Prednáška 2

Metrické priestory

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Mgr. Jozef Kiseľák, PhD.

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných
25. februára 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Agenda

1. **Euklidov priestor, pojem metriky**
2. **Vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore**
3. **Postupnosť bodov v metrickom priestore $\mathbb{X}$**
4. **Normovaný priestor**

Euklidov priestor, pojem metriky

- Odpoveď na otázku: **čo je to vzdialenosť?**
- Za akých okolností ju môžeme merať?
- Môže zmena metriky ovplyvniť výsledky?
- Praktické úlohy si vyžadovali prácu s pojmami a objektami v širšom kontexte ako je reálna os $\mathbb{R}$.
- Samotná podstata poznania - prirodzené zovšeobecnenie pojmu.

Už vieme, že vzdialenosť dvoch reálnych čísel (bodov) x, y definovaná ako $\rho_{\mathbf{E^1}}(x, y) := |x - y|$.

Euklidov priestor, pojem metriky

- Odpoveď na otázku: **čo je to vzdialenosť?**
- Za akých okolností ju môžeme merať?
- Môže zmena metriky ovplyvniť výsledky?
- Praktické úlohy si vyžadovali prácu s pojmami a objektami v širšom kontexte ako je reálna os $\mathbb{R}$.
- Samotná podstata poznania - prirodzené zovšeobecnenie pojmu.

Už vieme, že vzdialenosť dvoch reálnych čísel (bodov) x, y definovaná ako $\rho_{\mathbf{E^1}}(x, y) := |x - y|$. Táto vzdialenosť má tieto vlastnosti: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ je

a) $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$,

b) $|x - y| = |y - x|$,

c) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Definícia 1.1

Nech $\mathbb{X}$ je ľubovoľná (neprázdna) množina a každej dvojici prvkov $x, y \in \mathbb{X}$ je priradené nezáporné číslo $\rho(x, y)$ s vlastnosťami: $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$ je

a) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(axióma totožnosti),*

b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(axióma symetrie),*

c) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *(trojuholníková nerovnosť).*

Množinu $\mathbb{X}$ s funkciou ρ budeme nazývať metrický priestor[a], označovať ho $(\mathbb{X}, \rho)$ a funkciu ρ budeme nazývať metrikou na množine $\mathbb{X}$.

[a] Tento pojem zaviedol Maurice Fréchet v práci *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendic. Circ. Mat. Palermo 22 (1906) 1-74.

Poznámka 1.1

Prvky množiny $\mathbb{X}$ sa nazývajú body metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$. číslo $\rho(x, y)$ pre dané $x, y \in \mathbb{X}$ sa nazýva vzdialenosť bodov x, y v metrickom priestore $(\mathbb{X}, \rho)$.

Úloha 1.1

Ukážte, že nezápornosť metriky vyplýva priamo z definície.

Definícia 1.2

Množinu všetkých usporiadaných n-tíc reálnych čísel, tj. množinu $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ *s metrikou*

$$\rho_{\mathbf{E}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \text{ kde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, *nazývame n− rozmerný Euklidov priestor a označuje sa* $\mathbf{E}^n$[a].

[a] Množina $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbf{E}^1})$ je vlastne metrický priestor, presnejšie priestor $\mathbf{E}^1$.

Poznámka 1.2

- *Na jednej základnej množine* $\mathbb{X}$ *môže byť definovaných aj viacero metrík, preto metrický priestor nie je množinou* $\mathbb{X}$ *jednoznačne určený.*
- *Obyčajne namiesto* $(\mathbb{X}, \rho)$ *(ak je jasné o akú metriku ide), krátko píšeme* $\mathbb{X}$.

Na $\mathbb{R}^n$ môžeme definovať metriku aj inak ako bolo uvedené vyššie. Uvedieme si príklady pre $n = 2$, ktoré sa ľahko geometricky interpretujú.

Príklad 1.1 (Metriky v $\mathbb{R}^2$)

Ozn. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, *potom poznáme metriku:*

- *euklidovskú:* $\rho_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;
- *súčtovú ("poštársku"):* $\rho_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;
- *maximovú (Čebyševovu):* $\rho_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$;
- *diskrétnu:* $\rho_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{y}; \end{cases}$
- *železničnú:*
  $$\rho_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \rho_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0} \;\; \textit{sú kolineárne}, \\ \rho_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + \rho_{\mathbf{E}}(\mathbf{0}, \mathbf{y}), & \textit{inak}; \end{cases}$$
- *riečnu:* $\rho_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & x_1 = y_1, \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \textit{inak}. \end{cases}$

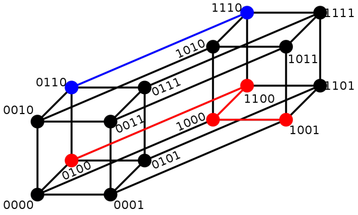
Úloha 1.2

Ukážte, že $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ *je metrika na* $\mathbb{R}$.

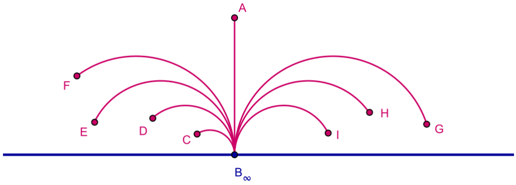
Príklad 1.2 (Iné metriky)

- *Nech* $M \neq \emptyset$, *potom* $\delta(X,Y) := \#(X \triangle Y)$ *je metrika na* $\mathcal{P}(M)$.
- $d = r\,\Delta\sigma = r\arccos(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)$ *je vzdialenosť na sfére*
- *Nech* $X = \Sigma^n,\ n \in \mathbb{N}$ *je množina reťazcov, potom* $d_H(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i, b_i)$ *je Hammingova vzdialenosť medzi* $\mathbf{a},\mathbf{b} \in X$ *- počet znakov, kde sa reťazce líšia.*
- *Priestor ohraničených funkcií na* I *je metrický priestor s metrikou* $\rho_\infty(f,g) := \sup_{x\in I}|f(x)-g(x)|$.
- *Poincarého metrika na Poincarého hornej polrovine* $\mathbb{H} = \{z = x+iy \mid y>0; x,y\in\mathbb{R}\}$ *je daná ako*

$$\rho(z_1,z_2) = 2\tanh^{-1}\frac{|z_1-z_2|}{|z_1-\overline{z_2}|}.$$



Obr.: 0100 → 1001 má vzdialenosť 3; 0110 → 1110 má vzdialenosť 1.



Obr.: Paralelné lúče v Poincarého hyperbolickej geometrii.

Nie všetky reálne situácie vedú k metrickým priestorom. Napr., ak by sme merali vzdialenosť medzi miestami na splavovanej rieke ako čas plavby lodí z x do y, vzdialenosť proti prúdu by bola väčšia než vzdialenosť po prúde. Ktorá z axióm by nebola platná?

Poznámka 1.3

Majme dve metriky d_1, d_2. Ak existujú kladné konštanty α, β: $\forall\ x, y \in \mathbb{X}$

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y),$$

povieme, že sú ekvivalentné.

Lema 1.1

Metriky $\rho_{\mathbf{E}},\ \rho_p,\ \rho_m$ sú ekvivalentné (aj v $\mathbb{R}^n$).

Vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore

V ďalších našich úvahách budeme potrebovať nasledujúce typy množín v metrickom priestore a taktiež aj niektoré vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore.
Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a bod $a \in \mathbb{X}$, $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore

V ďalších našich úvahách budeme potrebovať nasledujúce typy množín v metrickom priestore a taktiež aj niektoré vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore.
Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a bod $a \in \mathbb{X}$, $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Definícia 2.1

- *Otvorenou guľou so stredom v bode a a polomerom r nazývame množinu bodov $x \in \mathbb{X}$ takých, že $\rho(x, a) < r$, označujeme ju $G(a, r)$. Teda $G(a, r) = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x, a) < r\}$.*

Vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore

V ďalších našich úvahách budeme potrebovať nasledujúce typy množín v metrickom priestore a taktiež aj niektoré vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore.
Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a bod $a \in \mathbb{X}$, $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Definícia 2.1

- *Otvorenou guľou so stredom v bode a a polomerom r nazývame množinu bodov $x \in \mathbb{X}$ takých, že $\rho(x, a) < r$, označujeme ju $G(a, r)$. Teda $G(a, r) = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x, a) < r\}$.*
- *Uzavretou guľou so stredom v bode a a polomerom r nazývame množinu bodov $x \in \mathbb{X}$ takých, že $\rho(x, a) \le r$, označujeme ju $\overline{G}(a, r)$. Teda $\overline{G}(a, r) = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x, a) \le r\}$.*

Vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore

V ďalších našich úvahách budeme potrebovať nasledujúce typy množín v metrickom priestore a taktiež aj niektoré vlastnosti bodov a množín v metrickom priestore.
Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a bod $a \in \mathbb{X}$, $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Definícia 2.1

- *Otvorenou guľou so stredom v bode a a polomerom r nazývame množinu bodov $x \in \mathbb{X}$ takých, že $\rho(x, a) < r$, označujeme ju $G(a, r)$. Teda $G(a, r) = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x, a) < r\}$.*
- *Uzavretou guľou so stredom v bode a a polomerom r nazývame množinu bodov $x \in \mathbb{X}$ takých, že $\rho(x, a) \leq r$, označujeme ju $\overline{G}(a, r)$. Teda $\overline{G}(a, r) = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x, a) \leq r\}$.*
- *Okolím[a] bodu $a \in \mathbb{X}$ nazývame ľubovoľnú otvorenú guľu so stredom v bode a, označujeme ho $O(a)$.*

[a] Okolia nemusia byť len gule, avšak v metrických priestoroch to nie je obmedzujúca verzia pojmu.

- $\delta-$okolím bodu $a \in \mathbb{X}$ nazývame ľubovoľnú otvorenú guľu so stredom v bode a a polomerom δ, tj. guľu $G(a, \delta)$, označujeme ho $O_\delta(a)$.
- Prstencovým $\delta-$okolím bodu $a \in \mathbb{X}$ nazývame množinu bodov $O_\delta(a) \setminus \{a\}$, označujeme ho $O^*_\delta(a)$.

Poznámka 2.1

- *Uzavretou guľou so stredom v bode a a polomerom r v* $\mathbf{E}^1$ *je uzavretý interval* $[a - r, a + r]$.
- *Uzavretou guľou so stredom v bode* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *a polomerom* r *v* $\mathbf{E}^2$ *je kruh so stredom v bode* $\mathbf{a}$ *a polomerom* r*, tj. množina všetkých bodov* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{E}^2$*, pre ktoré platí* $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2$.
- *Prstencovým* $\delta-$*okolím bodu* $\mathbf{a} = (1, 1)$ *v* $\mathbf{E}^2$ *je množina všetkých bodov* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{E}^2$*, pre ktoré platí* $0 < (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 < \delta^2$.

Definícia 2.2

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ *je metrický priestor. Neprázdnu množinu* $A \subset \mathbb{X}$ *nazývame ohraničenou*[a]*, ak existuje guľa* $G(a, r)$ *taká, že* $A \subset G(a, r)$*.*

[a] Ak definujeme pojem $\operatorname{diam}(\mathbb{X}) := \{\sup \rho(x, y) : x, y \in \mathbb{X}\}$, potom je ohraničenosť ekvivalentná s podmienkou $\operatorname{diam}(\mathbb{X}) < \infty$.

Definícia 2.3

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ *je metrický priestor a množina* $A \subset \mathbb{X}$*. Bod* $a \in A$ *nazývame vnútorným bodom množiny* A*, ak existuje* $\delta > 0$ *také, že* $G(a, \delta) \subset A$*. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny* A *nazývame vnútrom množiny* A*, označujeme* A^0*, alebo aj* $\operatorname{int} A$*. Množinu* A *nazývame otvorenou, ak* $A = A^0$*.*

Poznámka 2.2

Celý priestor $\mathbb{X}$*, prázdna množina, otvorená guľa sú otvorené množiny.*

Definícia 2.4

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a množina $A \subset \mathbb{X}$. Bod $a \in \mathbb{X}$ nazývame hromadným bodom množiny A, ak pre každé $\delta > 0$ guľa $G(a, \delta)$ obsahuje aspoň jeden bod množiny A rôzny od bodu a. Množinu všetkých hromadných bodov množiny A nazývame derivácia množiny A, označujeme A^d.

Poznámka 2.3

Bod $a \in \mathbb{X}$ nazývame hromadným bodom množiny A, ak vlastne každé prstencové okolie bodu a obsahuje nejaký bod množiny A, t.j. pre ľubovoľné $\delta > 0$ platí $A \cap O^*_\delta(a) \neq \emptyset$.

Veta 2.1 (Charakterizácia hromadného bodu)

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a množina $A \subset \mathbb{X}$. Bod $a \in \mathbb{X}$ je hromadným bodom množiny A práve vtedy, keď každé okolie bodu a obsahuje nekonečne veľa bodov množiny A.

Definícia 2.5

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a množina $A \subset \mathbb{X}$. Uzáverom množiny A nazývame množinu $A \cup A^d$, označujeme $\overline{A}$. Množinu A nazývame uzavretou, ak $A = \overline{A}$.

Poznámka 2.4

Uzavretosť a otvorenosť množiny sú relatívne pojmy, je totiž nutné vždy povedať, v akom priestore sa na to pýtame.

Úloha 2.1

- *Určte deriváciu množín $A_1 = (a, b]$, $A_2 = (0, 2) \cap \mathbb{Q}$ a $A_3 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.*
- *Určte uzáver množiny $A_4 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ v $\mathbb{Q}$ a v $\mathbb{R}$.*

Poznámka 2.5

- *Je zrejmé, že množina A je uzavretá, t.j. $A = \overline{A}$, ak obsahuje všetky svoje hromadné body.*
- *Celý priestor $\mathbb{X}$, prázdna množina a uzavretá guľa sú uzavreté množiny. Teda vidíme, že celý priestor a prázdna množina sú aj otvorené, aj uzavreté množiny.*
- *Množina, ktorá obsahuje konečný počet prvkov je uzavretá, lebo $A^d = \emptyset$, odtiaľ $\overline{A} = A \cup A^d = A$.*

Pri vyšetrovaní, či uvedená množina je uzavretá alebo otvorená je niekedy výhodné použiť nasledujúce tvrdenie.

Poznámka 2.5

- *Je zrejmé, že množina A je uzavretá, t.j. $A = \overline{A}$, ak obsahuje všetky svoje hromadné body.*
- *Celý priestor $\mathbb{X}$, prázdna množina a uzavretá guľa sú uzavreté množiny. Teda vidíme, že celý priestor a prázdna množina sú aj otvorené, aj uzavreté množiny.*
- *Množina, ktorá obsahuje konečný počet prvkov je uzavretá, lebo $A^d = \emptyset$, odtiaľ $\overline{A} = A \cup A^d = A$.*

Pri vyšetrovaní, či uvedená množina je uzavretá alebo otvorená je niekedy výhodné použiť nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.2

Množina $A \subset \mathbb{X}$ je otvorená práve vtedy, keď jej doplnok $\mathbb{X} \setminus A$ je uzavretá množina.

Definícia 2.6

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a množina $A \subset \mathbb{X}$. Bod $a \in A$ nazývame izolovaný bod množiny A, ak existuje $\delta > 0$ také, že $A \cap G(a, \delta) = \{a\}$ (tj. ak existuje nejaké okolie bodu a, ktoré okrem tohto bodu a neobsahuje žiadne iné body množiny A).

Poslednými pojmami tejto časti sú hraničný bod, hranica množiny.

Poslednými pojmami tejto časti sú hraničný bod, hranica množiny.

Definícia 2.7

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor a množina $A \subset \mathbb{X}$. Bod $a \in \mathbb{X}$ nazývame hraničný bod množiny A, ak pre každé $\delta > 0$ $G(a, \delta) \cap A \neq \emptyset$ a $G(a, \delta) \cap (\mathbb{X} - A) \neq \emptyset$. Množina všetkých hraničných bodov sa nazýva hranica množiny A, označujeme $H(A)$, alebo aj ∂A.

Definícia hraničného bodu inak povedaná: "Bod $a \in \mathbb{X}$ nazývame hraničným bodom množiny A, ak každé okolie bodu a obsahuje aspoň jeden bod množiny A a zároveň aspoň jeden bod, ktorý nepatrí do množiny A."

Poznámka 2.6

- *Vnútorný bod do množiny patrí, hraničný bod v množine byť môže, ale nemusí.*
- *Izolovaný bod do množiny patrí, hromadný v nej byť môže, ale nemusí.*
- *Každý bod je buď izolovaný alebo hromadný.*
- *V diskrétnej metrike ρ_d sú všetky body izolované (a teda žiadny z nich nie je hromadný).*

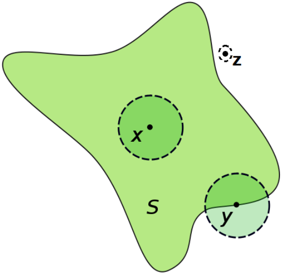
Keďže zrejme $H(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{X} \setminus A}$, dostaneme hneď nasledujúcu charakterizáciu hranice v metrickom priestore.

Veta 2.3

V metrickom priestore platí $H(A) = \overline{A} \setminus A^0$.

Úloha 2.2

Nájdite v $\mathbf{E}^2$ *disjunktné uzavreté množiny* $A, B \subset \mathbb{R}^2$ *tak, aby ich vzdialenosť* $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ *bola nulová.*



Obr.: Bod x je vnútorným, y hraničným a z izolovaným bodom množiny $\tilde{S} = S \cup \{z\}$.

Postupnosť bodov v metrickom priestore $\mathbb{X}$

Podobne pri postupnostiach reálnych čísel, môžeme si zaviesť pojem postupnosť bodov metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$.

Postupnosť bodov v metrickom priestore $\mathbb{X}$

Podobne pri postupnostiach reálnych čísel, môžeme si zaviesť pojem postupnosť bodov metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$.

Definícia 3.1

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor. Ak každému $n \in \mathbb{N}$ priradíme bod $a_n \in \mathbb{X}$ hovoríme, že je daná postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$.

Pozrime sa teraz na niektoré vlastnosti postupností bodov metrického priestoru a na súvislosti medzi nimi.

Definícia 3.2

Nech je daná postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$. Hovoríme, že postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $a \in \mathbb{X}$, ak $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_n, a) = 0$. Bod $a \in \mathbb{X}$ nazývame limitou (limitným bodom) postupnosti bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ alebo $a_n \to a$ pre $n \to \infty$. Ak má postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu, tak ju nazývame konvergentná. Ak postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu nemá, tak ju nazývame divergentná.

Použitím definície limity postupnosti reálnych čísel dostaneme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow \rho(a_n, a) < \varepsilon),$$

Použitím definície limity postupnosti reálnych čísel dostaneme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; \rho(a_n, a) < \varepsilon),$$

resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in G(a, \varepsilon)).$$

Definícia 3.3

Postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ sa nazýva ohraničená, ak je ohraničená množina jej členov [a]*.*

[a] T.j. ak existuje guľa $G(a, r)$ taká, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in G(a, r)$

Použitím definície limity postupnosti reálnych čísel dostaneme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow \rho(a_n, a) < \varepsilon),$$

resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n \in G(a, \varepsilon)).$$

Definícia 3.3

Postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ sa nazýva ohraničená, ak je ohraničená množina jej členov [a]*.*

[a] T.j. ak existuje guľa $G(a, r)$ taká, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in G(a, r)$

Aj pre tento pojem platia obdobné tvrdenia ako pre postupnosti reálnych čísel.

Použitím definície limity postupnosti reálnych čísel dostaneme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow \rho(a_n, a) < \varepsilon),$$

resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n \in G(a, \varepsilon)).$$

Definícia 3.3

Postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ sa nazýva ohraničená, ak je ohraničená množina jej členov [a]*.*

[a] T.j. ak existuje guľa $G(a, r)$ taká, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in G(a, r)$

Aj pre tento pojem platia obdobné tvrdenia ako pre postupnosti reálnych čísel.

Veta 3.1

Každá postupnosť bodov metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ má najviac jednu limitu.

Veta 3.2

Ak postupnosť bodov metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ je konvergentná, potom je ohraničená.

Veta 3.3

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ konverguje k bodu $a \in \mathbb{X}$, potom každá z nej vybraná postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tiež konverguje k bodu $a \in \mathbb{X}$.

Veta 3.2

Ak postupnosť bodov metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ je konvergentná, potom je ohraničená.

Veta 3.3

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ konverguje k bodu $a \in \mathbb{X}$, potom každá z nej vybraná postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tiež konverguje k bodu $a \in \mathbb{X}$.

Pomocou postupností bodov metrického priestoru $(\mathbb{X}, \rho)$ určíme hromadné body množiny a rozhodneme o jej uzavretosti.

Veta 3.4

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor. Bod $a \in \mathbb{X}$ je hromadný bod množiny $A \subset \mathbb{X}$ práve vtedy, keď existuje postupnosť bodov $a_n \in A$, $a_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Veta 3.5 (Kritérium uzavretosti množiny)

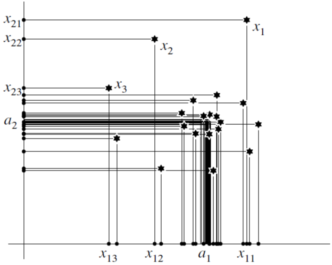
Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor. Množina $A \subset \mathbb{X}$ je uzavretá práve vtedy, keď limita každej konvergentnej postupnosti bodov z množiny A patrí do množiny A.

Veta 3.6 (Charakterizácia konvergencie v $\mathbf{E}^n$)

Postupnosť bodov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kde* $\mathbf{a_n} = (a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n)$ *Euklidovho priestoru* $\mathbf{E}^k$ *konverguje k bodu* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbf{E}^k$ *práve vtedy, keď* $\lim\limits_{n\to\infty} a_i^n = a_i$*,* $i = 1, 2, \dots, k$*.*

Veta 3.7 (Bolzano-Weierstrass)

Z každej ohraničenej postupnosti bodov priestoru $\mathbf{E}^k$ *sa dá vybrať konvergentná postupnosť.*



Obr.: Konvergentná postupnosť bodov v $\mathbf{E}^2$.

Example 1

Zrejme $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n-1}{n}\right)\right\} \to (0,1)$ v $\mathbb{R}^2$. Skutočne

$$\rho_{\mathbf{E}^2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n-1}{n}\right), (0,1)\right) = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \le \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Example 2

Postupnosť bodov priestoru s diskrétnou metrikou ρ_d má limitu $\mathbf{x}$, akk pre všetky dostatočne veľké n je $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$.

Definícia 3.4

Nech $(\mathbb{X}, \rho)$ je metrický priestor. Krivkou v $\mathbb{X}$ je množina bodov $\gamma(I)$, kde $\gamma \in C(I, \mathbb{X})$, kde I je interval v $\mathbb{R}$.

- Nech $\varphi_i \in C([a,b])$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Množina bodov $\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbf{E}^k : \ x_i = \varphi_i(t),\ t \in [a,b],\ i = 1, 2 \ldots, k\}$ je (spojitou) krivkou v $\mathbf{E}^k$. Krivka je daná parametricky.
- Nech $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ sú dva rôzne body priestoru $\mathbf{E}^k$. Množinu bodov $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}^k : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}),\ t \in [0,1]\}$ budeme nazývať úsečkou spájajúcou body $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, označujeme $\mathbf{ab}$.
- Lomenou čiarou spájajúcou od seba rôzne body $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ priestoru $\mathbf{E}^k$ je množina úsečiek $\mathbf{x_1 x_2}$, $\mathbf{x_2 x_3}, \ldots,$ $\mathbf{x_{m-1} x_m}$.

Definícia 3.5

Nech M je otvorená množina bodov priestoru $\mathbf{E}^k$. Ak každé jej dva body vieme spojiť spojitou krivkou, ktorá celá leží v množine M (t.j. množina M je súvislá), budeme množinu M nazývať oblasťou.

Definícia 3.6

Nech $a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i$, potom

$$I_k := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

nazývame uzavretý interval priestoru $\mathbf{E}^k$. Podobne

$$J_k := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$$

nazývame otvorený interval priestoru $\mathbf{E}^k$.

Normovaný priestor

Definícia 4.1

Normovaným lineárnym priestorom (NLP) nazývame lineárny (vektorový) priestor X nad telesom $\mathbb{K}$, na ktorom je daná nezáporná reálna funkcia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$ s nasledujúcimi vlastnosťami

- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *pre každé* $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \in X$
- $\|\lambda\,\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|$ *pre každé* $\mathbf{x} \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Takúto funkciu voláme norma a priestor vlastne tvorí dvojica $(X, \|\cdot\|)$.

Príklad 4.1

V $\mathbb{R}^n$ *p-norma je* $\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p},\ p \geq 1$ *a pre* $p = \infty$ *definujeme* $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_i |x_i|$. *Eliptická norma:* $\|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / a_i^2}$. *Hermitovská norma v* $\mathbb{C}^n$ *je* $\|\mathbf{z}\|_2 = \sqrt{z_1\overline{z_1} + \cdots + z_n\overline{z_n}}$.

Úloha 4.1

Ktorý z priestorov $(\mathbb{R}^n, \max\{\|\mathbf{x}\|_1, \|\mathbf{x}\|_e\}), (\mathbb{R}^n, \min\{\|\mathbf{x}\|_1, \|\mathbf{x}\|_e\})$ *je normovaný?*

Zrejme ak v NLP položíme $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, potom je ρ (translančne invariantná) metrika. Máme tak nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.1

Každý NLP je tiež metrický priestor.

Poznámka 4.1

Máme teda návod ako preniesť dôležité pojmy z metrických priestorov do priestorov normovaných (napr. uzavretosť, konvergencia, úplnosť, hustota, separabilita atď.).
Norma prvku je vlastne jeho vzdialenosť od nulového prvku daného priestoru.
Pozor, na rozdiel od metrického priestoru, nie každá podmnožina lineárneho priestoru je lineárny priestor. Musí byť uzavretá na operácie sčítania a skalárneho násobenia.

Poznámka 4.2

Uzavretá guľa v LNP X je množina $\overline{B_r(\mathbf{a})} = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$. V nekonečno-rozmerných priestoroch môžu mať gule kontra-intuitívne vlastnosti. V $X = C([0,1])$ uvažujme cestu (krivku) $f_t(x) := 2|x - t| - 1,\ t \in [0,1]$. Potom $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_t(x)| = 1$, čo znamená, že celá leží na jednotkovej guli $B_1(\mathbf{0})$ v X. Navyše však platí, že jej celková dĺžka je rovná vzdialenosti prvkov f_0, f_1, keďže

$$\int_0^1 \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_t\right\|_\infty \mathrm{d}t = \int_0^1 2\,\mathrm{d}t = 2$$

a aj $\|f_0 - f_1\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_0(x) - f_1(x)| = 2 \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_0(x)| = 2.$

Definícia 4.2

Priemer množiny A v LNP X označíme ako

$$\operatorname{diam}(A) = \mathrm{d}(A) := \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in A} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in A} \rho(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Vzdialenosť prvku $\mathbf{x}$ *od množiny A v LNP X definujeme ako*

$$\rho(\mathbf{x}, A) := \inf_{\mathbf{a}\in A} \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \inf_{\mathbf{a}\in A} \rho(\mathbf{x},\mathbf{a})$$

a vzdialenosť množiny B od A zasa ako

$$\rho(A, B) := \inf_{\mathbf{a}\in A,\mathbf{b}\in B} \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \inf_{\mathbf{a}\in A,\mathbf{b}\in B} \rho(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$