Prednáška 9

Integrálny počet funkcie viac premenných

Text: Učebný text je prevzatý z prezentácií doc. Mihalíkovej

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných
4. mája 2020

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Agenda

Základné pojmy

Majme $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Budeme hovoriť, že je dané delenie D intervalu I, ak je dané delenie $D^{(1)}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a delenie $D^{(2)}$ intervalu $\langle c, d\rangle$.

Ak delenie $D^{(1)}$ je dané deliacimi bodxi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ a delenie $D^{(2)}$ deliacimi bodxi $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = b$ delenie D pozostáva zo všetkých intervalov $\langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$ pre $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$.

Definícia 1.1

- *Delenie D označujeme $D = D^{(1)} \times D^{(2)}$ a pozostáva z $p \cdot q$ intervalov.*
- *Normou delenia D rozumieme číslo $\|D\| = \max\{\left\|D^{(1)}\right\|, \left\|D^{(2)}\right\|\}$, kde $\left\|D^{(i)}\right\| = \nu(D^{(i)})$*

Vieme, že plošný obsah intervalu $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ sa rovná číslu $(b-a)(d-c)$. Plošný obsah intervalu I budeme označovať $m(I)$ (používa sa aj termín miera intervalu). Analogicky postupujeme v prípade viacrozmerných intervalov. Teda, ak

$$I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

je n-rozmerný interval, potom pre jeho delenie $D = D^{(1)} \times D^{(2)} \times \cdots \times D^{(n)}$ sa normou rozumie číslo $\|D\| = \max\{\left\|D^{(1)}\right\|, \left\|D^{(2)}\right\|, \ldots, \left\|D^{(n)}\right\|\}$, pričom $D^{(k)}$ sú delenia intervalov $\langle a_k, b_k \rangle$, $k = 1, \ldots, n$. Prirodzene, mieru intervalu I definujeme ako $m(I) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

Definícia 1.2

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ delení intervalu I nazývame normálnou, ak $\lim\limits_{k \to \infty} \|D_k\| = 0$.

Poznámka 1.1

Zrejme postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna vtedy a len vtedy, ak $\{D_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$.

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na dvojrozmernom intervale I a D je jeho, ktoré pozostáva z čiastočných intervalov $I_1, I_2, \ldots, I_p$. Označme $\mathscr{N}(D)$ množinu p-tic $T = (T_1, \ldots, T_p)$ takých, že $T_i \in I_i$, $i = 1, \ldots, p$. Utvorme súčet

$$\mathscr{S}(f, D, T) = \sum_{i=i}^{p} f(T_i)m(I_i).$$

Tento súčet nazývame integrálny súčet funkcie f pre delenie D a výber bodov T.

Poznámka 1.2

- *Ak funkcia f je na intervale I kladná. Potom má číslo $\mathscr{S}(f, D, T)$ geometrický význam: znamená súčet objemov hranolov, ktorých základne sú intervaly I_i a výšky sú $f(T_i)$, $i = 1, \ldots, p$.*
- *Analogicky môžeme definovať integrálny súčet aj pre funkciu viac ako dvoch premenných.*

Definícia 1.3

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na $I = \langle a, b\rangle$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ intervalu I a ľubovoľný výber bodov $T^k \in \mathscr{N}(D_k)$ je $\lim\limits_{k\to\infty} \mathscr{S}(f, D_k, T^k) = J$, tak číslo J nazývame dvojrozmerným integrálom funkcie f na intervale I a označujeme $\displaystyle\iint\limits_I f(x, y)dx\, dy$.

Ak existuje integrál funkcie f na intervale I nazývame funkciu f integrovateľnou na intervale I.

Poznámka 1.3

Pre $n = 3$ sa integrál funkcie f na intervale I nazýva trojrozmerný integrál alebo trojný integrál a označuje $\displaystyle\iiint\limits_I f(x, y, z)dx\, dy\, dz$.

Označenie n-rozmerného integrálu $\displaystyle\int\cdots\int\limits_I f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$,

alebo aj $\displaystyle\int\cdots\int\limits_I f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

Integrovateľnosť a výpočet integrálov

Veta 2.1 (Výpočet dvojného integrálu)

Nech $f \in \mathcal{R}(I)$, *kde* $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.

a) *Ak pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *existuje* $\int\limits_c^d f(x,y)dy$, *potom existuje*

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx \ \text{ a } \iint\limits_I f(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

b) *Ak pre každé* $y \in \langle c, d\rangle$ *existuje* $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, *potom existuje*

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy \ \text{ a } \iint\limits_I f(x,y)dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Poznámka 2.1

Pozor na rozdiel medzi n-rozmerným (dvjoným, trojným atď.) a n-násobným integrálom (dvojnásobným, trojnásobným, atď.), t.j. medzi ľavou a pravou stranou v predchádzajúcej vete (v prípade dimenzie 2).

Nech A je ohraničená množina v $\mathbb{E}^n$ a funkcia f je definovaná na množine A. Definujme funkciu F_A patriacu funkcii f a množine A

$$F_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in A, \\ 0, & \mathbf{x} \notin A. \end{cases}$$

Definícia 2.1

Hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na množine A, ak je funkcia F_A integrovateľná na nejakom intervale I, ktorý obsahuje množinu A. Integrálom funkcie f na množine A rozumieme číslo

$$\int \cdots \int\limits_I F_A(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Tento integrál označujeme $\int \cdots \int\limits_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int\limits_I F_A(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Nech A je ohraničená množine v $\mathbb{E}^n$. Funkciu

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in A, \\ 0, & \mathbf{x} \notin A, \end{cases}$$

nazývame charekteristickou funkciou množiny A. Ak funkcia χ_A je integrovateľná na množine A, tak množinu A nazývame merateľnou a číslo $\underset{A}{\int \cdots \int} \chi_A(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ nazývame mierou (n-rozmerným obsahom) množiny A, ozn. $m(A)$,

$$m(A) = \underset{A}{\int \cdots \int} \chi_A(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Takto definovaná miera množiny sa presnejšie nazýva Jordanova miera. ďalej sa budeme zaoberať merateľnými množinami.

Veta 2.2

- *Množina A je merateľná práve vtedy ak jej hranica je merateľná a množina miery nula.*
- *Nech A, B sú merateľné množiny. Potom aj $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ sú merateľné. Navyše pre $A \cap B = \emptyset$ platí $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ a pre $A \subset B$, potom $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.*

Veta 2.3 (Existencia integrálu na merateľnej množine)

Nech A je merateľná množina a funkcia f je definovaná, ohraničená na množine A. Nech množina tých bodov množiny A, v ktorých nie je funkcia f spojitá je merateľná a má mieru rovnu nule. Potom je $f \in \mathcal{R}(A)$.

Z vety vyplýva, že funkcia spojitá, ohraničená na merateľnej množine je integrovateľná na tejto množine.

Veta 2.4 (Základné vlastnosti viacrozmerného integrálu)

- *Nech $f, g \in \mathcal{R}(A)$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, potom aj $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}(A)$ a* $$\int_A (c_1 f(\mathbf{x}) + c_2 g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = c_1 \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + c_2 \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$
- *Nech $f, g \in \mathcal{R}(A)$ a pre $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})$. Potom* $$\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq \int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$
- *Nech $A \cap B = \emptyset$ a $C = A \cup B$. Nech funkcia $f \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$. Potom $f \in \mathcal{R}(C)$ a* $$\int_C f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Definícia 2.2

Elementárnou oblasťou v dvojrozmernom priestore rozumieme množinu bodov

$$A = \{[x, y]; a \leq x \leq b\,,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a funkcie φ, ψ sú spojité na intervale $\langle a, b\rangle$, spĺňajúce podmienku $g_1(x) \leq g_2(x)$, alebo

$$B = \{[x, y]; c \leq y \leq d\,,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

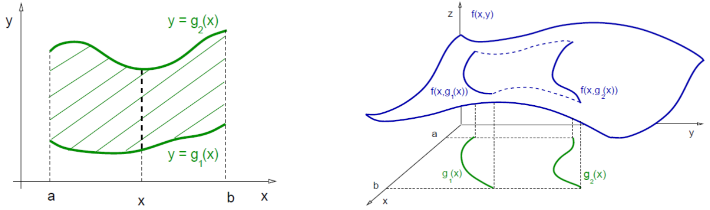
kde $c, d \in \mathbb{R}$ a funkcie φ, ψ sú spojité na intervale $\langle c, d\rangle$, spĺňajúce podmienku $h_1(y) \leq h_2(y)$.

Poznámka 2.2

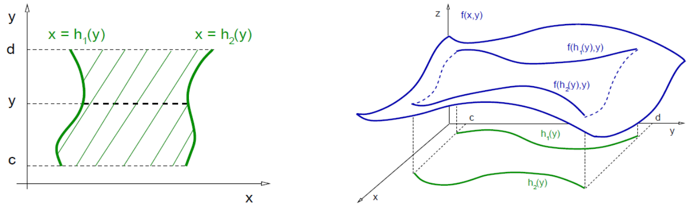
- Podobne môžeme definovať elementárnu oblasť v 3D. Napr. ako množinu bodov $[x, y, z]$ spĺňajúcich podmienky

  $$C : a \leq x \leq b,\ \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ \ \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y),$$

  kde $a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ sú spojité funkcie.
- Elementárna oblasť je uzavretá, merateľná množina.



(a) $\iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$



(b) $\iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

Obr.: Oblasti integrovania v $\mathbb{R}^2$

Veta 2.5 (Výpočet dvojného integrálu na elementárnej oblasti)

1. *Nech $f \in \mathcal{R}(A)$, kde A je elementárna oblasť ohraničená krivkami $x = a$, $x = b$, $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$. Nech pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje $\displaystyle\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$. Potom existuje*

$$\int\limits_a^b \Bigg(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \Bigg) dx \ \text{ a } \iint\limits_A f(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b \Bigg(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \Bigg) dx.$$

2. *Nech $f \in \mathcal{R}(B)$, kde B je elementárna oblasť ohraničená krivkami $y = c$, $y = d$, $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$. Nech pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ existuje $\displaystyle\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx$. Potom existuje*

$$\int\limits_c^d \Bigg(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y \Bigg) dx)dy \ \text{ a } \iint\limits_B f(x,y)dx\,dy = \int\limits_c^d \Bigg(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \Bigg) dy.$$

Pri výpočte dvojného integrálu $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je výhodné (doporučujeme) postupovať nasledovne:

1. Načrtnúť, nakresliť danú množinu $D \subset \mathbb{E}^2$ v rovine ρ_{xy}.
2. Rozdeliť, rozložiť množinu D na niekoľko elementárnych oblastí typu (x,y) alebo (y,x), ak je to potrebné.
3. Popísať elementárnu oblasť (oblasti) príslušným systémom (systémami) nerovníc.
4. Použiť Fubiniho vetu, prípadne základné vlastnosti dvojných integrálov (predovšetkým aditívnosť a lineárnosť).
5. Vypočítať získaný dvojnásobný integrál, resp. dvojnásobné integrály.

Uvažujme zobrazenie Φ, ktoré každému bodu $\mathbf{t}$ z nejakej množiny G v $\mathbb{E}^n$ priradí bod $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{t}) \in \mathbb{E}^n$. Ak zapíšeme body pomocou ich zložiek, môžeme zobrazenie Φ zapísať v tvare $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{t})$
alebo

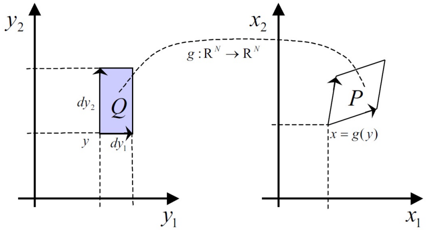
$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1,\, t_2, \dots, t_n), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1,\, t_2, \dots, t_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(t_1,\, t_2, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Predpokladáme, že φ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ majú spojité parciálne derivácie na množine G. Determinant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{t})}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{t})}{\partial t_2}, & \dots, & \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{t})}{\partial t_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{t})}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{t})}{\partial t_2}, & \dots, & \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{t})}{\partial t_n} \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{t})}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{t})}{\partial t_2}, & \dots, & \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{t})}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

nazývame Jacobiho determinant zobrazenia Φ, krátko jacobián zobrazenia Φ a označujeme ho znakom $D_\Phi(\mathbf{t})$.

Geometrický význam afinnej transformácie $g(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$. Pomer plochy zobrazeného kosodĺžnika $P = g(Q)$ a zobrazovaného obdĺžnika je daný práve determinantom matice $\mathbf{A}$, tj. $|P|/|Q| = |\mathbf{A}|$. Z toho môžeme dedukovať vzťah medzi elementárnou plochou $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = |\mathbf{A}|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$. Idea dôkazu vety o substitúcii pre všeobecný prípad zobrazenia $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ potom plynie z aproximácie zobrazenia g v bode $\tilde{\mathbf{y}}$ pomocou Taylorovho rozvoja $g(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} + o(||\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}||)$, kde $\mathbf{A} = D_g(\tilde{\mathbf{y}})$.



Obr.: Geometrický význam afinnej transformácie.

Pre zjednodušenie množiny cez ktorú integrujeme alebo integrovanej funkcie f sa prirodzene používa substitučná metóda (transformácia dvojného integrálu).

Definícia 2.3

Nech G je otvorená množina. Zobrazenie Φ nazývame regulárnym zobrazením na množine G, ak funkcie φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ majú spojité parciálne derivácie na množine G a $D_\Phi(\mathbf{t}) \neq 0$ na G.

Príklad 2.1

Zobrazenie Φ, ktoré každej dvojici čísel (ρ, φ) priradí bod (x, y) podľa vzťahov $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ sa nazýva transformácia pomocou polárnych súradníc. Na množine $G = \{(\rho,\varphi), \rho > 0,\, 0 < \varphi < 2\pi\}$ je zobrazenie regulárne a $D_\Phi(\rho,\varphi) = \rho$.

Veta 2.6 (Substitúcia do integrálu)

Nech Φ je regulárne a prosté zobrazenie na G, $A \subset G$ je uzavretá, merateľná a $f \in C(\Phi(A))$. Potom množina $\Phi(A)$ je merateľná a

$$\int \cdots \int_{\Phi(A)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{A} f(\Phi(\mathbf{t}))\,|D_\Phi(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}.$$

Dvojný integrál môžeme použiť na výpočet rôznych veličín, ktoré charakterizujú rovinnú (uzavretú, ohraničenú) množinu D. My sa pozrieme na nasledujúce dve geometrické aplikácie dvojného integrálu.

a) Plošný obsah rovinných útvarov

Ak množina $D \subset \mathbb{E}^2$ má plochu (mieru), tj. je merateľná, tak pre plošný obsah $P(D)$ tejto množiny D platí, že $P(D) = \iint\limits_D 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

b) Objem telies

Ak funkcia $z = f(x, y)$ je spojitá a nezáporná na uzavretej, ohraničenej množine D, tak pre objem V valcového telesa T so základňou D, zhora ohraničeného grafom funkcie (plochou) $z = f(x, y)$ a z "bokov" ohraničeného valcovou plochou, ktorá je vytvorená z priamok rovnobežných s osou $z-$ovou prechádzajúce hranicou množiny D platí, že $V = \iint\limits_D f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Poznámka: Množina D vlastne predstavuje kolmý priemet uvedeného valcového telesa T do roviny ρ_{xy} (tj. do roviny $z = 0$).