú funkciu $\left|\frac{78}{\operatorname{tg}(x-3)}\right|$ na vnútornú zložku $\operatorname{tg}(x-3)$ (Obr.6) a vonkajšiu zložku $\left|\frac{78}{y}\right|$ (Obr.7). Funkcia $\operatorname{tg}(x-3)$ je spojitá v čísle 3, čiže stačí spočítať funkčnú hodnotu v 3. Teda $\operatorname{tg}(3-3) = 0 = \lim\limits_{x\to 3} \operatorname{tg}(x-3)$. Limita vonkajšej zložky v hodnote limity vnútornej zložky je $\lim\limits_{y\to 0} \left|\frac{78}{y}\right| = +\infty$.

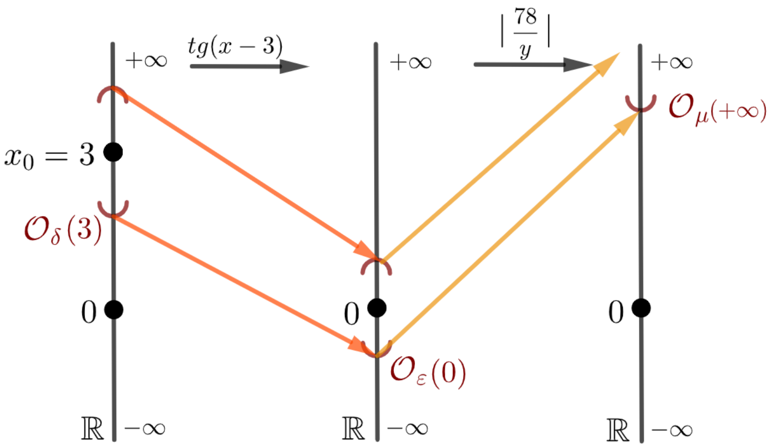


Obr. 6 : $g(x) = \operatorname{tg}(x-3)$



Obr. 7 : $f(y) = \left|\frac{78}{y}\right|$

Aj tento krát si môžeme premyslieť presúvanie bodov na okoliach pomocou diagramu na obrázku 8. Z našich výpočtov vieme, že funkcia $\operatorname{tg}(x-3)$ presúva hodnoty z okolia čísla 3 na okolie čísla 0 a odtiaľ ich funkcia $\left|\frac{78}{y}\right|$ presúva na okolie nevlastného bodu $+\infty$.



Obr. 8 : Presúvanie bodov na okoliach

Opäť platí veta, ktorá pokrýva výpočet príkladu 3, kde $x_0 \in \mathbb{R}$ a zároveň prípady, kde $x_0 = \pm\infty$, keďže aj pre tieto prípady platí obdobná veta

Veta 4

Majme $x_0 \in \mathbb{R}^*$, ktoré je hromadným bodom $D_{f \circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{y \to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $g(x)$ spĺňa podmienku `[nekonst]`. Potom

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to a} f(y) = b.$$

Všimnime si, že vo Vete 4 pribudla podmienka pre funkciu $g(x)$ v tomto texte označená `[nekonst]`. Toto označenie budeme používať pre podmienku nekonštantnosti vnútornej funkcie na nejakom okolí. Viac o tejto podmienke sa dozviete v samostatnej kapilote 4. Teraz iba spomeňme, že v štandardných zbierkach je málo príkladov, v ktorých by ste sa stretli s limitou zloženej funkcie, ktorá by nespĺňala túto podmienku.

Veta 4 je prípadom a) z variantov vety O limite zloženej funkcie, ktoré všetky uvádzame v kapitole 5.

Ako už vieme, na základe Vety 4 môžeme príklad 3 vypočítať nasledovne.

Riešenie - Príklad 3

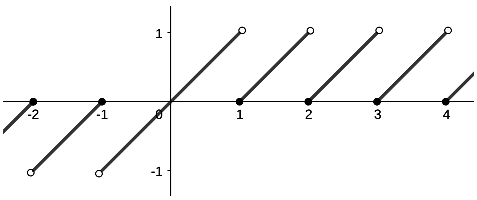
3 je hromadným bodom $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + 3, k \in \mathbb{Z}\}$.
Existujú limity: $\lim\limits_{x \to 3} \operatorname{tg}(x-3) = 0$ a $\lim\limits_{y \to 0} \left|\frac{78}{y}\right| = +\infty$.
Záver: $\lim\limits_{x \to 3} \left|\frac{78}{\operatorname{tg}(x-3)}\right| = \lim\limits_{y \to 0} \left|\frac{78}{y}\right| = +\infty$.

Do teraz sme sa zaoberali príkladmi, v ktorých existovala limita vnútornej aj vonkajšej zložky, čiže existovali jednostranné limity sprava i zľava a navyše ich hodnoty sa rovnali. Platí veta O limite zloženej funkcie aj pre jednostranné verzie limít? Počítajme spoločne príklad 4.

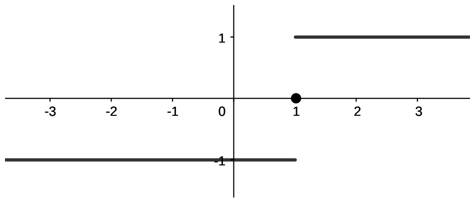
Príklad 4

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 3-} \operatorname{sgn}(\operatorname{frac}(x)-1)$.

Začnime rozložením funkcie $\operatorname{sgn}(\operatorname{frac}(x)-1)$. Nech vnútorná zložka je funkcia $g(x)=\operatorname{frac}(x)$ a vonkajšia zložka je funkcia $f(y)=\operatorname{sgn}(y-1)$. Označenie frac používame pre funkciu zlomková časť (angl. fraction = zlomok) niekde nazývanú aj necelá alebo desatinná časť, keďže priraďuje reálnemu číslu hodnotu za desatinnou čiarkou, jeho desatinnú časť.



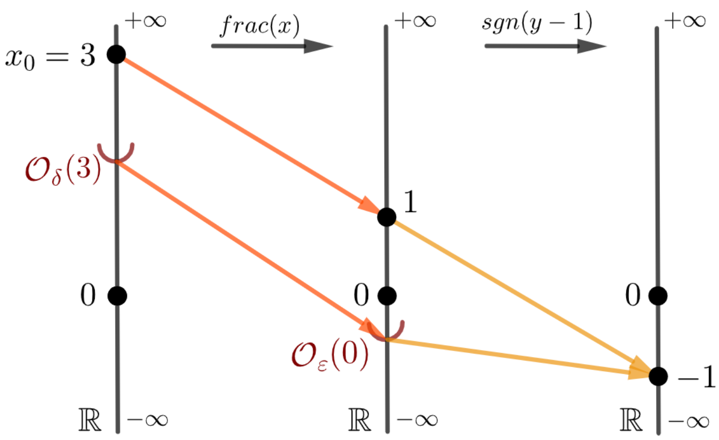
Obr. 9 : g(x)=frac(x)



Obr. 10 : $f(y)=\operatorname{sgn}(y-1)$

Limitu budeme počítať v bode $x_0=3$. Čo však znamená symbol „$-$“ napravo od 3? Ak by bol naľavo, znamenal by mínus, no teraz to tak nie je. Pripomeňme si, že je to zápis pre jednostrannosť limity v tomto bode. Preto sa bližšie pozrime na limitu funkcie $g(x)=\operatorname{frac}(x)$ v čísle 3 (Obr.9). Jednostranná limita sprava v čísle 3 je $\lim\limits_{x\to 3+} \operatorname{frac}(x)=0$ a jednostranná limita zľava v tomto čísle je $\lim\limits_{x\to 3-} \operatorname{frac}(x)=1-$. Teda $\lim\limits_{x\to 3+} \operatorname{frac}(x)=0\neq 1-=\lim\limits_{x\to 3-} \operatorname{frac}(x)$, z čoho vidíme, že limita v bode 3 neexistuje, ale existujú aspoň jednostranné limity.

Zaujíma nás limita v $3-$, teda ľavé okolie bodu 3 a jednostranná limita zľava $\lim\limits_{y\to 3-} \operatorname{frac}(x)=1-$ pre vnútornú zložku zloženej funkcie. Teraz, ako už vieme, potrebujeme spočítať limitu v $1-$ pre vonkajšiu zložku. Opäť ide o jednostrannú limitu zľava, čiže $\lim\limits_{y\to 1-} \operatorname{sgn}(y-1)=-1$.



Obr. 11 : Presúvanie bodov na okoliach

Vypočítali sme, že $\lim\limits_{y\to 3-} \operatorname{frac}(x) = 1-$ a preto, ako už vieme, je na obrázku 11 zaznačené, že funkcia $\operatorname{frac}(x)$ prenáša hodnoty z ľavého okolia čísla 3 na ľavé okolia čísla 1. Následne funkcia $\operatorname{sgn}(y-1)$ prenáša tieto hodnoty z ľavého okolia čísla 1 do čísla -1, keďže funkcia signum je konštantná.

Poďme k vete, ktorá hovorí o riešení príkladu 4 a zároveň o všetkých variantoch, kde existuje aspoň jednostranná limita vnútornej i vonkajšej zložky zloženej funkcie.

Veta 5

Majme $x_0 \in \mathbb{R}$, ktoré je hromadný bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0\pm} g(x) = a\pm$ a $\lim\limits_{y\to a\pm} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $g(x)$ spĺňa podmienku `[nekonst]`. Potom

$$\lim_{x\to x_0\pm} f(g(x)) = \lim_{y\to a\pm} f(y) = b.$$

Príklad 4 môžeme opäť jednoducho vypočítať pomocou vety 5.

Riešenie - Príklad 4

3 je hromadný bod $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.
Existujú limity: $\lim\limits_{y\to 3-} \operatorname{frac}(x) = 1-$ a $\lim\limits_{y\to 1-} \operatorname{sgn}(y-1) = -1$.
Záver: $\lim\limits_{x_0\to 3-} \operatorname{sgn}(\operatorname{frac}(x) - 1) = \lim\limits_{y\to 1-} \operatorname{sgn}(y-1) = -1$.

Rozoberieme si ďalšie prípady, kde aspoň jedna z limít zložiek existuje jednostranná. Ak by hodnota limity vnútornej zložky bola $+\infty$, či $-\infty$, tak by sme už limitu vonkajšej zložky nepočítali ako jednostrannú a navyše by podmienka `[nekonst]` bola neopodstatnená, ako vidíme vo Vete 6.

Veta 6

Majme $x_0 \in \mathbb{R}$, ktoré je hromadným bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0\pm} g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$. Potom

$$\lim_{x\to x_0\pm} f(g(x)) = \lim_{y\to\pm\infty} f(y) = b.$$

Použitie vety 6 si môžete vyskúšať na nasledujúcom príklade 5.

Príklad 5

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg}(x))^{111}$.

Riešenie - Príklad 5

$\frac{\pi}{2}$ je hromadným bodom $D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Existujú limity: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg}(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{y\to+\infty} y^{111} = +\infty$.
Záver: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg}(x))^{111} = \lim\limits_{y\to+\infty} y^{111} = +\infty$.

Môže sa stať, že iba jedna z limít zložiek existuje jednostranná, a to buď limita vonkajšej alebo vnútornej zložky. Ak je vnútorná zložka jednostranná, tak o riešení hovorí Veta 7.

Veta 7

Majme $x_0 \in \mathbb{R}$, ktoré je hromadným bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0\pm} g(x) = a \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $g(x)$ spĺňa podmienku `[nekonst]`. Potom

$$\lim_{x\to x_0\pm} f(g(x)) = \lim_{y\to a} f(y) = b.$$

Vypočítaním príkladu 6 si môžete skúsiť použitie Vety 7.

Príklad 6

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0+} \log(\max\{-\operatorname{sgn}(x), x\}^{2020})$

.

Riešenie - Príklad 6

0 je hromadným bod $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.
Existujú limity: $\lim\limits_{x\to 0+} \max\{-\operatorname{sgn}(x), x\} = 0$ a $\lim\limits_{y\to 0} \log(x^{2020}) = -\infty$.
Záver: $\lim\limits_{x\to 0+} \log(\max\{-\operatorname{sgn}(x), x\}^{2020}) = \lim\limits_{y\to 0+} \log(y^{2020}) = -\infty$.

Veta 8 je obmenou Vety 7. V tomto prípade existuje limita vnútornej zložky, ale limita vonkajšej zložky existuje aspoň jednostranná (t.j. jednostranná limita alebo limita).

Veta 8

Majme $x_0 \in \mathbb{R}^*$, ktoré je hromadným bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a\pm$ a $\lim\limits_{y\to a\pm} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $g(x)$ spĺňa podmienku `[nekonst]`. Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to a\pm} f(y) = b.$$

Aplikáciu vety 8 si môžete vyskúšať na výpočte príkladu 7.

Príklad 7

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln 7}{29^x}$.

Riešenie - Príklad 7

$-\infty$ je hromadným bodom $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.
Existujú limity: $\lim\limits_{x\to-\infty} 29^x = 0+$ a $\lim\limits_{y\to 0+} \frac{\ln 7}{y} = +\infty$.
Záver: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln 7}{29^x} = \lim\limits_{y\to 0+} \frac{\ln 7}{y} = +\infty$.

Vety 5, 6 , 7 a 8 sú v tomto poradí varianty c), d), e) a f) zo sumarizácie vety O limite zloženej funkcie v kapitole 5, kde aj uvádzame, ako môžeme tieto varianty spolu s variantami a) a b), ktorým sme sa venovali v predchádzajúcich kapitolách, zapísať do jednej vety.

V tejto kapitole sa budeme venovať podmienke vety O limite zloženej funkcie označenej v tomto texte ako `[nekonst]`. Je to skrátený zápis pre:

$$\texttt{[nekonst]} : (\exists \mathcal{O}(x_0))(\forall x \in \mathcal{O}^*(x_0) \cap D_g)\ g(x) \neq a$$

Čo znamená táto podmienka? Prečo overujeme, či existuje okolie bodu x_0 také, že pre všetky hodnoty v x z tohto okolia a zároveň definičného oboru funkcie g platí, že funkčná hodnota $g(x)$ sa nerovná hodnote limity a? Začneme jednoduchým kontrapríkladom 1, v ktorom vnútornú aj vonkajšiu zložku zloženej funkcie zastáva konštantná funkcia.

Kontrapríklad 1

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\pi} f(g(x))$, kde $g(x) = 2$ a $f(y) = \begin{cases} 5 & y \neq 2 \\ 3 & y = 2. \end{cases}$

Vysvetlenie - Kontrapríklad 1

Konštantná funkcia je spojitá, teda ľahko spočítame funkčnú hodnotu v bode π, $g(\pi) = 2$ a dostaneme, že limita vnútornej zložky je $\lim\limits_{x\to\pi} g(x) = 2$. Ďalej spočítajme limitu vonkajšej zložky v čísle 2 (funkčná hodnota v tomto bode nás nezaujíma, ale okolie tohto bodu), teda $\lim\limits_{y\to 2} f(y) = 5$. Ak by sme postupovali ako doteraz, teda by pre tento prípad platila veta O limite zloženej funkcie, tak podľa tejto vety by sme urobili záver, že $\lim\limits_{x\to\pi} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to 2} f(y) = 5$.

A kde je problém? V skutočnosti hodnota limity zloženej funkcie je 3. Zložená funkcia $f(g(x)) = 3$ je v reálnych číslach konštantná rovná 3, čiže jej limita je $\lim\limits_{x\to\pi} f(g(x)) = 3$. Teda $\lim\limits_{x\to\pi} f(g(x)) = 3 \neq 5 = \lim\limits_{y\to 2} f(y)$.

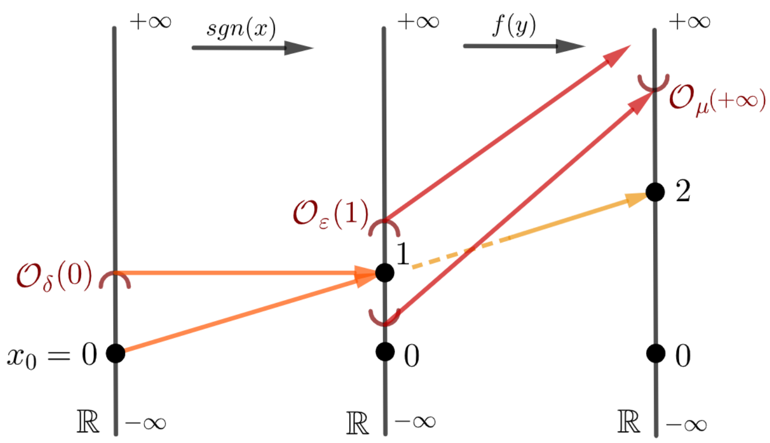
Pozrime sa na kontrapríklad 2, v ktorom už nie sú obe funkcie konštantné na celom definičnom obore. Vnútornou zložkou je funkcia signum, ktorá nespĺňa podmienku nekonštantnosti, keďže je na intervale $(0, \infty)$ konštantná a nás práve bude zaujímať limita na pravom okolí 0.

Kontrapríklad 2

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0+} f(g(x))$, kde $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a $f(y) = \begin{cases} \frac{3}{(y-1)^2} & y \neq 1, y \in \mathbb{R} \\ 2 & y = 1, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Vysvetlenie - Kontrapríklad 2

Začneme výpočtom jednostrannej limity sprava vnútornej zložky v čísle 0, čiže $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$. Limita vonkajšej zložky v čísle 1 je $\lim\limits_{y\to 1} f(y) = +\infty$, čo je na obrázku 12 naznačené červenými čiarami. Opäť, ak by sme urobili nesprávny záver, tak máme $\lim\limits_{x\to 0+} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to 1} f(y) = +\infty$.



Obr. 12: Presúvanie bodov na okoliach

Napíšme si predpis limity zloženej funkcie, aby sme mohli pokračovať v našich úvahách ďalej a dostali sa k sporu. Teda $\lim\limits_{x\to 0+}$ f(g(x))= $\lim\limits_{x\to 0+} H(x)$, kde:

$$H(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x, x \in \mathbb{R} \\ 3 & x = 0, x \in \mathbb{R} \\ \frac{3}{4} & x < 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Odkiaľ máme číslo $\frac{3}{4}$ v predpise zloženej funkcie pre $x < 0$? Namiesto $\frac{3}{4}$, by sme mohli písať aj $\frac{3}{(\operatorname{sgn}(x)-1)^2}$, ale vieme, že $\operatorname{sgn}(x)$ pre čísla menšie ako nula je -1 a $(-1-1)^2 = 4$. Teda pre $x < 0$ vždy dostaneme $\frac{3}{4}$. V prípade 3 pre $x = 0$ sme postupovali analogicky.
Takže teraz z predpisu vidíme, že zložená funkcia $H(x)$ je na pravom okolí bodu 0 konštantná a rovná 2, čiže jej limita je $\lim\limits_{x\to 0+} H(x) = 2$ (žltá čiara na obrázku 12) a teda rovnako ako v predchádzajúcom kontrapríklade $\lim\limits_{x\to 0+} H(x) = 2 \neq +\infty = \lim\limits_{y\to 1} f(y)$.

Podmienku `[nekonst]` by okrem funkcie signum nespĺňali napríklad aj funkcie celá horná časť, celá dolná časť alebo funkcie s predpisom $y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$, či $y = (-1)^{\lceil x \rceil}$ a mnoho ďalších. Základné elementárne funkcie (okrem konštantnej funkcie) ako napríklad mocninová, exponenciálna, logaritmická, či goniometrické funkcie sú rýdzo monotónne na nejakých podintervaloch svojich definičných oborov, čiže túto podmienku spĺňajú.

V kapitolách 2 až 4 sme si postupne spoločne rozobrali šesť variantov vety O limite zloženej funkcie. Naše úvahy sme začali v kapitole 2, kde sme sa venovali variantu b) nakoľko neobsahuje podmienku `[nekonst]`. Následne v kapitole 3 sme sa pozreli na príklad s podmienkou `[nekonst]`, čiže sme riešili príklad prislúchajúci variantu a). Varianty c) až f), ktorým sme sa venovali v kapitole 4 predpokladajú existenciu minimálne jednej jednostrannej limity vnútornej alebo vonkajšej zložky. Pre lepší prehľad nasledujúca Veta 9 vymenováva všetky tieto varianty.

Veta 9 (O limite zloženej funkcie - varianty)

a) Majme $x_0 \in \mathbb{R}^*$, ktoré je hromadný bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $g(x)$ spĺňa podmienku `[nekonst]`. Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to a} f(y) = b.$$

b) Majme $x_0 \in \mathbb{R}^*$, ktoré je hromadný bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{y\to \pm\infty} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$. Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to \pm\infty} f(y) = b.$$

c) Majme $x_0 \in \mathbb{R}$, ktoré je hromadný bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0\pm} g(x) = a\pm$ a $\lim\limits_{y\to a\pm} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $g(x)$ spĺňa podmienku `[nekonst]`. Potom

$$\lim_{x\to x_0\pm} f(g(x)) = \lim_{y\to a\pm} f(y) = b.$$

d) Majme $x_0 \in \mathbb{R}$, ktoré je hromadným bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0\pm} g(x) = \pm\infty$ a $\lim\limits_{y\to \pm\infty} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$. Potom

$$\lim_{x\to x_0\pm} f(g(x)) = \lim_{y\to \pm\infty} f(y) = b.$$

e) Majme $x_0 \in \mathbb{R}$, ktoré je hromadným bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0\pm} g(x) = a \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $g(x)$ spĺňa podmienku `[nekonst]`. Potom

$$\lim_{x\to x_0\pm} f(g(x)) = \lim_{y\to a} f(y) = b.$$

f) Majme $x_0 \in \mathbb{R}^*$, ktoré je hromadný bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a\pm$ a $\lim\limits_{y\to a\pm} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $g(x)$ spĺňa podmienku `[nekonst]`. Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to a\pm} f(y) = b.$$

Ak by sme zaviedli označenie $\mathbb{R}\pm$ pre množinu $\mathbb{R}\pm = \{b\pm : b \in \mathbb{R}\}$, tak by sme všetkých šesť variantov mohli zapísať do jednej vety, ako to je vo Vete 10.

Veta 10 (O limite zloženej funkcie)

Majme $x_0 \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}\pm$, ktoré je hromadým bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}\pm$ a $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, pričom $(\exists \mathcal{O}(x_0))(\forall x \in \mathcal{O}^*(x_0) \cap D_g) g(x) \neq a$. Potom

$$\lim_{x\to x_0} (f(g(x)) = \lim_{y\to a} f(y) = b.$$

Pokračujme v našich úvahách ďalej. V každom výpočte limity zloženej funkcie pomocou vety O limite zloženej funkcie počítame limitu vonkajšej zložky v hodnote limity vnútornej zložky. Dal by sa tento krok v niektorých prípadoch zjednodušiť? A čo spojitosť? Častokrát v príkladoch je funkcia vonkajšej zložky spojitá v hodnote limity vnútornej zložky. Ako už vieme, ak je funkcia spojitá v bode x_0, tak jej limitu dostaneme jednoducho výpočtom funkčnej hodnoty v tomto bode. Tento poznatok sme zahrnuli do Vety 11. Navyše podmienka `[nekonst]` v prípade spojitej vonkajšej zložky už nie je potrebná, keďže hodnoty v bode y a na jeho okolí sa už nemôžu líšiť.

Veta 11 (O limite zloženej funkcie so spojitou vonkajšou zložkou)

Majme $x_0 \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}\pm$, ktoré je hromadným bodom $D_{f\circ g}$. Nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}$ a funkcia f je spojitá v tejto limite. Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

Poznámky:

• Pripomeňme, že $\mathbb{R}\pm = \{b\pm : b \in \mathbb{R}\}$.

• Ak je hodnota limity vnútornej funkcie jednostranná, čiže $x_0 \in \mathbb{R}\pm$ tak postačí aj jednostranná spojitosť vonkajšej funkcie v tomto bode, aby boli predpoklady vety splnené.

• Všimnime si, že veta platí iba pre $a \in \mathbb{R}$. Limita vnútornej zložky nemôže byť $\pm\infty$, nakoľko o spojitosti v nekonečne nehovoríme.

Použitie vety O limite zloženej funkcie so spojitou vonkajšou zložkou si môžete vyskúšať na príklade 8.

Príklad 8

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to+\infty} \lceil \mathrm{arctg}(x) \rceil$.

Riešenie - Príklad 8

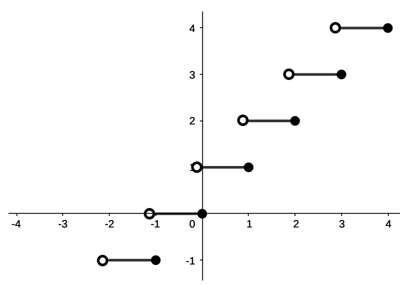
$+\infty$ je hromadným bodom $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.

Existuje limita: $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}-$.

Funkcia $f(y) = \lceil x \rceil$ je spojitá v bode $\frac{\pi}{2}$.

(postačilo by aj jednostranne spojitá zľava)

Záver: $\lim\limits_{x\to+\infty} \lceil \mathrm{arctg}(x) \rceil = \lceil \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}(x) \rceil = \lceil \frac{\pi}{2}- \rceil = 2$.



Obr. 13 : Funkcia celá horná časť.