Prednáška 8

Diferenciálne rovnice

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Jozef Kiseľák

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných
7. apríla 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Agenda

1. Motivácia, história
2. Základné pojmy
3. DR 1. rádu
4. Separovaná a separovateľná DR
5. Homogénna DR
6. Lineárna DR prvého rádu
7. Lineárna DR druhého rádu

Motivácia, história

"Science is a differential equation. Religion is a boundary condition."

— Alan Turing (1912-1954)

- **čo je diferenciálna rovnica?**
- "Rovnica obsahujúca závislú premennú (funkciu) a jej derivácie podľa nezávislých premenných."
- Je $y(y(x)) + y'(x) = \sin x$ DR?
- Potrebná je teda korektná definícia.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

- Teória DR - vznik kalkulu, koniec 17. storočia.
- 1676,  vyriešil DR pomocou nekonečných radov.
- 1693,  vyriešil "svoju" prvú DR.

Newton circa 1671 napísal článok (publikovaný až v roku 1736) *The Method of Fluxions and Infinite Series*, kde klasifikoval 3 triedy DR:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

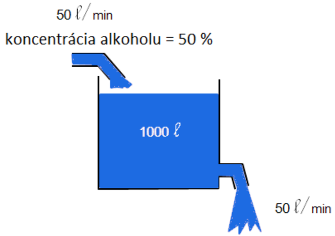
V dnešnej dobe rozlišujeme niekoľko základných typov rovníc súvisiacich s infinitezimálnym počtom:

- Obyčajné diferenciálne rovnice;
- Parciálne diferenciálne rovnice;
- Diferenčné rovnice;
- Stochastické diferenciálne rovnice;
- Integrálne rovnice.

Podľa Edwarda Inceho, už v roku 1675 Gottfried Leibniz napísal prvú DR v tvare $\int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$.

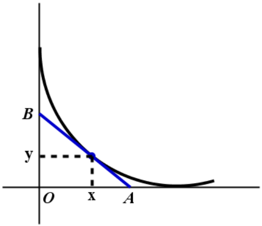
- Nasledovníci Leibniza - bratia Jacob Bernoulli (1654-1705) a Johann Bernoulli (1667-1748).
- 18. storočie - Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange, Pierre Laplace.
- 1739 - Leonhard Euler použil metódu integračného faktora.
- 1828 - George Green "má niečo dočinenia" s integrabilitou vektorového poľa (totálny diferenciál nejakej funkcie).
- ďalší "rovničiari" - William Hamilton (1805-1865), Carl Jacobi (1804-1851), Joseph Lagrange (1736-1813), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Johann Pfaff (1765-1825).

Príklad 1.1 (Zmiešavací problém)



- *začiatočná koncentrácia je* 10%*;*
- *dokonalé miešanie;*
- *Aká bude koncentrácia po* 10 *min?*

Príklad 1.2 (Asteroida)



- *Treba nájsť krivku, ktorá:*
- *má v každom bode dotyčnicu,*
- *úsek dotyčnice medzi osami je* $a > 0$

Príklad 1.3 (Asteroida)

- *rovnica dotyčnice:*

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),\ \ y = f(x),\ \ f'(x) \neq 0$$

- $$A = \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}, 0\right], \quad B = [0, f(x) - xf'(x)]$$

- *Dostávame tak nelineárnu DR v tvare*

$$\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 + [f(x) - xf'(x)]^2 = a^2$$

- *reálna algebrická krivka 6 stupňa:* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
- *vzniká aj "rotáciou kružnice po kružnici"*

Príklad 1.4 (Analýza rekurentných algoritmov)

1. rád, všeobecnejšieho problému, Akra–Bazzi,

$$T(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n)) + f(n) \qquad n \geq n_0 \text{ je tzv. Master}$$

theorem - rieši rekurentné vzťahy tvaru:

$$T(n) = k\ T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \quad kde\ \ k \geq 1,\ b > 1,$$

pričom $n \in \mathbb{N}$ je veľkosť problému, k je počet podproblémov v rekurzii, T označuje celkovú časovú zložitosť algoritmu a $b : \dfrac{n}{b}$ je veľkosť každého z podproblémov. Predpokladá sa, že podproblémy sú viacmenej rovnako veľké. Nakoniec $f(n)$ je časová zložitosť mimo rekurzívne volanie, zahrňujúca rozdelenie problému na podproblémy a zlúčenie výsledkov podproblémov.

i) *Binárne vyhľadávanie :* $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(1) \to O(\log n)$

ii) *Triedenie zlučovaním:* $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) \to O(n \log n)$

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Základné pojmy

V ďalšom budeme potrebovať nasledujúce pojmy z teórie funkcie viac premenných.

Definícia 2.1

Množinu všetkých usporiadaných $n-$tíc reálnych čísel budeme označovať $\mathbb{R}^n$, tj.

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n);\; x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Definícia 2.2

Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Reálnou funkciou n reálnych premenných budeme nazývať zobrazenie, ktoré každému $\mathbf{x} \in \Omega$ priradí práve jedno reálne číslo, množinu Ω nazývame definičný obor funkcie[a]. Označujeme ho $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, resp. $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

[a] Zväčša je to maximálna prípustná mmnožina, kde je funkcia definovaná.

Definícia 2.3

Nech $F(t, z_0, z_1, \ldots, z_n)$ je reálna funkcia $(n+2)$, $n \geq 1$ premenných, ktorá vzhľadom k premennej z_n nie je konštantná, definovaná na oblasti (otvorená súvislá) $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Potom výraz

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazývame obyčajnou diferenciálnou rovnicou n-tého rádu (DR). Rád najvyššej derivácie, ktorá sa vyskytuje v danej rovnici nazývame rádom DR. [a]

[a] Napr. rovnica $y'\, y'' - y''' = 2t$ je rovnicou tretieho rádu.

Poznámka 2.1

DR n-tého rádu musí vždy obsahovať $y^{(n)}$, ostatné premenné $t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ sa v nej vyskytovať nemusia.

Prirodzene budeme požadovať, aby riešením bola funkcia (množina funkcií ?!), ktorá spĺňa tieto požiadavky:

- musí sa dať dosadiť do rovnice - existencia príslušných derivácií;
- môže nadobúdať (aj jej derivácie) len také hodnoty, ktoré patria do definičného oboru F;
- po jej dosadení (aj jej derivácií) musí byť F identicky rovná nule.

Definícia 2.4

(Klasickým) riešením DR (1) v Ω na intervale $I \subset \mathbb{R}$ nazývame funkciu $\phi \in C^n(I)$, pre ktorú platí rovnosť (1) a pre každé $t \in I$ je $(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) \in \Omega$. Graf riešenia nazývame integrálna krivka.

Poznámka 2.2

Značíme $f \in C^k(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}$ je interval, ak f má všetky derivácie k-tého rádu spojité na U.

Poznámka 2.3

- *Všimnime si, že rovnica* (1) *je vo všeobecnosti v implicitnom tvare.*
- *Ak intervalu I patrí krajný koncový bod, uvažujeme príslušnú jednostrannú deriváciu.*
- *Všimnime si, že vzťah $y' = (y \circ y)(t)$ nesplĺňa našu definíciu diferenciálnej rovnice, ide o nelokálny typ operátora - kompozíciu, ale derivácia je lokálny typ operácie a tak je to pre nás neprípustné.*
- *Riešiť DR znamená nájsť všetky jej riešenia.*
- *Nie vždy sa nám podarí nájsť riešenie DR v tvare $y = \varphi(t)$, tj. v explicitnom tvare. Riešenie DR môže byť vyjadrené aj v implicitnom tvare, tj. rovnicou $\Phi(t, y) = 0$.*

Definícia 2.5

Rovnicu (1) *nazveme lineárnou, ak je F lineárna funkcia v premennej y a jej deriváciách.*

Príklad 2.1

- $y' - x^3 y = \sin x$ *je (lineárna) DR prvého rádu*
- $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ *je (nelineárna) DR druhého rádu*

Úloha 2.1

Majme DR $y' = 2t - 2$ *na celom* $\mathbb{R}$. *Overte, že riešenia danej DR predstavujú množinu funkcií* $\{y \in C^1(\mathbb{R});\ y(t) = t^2 - 2t + c,\ t \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\}$. *Je ich nekonečne veľa!*

Príklad 2.2 (Neurčitý integrál, primitívna funkcia)

Formulácia problému:
pre danú $f \in C(a,b)$ *nájdite všetky funkcie* x *definované na* (a,b), *ktoré tam vyhovujú rovici* $x' = f(t)$.
Zrejme riešením je množina primitívnych funkcií. Vieme to zapísať aj pomocou funkcie hornej hranice: $x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s,\ t_0 \in (a,b)$.

Videli sme, že riešení DR môže byť aj nekonečne veľa. Koľko ich je, ak zvolíme jeden konkrétny bod v $(a, b) \times \mathbb{R}$. Vo všeobecnosti pri riešení DR n-tého rádu obvykle dostaneme riešenie obsahujúce n "voľných" parametrov. Takýto súbor riešení DR (1) nazveme jej n-parametrická trieda riešení (pre lineárne rovnice používame pojem všeobecné riešenie).

Definícia 2.6

Partikulárne riešenie DR (1) nazveme riešenie, ktoré neobsahuje žiadne "voľné" parametre[a]*.*

[a] Riešenie z parametrickej triedy, ktoré dostaneme vhodnou voľbou konštánt.

Úloha 2.2

Nelineárna DR $(y')^2 + x\,y' = y$ *má n-parametrickú triedu riešení* $y(x) = cx + c^2$, *ale funkcia* $\tilde{y}(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ *je tiež jej riešením. Ukážte to!*

Vidíme teda, že pre nelineárne DR existujú aj riešenia, ktoré sa nedajú zahrnúť do jednej parametrickej triedy.

K partikulárnemu riešeniu vedie napríklad úloha nájdenia takého riešenia DR (1), ktoré vyhovuje daným špecifickým podmienkam. My sa budeme zaoberať iba podmienkami typu

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

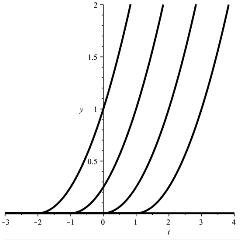
pričom $t_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sú dané (vhodné) reálne čísla. Ide o tzv. Cauchyho úlohu. Týmito podmienkami vlastne vyberieme konkrétne riešenie prechádzajúce bodom $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1})$.

Nazývame ich Cauchyovské počiatočné podmienky. O riešení vyhovujúcom týmto podmienkam budeme tiež hovoriť, že prechádza bodom $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$. Problémom je, že cez daný bod môže prechádzať žiadne, jedno, ale aj viac riešení.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Napr., riešením nasledujúcej Cauchyho úlohy je $y(t) \equiv 0$, ale aj 1-parametrická trieda funkcií :

Príklad 2.3 (Nejednoznačnosť riešenia)



- $y' = |y|^{\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 0$
- $\tilde{y}(t) = \begin{cases} 0, & ak\ t \le c, \\ \dfrac{(t-c)^2}{4}, & inak. \end{cases}$

Základnými otázkami o existencii a jednoznačnosti riešenia Cauchyho úlohy sa nebudeme zaoberať. V ďalšom sa budeme sústrediť len na metódy riešenia niektorých typov DR prvého a druhého rádu.

Motivácia, história

Základné pojmy

DR 1. rádu

Separovaná a separovateľná DR

Homogénna DR

Lineárna DR prvého rádu

Lineárna DR druhého rádu

DR 1. rádu

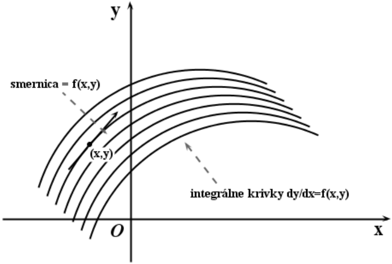
Uvažujme DR 1. rádu (s explicitne vyjadrenou deriváciou - v tzv. normálnom tvare)

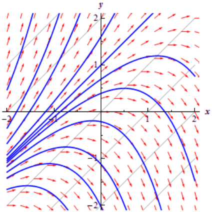
$$y' = f(x, y) \tag{1R}$$

na oblasti Ω, kde je f definovaná.

- Dotyčnica integrálnej krivky v každom jej bode (x, y) má smer totožný s nejakým smerom smerového poľa.
- Grafická možnosť hľadania integrálnej krivky pomocou smerového poľa.
- Konštruovať smerové pole je výhodné pomocou izoklín.
- Izoklína je krivka, ktorej každému bodu je priradený ten istý smer (má v každom bode rovnaký spád) bez ohľadu na začiatočné podmienky.
- Rovnica $k = f(t, y)$, $k \in \mathbb{R}$ sa nazýva rovnicou izoklíny.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu





- Bodu $(x, y) \in \Omega$ je priradená smernica dotyčnice k integrálnej krivke.
- Množina Ω sa nazýva smerové pole DR (1R).

- Smerové pole DR $y' = y - x$ vyznačené červenou farbou a izoklíny v tvare $y - x = c$.
- Integrálne krivky znázornené modrou farbou.

Úloha 3.1

Znázornite smerové pole a integrálne krivky diferenciálnej rovnice $y' = t$.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

- Približné riešenie Cauchyho úlohy $y'(t) = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, pričom funkcia $f \in C(\Omega)$, $\Omega := [a, b] \times \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$), kde , $t_0 \in [a, b]$ a $y_0 \in \Omega_1$.
  Začiatočnú aproximáciu[1] položme $\varphi_0(t) = y_0$ a ďalšie takto:

$$\varphi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s, \quad n = 1, 2, \ldots a\ t \in O(t_0).$$

- Numerické riešenie: položme
  $h := \dfrac{b-a}{n}, n \in \mathbb{N},\ t_k = a + kh,\ k = 0, \ldots, n$ a
  $y_k = y(t_k) = y(t_0 + kh)$, potom

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(a + kh, y_k)$$

  dáva $y_{k+1} = h\,f(a + kh, y_k) + y_k,\ k = 1, \ldots, n$ pričom $y_0 = y(t_0)$ je dané.

[1] Prípadne ľubovoľnú $h \in C(J) : h(t_0) = y_0$.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Separovaná a separovateľná DR

- Separáciu premenných zaviedol v rokoch 1690-1694 Jacob I. Bernoulli.
- V roku 1690 v práci v časopise *Acta Eruditorum* uázal, že problému tautochróny[2] je ekvivalentný s DR istého typu.
- Všeobecne túto metódu nájdenia riešenia sformuloval v roku 1694.

DR tvaru

$$P(x) + Q(y)\,y' = 0 \tag{S}$$

sa nazýva DR so separovanými premennými. Metóda hľadania riešení takýchto DR je veľmi jednoduchá.

[2] Nájdenie krivky, po ktorej dorazí gulička vypustená z ľubovoľného miesta do najnižšieho bodu za rovnaký čas.

Veta 4.1

Nech $P \in C(a,b), Q \in C(c,d)$. Potom ϕ je riešením rovnice (S) *na intervale $J \subset (a,b)$ vtedy a len vtedy, keď je na J implicitne určená rovnicou*

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = c,\ \ c \in \mathbb{R}. \tag{FR}$$

Navyše, ak $\forall y \in (c,d)\ \ Q(y) \neq 0$, potom každým bodom intevalu $(a,b) \times (c,d)$ prechádza jediná integrálna krivka DR (S).

Poznámka 4.1

- *Funkcionálna rovnica* (FR) *predstavuje 1-parametrickú triedu riešení DR* (S) *vo všeobecnosti "iba" v implicitnom tvare.*
- *Pokiaľ existuje inverzná funkcia k funkcii $\int Q(y)\,\mathrm{d}y$ na intervale I_c* [a] *tak je týmto dané explicitné riešenie (resp. parametrická trieda riešení).*
- *DR* (S) *nemá singulárne riešenia.*

[a] Interval I_c závisí od počiatočnej podmienky, môže byť teda iný pre každdú Cauchyho úlohu.

Uvažujme teraz DR tvaru

$$P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)\,y' = 0. \tag{SP}$$

Tá sa, zo zrejmého dôvodu, nazýva separovateľná DR.
Predpokladajme, že $P_1, Q_1 \in C(a,b)$, $P_2, Q_2 \in C(c,d)$. Ak $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$ na $(a,b) \times (c,d)$, tak sa rovnica (SP) dá previesť jednoduchou úpravou na rovnicu so separovanými premennými:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,y' = 0. \tag{SPb}$$

Rovnice (SP) a (SPb) sú za daného predpokladu ekvivalentné, tj. majú tú istú množinu riešení. Vo všeobecnosti samozrejme predpoklad $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$ na $(a,b) \times (c,d)$ neplatí. V tomto prípade riešenia rovnice $Q_1(x)P_2(y) = 0$ rozdelia interval $(a,b) \times (c,d)$ na podmnožiny, kde už budú rovnice (SP) a (SPb) ekvivalentné.

Následne rovnicu (SPb) vyriešime na príslušných podmnožinách a pokúsime sa (ak je to možmé) parametrickú triedu riešení rovnice (SP) napísať pomocou jedného vzťahu (ukážeme si to na konkrétnych príkladoch!).

Poznámka 4.2

Rovnica (SP) *môže mať singulárne riešenia, ale len tie, ktoré spĺňajú rovnosť* $P_2(y) = 0$ [a]. *Iné riešenia už rovnica* (SP) *nemôže mať.*

[a] Pozor, to neznaméná, že riešenia rovnice $P_2(y) = 0$ musia byť singulárne.

Príklad 4.1

Nájdime všetky riešenia rovnice

$$x\,\mathrm{d}x + (y+1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Máme $\int x\,\mathrm{d}x + \int (y+1)\,\mathrm{d}y = 0$, *alebo* $x^2 + y^2 + 2y = C$.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Homogénna DR

- Jacob I. Bernoulli redukoval homogénnu DR prvého rádu na separovateľnú.
- Dnes už vieme, že metóda, ktorú použil je založená na transformácii premenných.
- So svojím bratom Johannom I. transformovali aj ďalšie DR na explicitne riešiteľné DR.

Definícia 5.1

Funkciu $F(x_1, \ldots, x_n)$ nazveme homogénnou funkciou stupňa k, $k \in \mathbb{N}_0$, ak platí $F(t\,x_1, \ldots, t\,x_n) = t^k\, F(x_1, \ldots, x_n)$ pre každé $t \neq 0$ a $(x_1, \ldots, x_n) \in D_F$. Prípadne hovoríme o podmnožine $U \subset D_F$, kde uvedená vlastnosť platí.

Príklad 5.1

Funkcia $G(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ *je zrejme homogénna funkcia stupňa 2 na* $\mathbb{R}^2$.
Funkcia $H(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2 - xy}{4x^2 + y^2}\right)$ *je homogénna funkcia stupňa 0 na* D_H.
Funkcia $J(x,y) = y^2 - x$ *nie je homogénna funkcia žiadneho stupňa.*

Úloha 5.1

Zistite stupeň homogenity funkcie funkcií $f(x,y,z) = x^5y^2z^3$ *a* $\varphi(t,y) = t^2 + y^2 - 2ty$.

DR tvaru

$$P(t,y) + Q(t,y)\,y' = 0, \tag{H}$$

kde P, Q sú homogénne funkcie rovnakého stupňa na oblasti M, nazývame homogénna DR. Nasledujúca veta dáva návod ako transformovať rovnicu (H) na DR ktorú už vieme riešiť.

Veta 5.1

Substitúcia $y = t\,u$ *prevedie DR* (H) *na separovateľnú DR tvaru*

$$P(1,u) + Q(1,u)\,u + t\,Q(1,u)\,u' = 0. \tag{Sh}$$

Navyše, ak u *rieši rovnicu* (Sh), *potom* $t\,u(t)$, $t \neq 0$ *rieši rovnicu* (H). *Ak* y *rieši rovnicu* (H), *tak existuje riešenie* u *rovnice* (Sh): $y = t\,u$.

Vyriešením tejto DR, ktorá je separovateľnou DR, a použitím uvedenej substitúcie dostaneme všetky riešenia pôvodnej homogénnej DR.

Poznámka 5.1

Zrejme rovnicu (H) *je možné previesť na DR* $y' = \xi\left(\dfrac{y}{t}\right)$ *pre* $t \neq 0$ *a polpriamky* $y = k\,t, t \neq 0$ *sú izoklíny.*

Príklad 5.2

Uvažujme DR

$$y\left(1+\ln\frac{y}{t}\right)-t\,y'=0.$$

Zrejme P, Q *sú homogénne funkcie stupňa 1 na množine, kde* $ty>0$*. Transformáciou* $y=tu$ *dostaneme rovnicu*

$$u\ln u=t\,u'.$$

Tá má 1-parametrickú triedu riešení $u(t)=\mathrm{e}^{ct}, c\in\mathbb{R}$*, ktorá obsahuje aj riešenie* $u(t)\equiv 1$*. Všetky riešenia pôvodnej rovnice obsahuje 1-parametrická trieda:* $y(t)=t\,\mathrm{e}^{ct}, c\in\mathbb{R}$*.*

Lineárna DR prvého rádu

Lineárnou DR prvého rádu nazývame rovnicu, ktorá má tvar

$$y' + p(t)y = g(t), \tag{1L}$$

kde $p, g \in C(a, b)$. Ak $g \equiv 0$ na (a, b), tak rovnicu

$$y' + p(t)y = 0, \tag{1Lh}$$

nazývame homogénna[3] DR prvého rádu, alebo aj DR prvého rádu bez pravej strany. Zrejme triviálne riešenie $y \equiv 0$ rieši (1Lh) pre každé $p \in C(a, b)$. Navyše je táto DR separovateľná a pre $y \not\equiv 0$ dostaneme $|y| = c\,\mathrm{e}^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}$, $c > 0$. Z toho vieme, že ľubovoľné riešenie (1Lh) je tvaru

$$y = k\,\mathrm{e}^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t},\ \ k \in \mathbb{R}$$

a je definované na celom intervale (a, b). Navyše pre $k > 0$ (< 0) je $y(t) > 0$ (< 0) pre každé $t \in (a, b)$.

[3] Pozor, nemýľte si tento pojem s pojmom zavedeným v kapitole 5.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Zvoľme teraz $(t_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}$ a určme k. Platí

$$y_0 = k\,\mathrm{e}^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t|_{t=t_0}}$$

a teda

$$y(t) = y_0\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s}, \;\; t \in (a, b).$$

Ukázali sme teda, že kažým bodom pásu $(a, b) \times \mathbb{R}$ prechádza jediná integrálna krivka a aj to kde celá leží. Navyše jediná integrálna krivka prechádzajúca bodom na osi o_x je $y \equiv 0$.

Teraz pristúpime ku riešeniu DR (1L) a to pomocou dvoch metód:

- Lagrangeova metóda variácie konštánt (parametrov) - koniec 18. storočia (Euler, Johann Bernoulli);
  - Všeobecná metóda pri riešení nehomogénnych DR;
  - Rozpracovanáaj pre lineárne PDR;
- Metóda integračného faktora - 1763, Leonhard Euler (Johannov žiak);
  - Dôležitá hlavne pre tzv. (ne)exaktné DR;
  - Vo všeobecnosti nemusí byť jednoduché ju použiť.

Popíšeme teraz LMVK. Vieme, že homogénna DR (bez pravej strany) (1Lh) prislúchajúca DR (1L) má všeobecné riešenie

$$y(t) = k\,\mathrm{e}^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Predpokladajme teraz, že

$$y(t) = k(t)\,\mathrm{e}^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}$$

(tj. namiesto konštanty k uvažujeme funkciu $k(t)$) rieši (1L). Ak takáto funkcia $k(t)$ existuje, tak zrejme $k \in C^1(a, b)$ (prečo ?). Po dosadení do rovice (1L) a úprave dostaneme, že $k(t)$ musí byť riešením rovice

$$k'(t) = g(t)\,\mathrm{e}^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

Veta 6.1

Nech $p, g \in C(a,b)$, potom

(a) *funkcia*

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}\left[\int g(t)\,\mathrm{e}^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right]$$

je všeobecné riešenie DR (1L) *na* (a,b)*;*

(b) *všeobecné riešenie DR* (1L) *sa rovná súčtu všeobecného riešenia DR* (1Lh) *a partikulárneho riešenia* (1L)*;*

(c) *každým bodom pásu* $(t_0, y_0) \in (a,b) \times \mathbb{R}$ *prechádza práve jedna integrálna, ktorú vytvára riešenie*

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} p(t)\,\mathrm{d}t}\left[\int_{t_0}^{t} g(u)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{u} p(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u + y_0\right].$$

Porovnaj s rovnicou $y_n + p(n)y_{n-1} = g(n)$ a jej riešením

$$y_n = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} p(j+1)\left(y_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k+1)(-1)^{-k}}{\prod_{j=0}^{k} p(j+1)}\right)$$

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Existuje viacero spôsobov nájdenia riešenia rovnice (1L). Uvedieme si ešte metódu integračného faktora. Vynásobme rovnicu (1L) funkciou $\phi \in C^1(a, b), \phi \not\equiv 0$, tj. dostaneme ekvivalentnú DR

$$\phi(t)\, y' + \phi(t)\, p(t) y = \phi(t)\, g(t). \tag{1LF}$$

Pokúsme sa napísať ľavú strana tejto rovnice ako derivácia súčinu $\phi\, y$, keďže rovnica (1LF) by už bolo potom priamo integrovateľná.

Otázkou je, či takáto funkcia existuje a ako ju nájsť.

- na (a, b) má platiť $(\phi(t)\, y)' = \phi(t)\, y' + \phi(t)\, p(t) y$;
- teda $\phi'(t) = \phi(t)\, p(t)$;
- nakoniec $\phi(t) = e^{\int p(t)\, \mathrm{d}t}$;
- takýchto funkcií je nekonečne veľa - nám stačí jedna z nich, ktorú nazveme integračný faktor.

Zrejme z rovnice $(\phi(t)\,y)' = \phi(t)g(t)$ potompre $t \in (a,b)$ ihneď máme

$$y(t) = \frac{1}{\phi(t)} \int \phi(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t} \left[\int g(t)\,\mathrm{e}^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \right].$$

- samozrejme, dostali sme rovnaký výsledok ako pri LMVK;
- je dobré si uvedomiť, prečo ϕ existuje a je dostatočne hladká;
- ak $g \equiv 0$, tak riešenie homogénnej rovnice ostáva v platnosti;

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Lineárna DR druhého rádu

V nasledujúcom budeme skúmať vlastnosti lineárnej DR druhého rádu tvaru

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \qquad \text{(LP)}$$

kde funkcie $a, b, f \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, $f(t) \not\equiv 0$ na intervale I.
Presnejšie, táto DR sa nazýva lineárna nehomogénna DR druhého rádu alebo lineárna DR druhého rádu s pravou stranou.
čo sa týka existencie a jednoznačnosti riešenia Cauchyho úlohy pre rovnicu (LP) dá sa dokázať nasledujúca veta, ktorú využijeme v našich ďalších úvahách.

Veta 7.1 (O existencii a jednoznačnosti riešenia rovnice (LP))

Nech $a, b, f \in C(I)$. Potom ľubovoľnou trojicou čísel (t_0, c_1, c_2), kde $t_0 \in I$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je určené práve jedno riešenie φ rovnice (LP) *na celom intervale I, ktoré vyhovuje počiatočným podmienkam $\varphi(t_0) = c_1$, $\varphi'(t_0) = c_2$.*

V ďalšom chceme nájsť všetky riešenia rovnice (LP), resp. spoznať štruktúru 2-parametrickej triedy. K tomu (ako uvidíme neskôr) potrebujeme poznať tzv. všeobecné riešenie rovnice (LP) bez pravej strany[4], tj. lineárnej homogénnej DR druhého rádu

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{L}$$

Zrejme má rovnica (L) vždy nulové (triviálne) riešenie. Z lineárnosti derivácie vyplýva nasledujúca veta.

Veta 7.2

Nech y_1, y_2 sú riešenia rovnice (L) *na intervale I a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Potom každá ich lineárna kombinácia $y = c_1y_1 + c_2y_2$ je tiež riešením rovnice* (L) *na intervale I.*

Z vety o existencii a jednoznačnosti riešenia Cauchyho úlohy pre rovnicu (LP) okamžite dostaneme tvrdenie:

Veta 7.3

Nech y je riešením rovnice (L) *na intervale I také, že $y(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0$, kde $t_0 \in I$. Potom $y(t) = 0$, $t \in I$.*

[4] $f(t) \equiv 0$ na intervale I.

Ukážeme si, že k tomu, aby sme našli všeobecné riešenie rovnice (L) potrebujeme nájsť dve jej riešenia, pričom ho bude predstavovať ich lineárna kombinácia. Aké ale majú byť tie dve riešenia? K odpovedi na túto otázku potrebujeme zaviesť pojem lineárnej závislosti, nezávislosti funkcií.

Definícia 7.1

Hovoríme, že funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_k$, $k \in \mathbb{N}$ definované na I sú lineárne závislé na I, ak existujú reálne čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$ nie všetky rovné nule také, že pre každé $t \in I$ platí

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_k f_k(t) = 0. \tag{2}$$

Funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_k$ nazývame lineárne nezávislé na intervale I, ak nie sú lineárne závislé na I.

Poznámka 7.1

Z definície okamžite vyplýva, že ak funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sú lineárne nezávislé na I, rovnosť (2) platí pre každé $t \in I$ vtedy a len vtedy, keď $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Priamo z definície vyplýva nasledujúca veta.

Veta 7.4

Funkcie $f_1, f_2, \dots, f_k$, $k \in \mathbb{N}$ definované na I sú lineárne závislé na I vtedy a len vtedy, keď niektorá z nich je lineárnou kombináciou ostatných na intervale I.

Pri určovaní linernej závislosti, linernej nezávislosti funkcií na I nám pomôže tzv. Wronskián (Wronského determinant) funkcií.

Definícia 7.2

Nech funkcie $f_1, f_2, \dots, f_k \in C^{k-1}(I)$, $k \in \mathbb{N}$. Potom determinat

$$W(f_1, f_2, \dots, f_k)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_k(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(t) & f_2^{(k-1)}(t) & \cdots & f_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nazývame Wronského determinat (Wronskián) funkcií $f_1, f_2, \dots, f_k$.

Pre lineárnu závislosť, nezávislosť riešení rovnice (L) platia nasledujúce nutné a postačujúce podmienky.

Veta 7.5 (Nutná a postačujúca podmienka pre LZ riešení rovnice (L))

Riešenia y_1, y_2 rovnice (L) *sú lineárne závislé na intervale I vtedy a len vtedy, keď existuje $\tau \in I$ také, že $W(y_1, y_2)(\tau) = 0$.*

Veta 7.6 (Nutná a postačujúca podmienka pre LN riešení rovnice (L))

Riešenia y_1, y_2 rovnice (L) *sú lineárne nezávislé na intervale I vtedy a len vtedy, keď existuje $\tau \in I$ také, že $W(y_1, y_2)(\tau) \neq 0$.*

Z týchto dvoch tvrdení okamžite máme tento zaujímavý dôsledok.

Dôsledok 7.1

Ak y_1, y_2 sú riešenia rovnice (L) *na intervale I, tak buď pre každé $t \in I$ je $W(y_1, y_2)(t) = 0$ alebo pre každé $t \in I$ je $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$.*

V nasledujúcom si ukážeme, že priestor riešení rovnice (L) je vektorovým priestorom dimenzie 2.

Veta 7.7

Existujú dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (L) *na intervale* I.

Veta 7.8

Nech $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *sú riešenia rovnice* (L) *na intervale* I*, pričom* $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$. *Potom tieto riešenia* $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *sú lineárne závislé na intervale* I.

Z toho, čo sme si ukázali, výplýva, že ľubovoľné riešenie rovnice (L) môžeme generovať pomocou bázy.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Definícia 7.3

Dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (L) *na intervale I nazývame fundamentálnym systémom riešení (FSR) alebo bázou riešení rovnice* (L) *na intervale I.*

Stačí nám teda poznať FSR tejto rovnice

Veta 7.9

Nech funkcie y_1, y_2 tvoria FSR rovnice (L) *na intervale I. Potom každé riešenie y rovnice* (L) *na intervale I sa dá vyjadriť ako vhodná lineárna kombinácia riešení y_1, y_2 FSR rovnice* (L)*, tj.*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), t \in I,$$

pričom c_1, c_2 sú vhodne zvolené reálne konštanty.

Je teda korektné funkciu $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, $t \in I$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a funkcie y_1, y_2 tvoria FSR rovnice (L) na intervale I, nazvať všeobecným riešením rovnice (L) na intervale I.

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Poznámka 7.2

Rovnica (L) *má síce pomerne jednoduchý tvar, nie je však známa univerzálna metóda, pomocou ktorej by sme vedeli vždy nájsť jej FSR a teda aj všeobecné riešenie.*

Pre niektoré špeciálne typy rovnice (L) takúto metódu poznáme. My si spomenieme tzv. lineárne homogénne DR druhého rádu s konštantnými koeficientami. Sú to DR tvaru

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{K}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Zrejme každé riešenie rovnice (K) existuje na celom $\mathbb{R}$ (prečo?).

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Veta 7.10

Funkcia $\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ je riešením rovnice (K) *vtedy a len vtedy, keď λ je koreňom algebraickej rovnice*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{CH}$$

Definícia 7.4

Algebraickú rovnicu (CH) *nazývame charakteristickou rovnicou rovnice* (K) *a jej korene nazývame charakteristickými koreňmi rovnice* (K).

Vieme teda určiť toľko riešení rovnice (K), koľko rôznych koreňov má algebraická rovnica (CH). Rovnica (K) môže mať:

a) dva rôzne reálne korene;

b) jeden dvojnásobný reálny koreň;

c) dva komplexne združené korene.

Ako vyzerá FSR rovnice (K) v uvedených troch prípadoch?

a) dva rôzne reálne korene:

Veta 7.11

Nech charakteristická rovnica (CH) *rovnice* (K) *má dva rôzne reálne korene* λ_1, λ_2. *Potom funkcie* $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ *tvoria FSR rovnice* (K).

V tomto prípade má všeobecné riešenie rovnice (K) tvar

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) jeden dvojnásobný reálny koreň:

Veta 7.12

Nech charakteristická rovnica (CH) *rovnice* (K) *má jeden dvojnásobný reálny koreň* λ. *Potom funkcie* $\mathrm{e}^{\lambda t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ *tvoria FSR rovnice* (K).

V tomto prípade všeobecné riešenie rovnice (K) má tvar

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) dva komplexne združené korene: Ak je $\lambda \in \mathbb{C}$[5] koreňom (CH) pre rovnicu (K), tak k nemu odpovedajúce riešenie je $\mathrm{e}^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$. Táto funkcia je však komplexná funkcia reálnej premennej. Otázka: Ako nájdeme reálne riešenie (riešenia ?!) rovnice (K)?

Veta 7.13

Komplexná funkcia reálnej premennej $z(t) = u(t) + \mathrm{i}\, v(t)$ je riešením rovnice (K) práve vtedy, keď reálne funkcie reálnej premennej $u(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ a $v(t) = \mathrm{Im}\, z(t)$ sú riešeniami (K).

Poznámka 7.3

Z komplexného riešenia rovnice (K) môžeme získať reálne riešenia tak, že zoberieme jeho reálnu alebo imaginárnu zložku.
Táto veta ostáva v platnosti aj v prípade, keď uvažujeme rovnicu (L), tj. rovnicu s nekonštantnými koeficientami.

Veta 7.14

Nech charakteristická rovnica (CH) rovnice (K) má komplexný koreň $\lambda = p + i\,q$, kde $p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$. Potom funkcie $\mathrm{e}^{pt}\sin(qt), \mathrm{e}^{pt}\cos(qt)$ tvoria FSR (K).

[5] Samozrejme nutne je charakteristickým koreňom aj $\overline{\lambda}$.

V tomto prípade všeobecné riešenie rovnice (K) má tvar

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{pt} \sin(qt) + c_2 \mathrm{e}^{pt} \cos(qt), \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Rovnice s nenulovou pravou stranou

Vráťme sa k lineárnej nehomogénnej DR druhého rádu (LP). Pozrieme sa na to, čo vieme robiť v prípade, keď máme rovnicu s pravou stranou. Vyslovme výsledok, ktorý nám dáva informáciu o štruktúre všeobecného riešenia rovnice (LP).

Veta 7.15

Nech funkcie y_1, y_2 tvoria FSR rovnice (LP) *na intervale I a nech funkcia y_p je partikulárne (jedno konkrétne) riešenie rovnice* (LP) *na I. Potom každé riešenie y rovnice* (LP) *na intervale I vieme vyjadriť v tvare*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t), \ \ t \in I,$$

kde c_1, c_2 sú vhodne zvolené reálne konštanty.

Poznámka 7.4

Vidíme, že k tomu, aby sme našli všteky riešenia rovnice (LP) *potrebujeme nájsť všeobecné riešenie, resp. FSR rovnice* (L)[a] *a jedno partikulárne (konkrétne) riešenie rovnice* (LP).

[a]To už v prípade rovnice (K) vieme.

Uvedieme si jeden z postupov, ako nájsť partikulárne riešenie rovnice (LP) na intervale I. Ide o metódu nazývanú Lagrangeova metóda variácie konštánt, ktorá je založená na tom, že poznáme FSR rovnice (L).

Veta 7.16 (Lagrangeova metóda variácie konštánt)

Nech funkcie y_1, y_2 tvoria FSR rovnice (L) *na intervale I. Potom funkcia*

$$y_p(t) = y_1(t) \int \frac{W_1(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t + y_2(t) \int \frac{W_2(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t$$

je partikulárnym riešením rovnice (LP) *na intervale I, pričom $W(t)$ je Wronskián riešení y_1, y_2 a $W_i(t)$, $i = 1, 2$ je determinant získaný z Wronskiánu nahradením jeho $i-$teho stĺpca stĺpcom $(0, f(t))^{\mathrm{T}}$.*

V prípade, keď budeme uvažovať lineárnu nehomogénnu DR s konštatnými koeficientami

$$y'' + ay' + by = f(t), \qquad \text{(KP)}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $f \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, $f(t) \not\equiv 0$, môžeme použiť aj tzv. metódu neurčitých koeficientov. Metóda je založená na tom, že podľa tvaru pravej strany rovnice (KP), tj. podľa tvaru funkcie f vieme určiť, ''uhádnuť'' tvar partikulárneho riešenia tejto DR obsahujúc neznáme koeficienty. Tie určíme dosadením predpokladaného partikulárneho riešenia do rovnice (KP), tj. na základe toho, že táto funkcia má byť riešením rovnice (KP).

Veta 7.17

Nech $f(t) = P_m(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a P_m je polynóm stupňa m. Potom rovnica (KP) *má partikulárne riešenie v tvare*

$$\varphi(t) = Q_m(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\, t^k,$$

pričom Q_m je polynóm tiež stupňa m a α je $k-$násobný ($k \in \{0, 1, 2\}$) reálny koreň charakteristickej rovnice (CH) *rovnice* (K).

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu

Poznámka 7.5

- *Našou úlohou je potom vlastne nájsť, určiť, dopočítať neznáme koeficienty polynómu Q_m.*
- *Pozor na $\alpha = 0$. V tomto prípade $f(t) = P_m(t)$ a teda hľadané partikulárne riešenie má tvar $\varphi(t) = Q_m(t)\, t^k$, pričom 0 je $k-$násobný ($k \in \{0, 1, 2\}$) koreň charakteristickej rovnice* (CH).

Veta 7.18

Nech $f(t) = P_m(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$, resp. $f(t) = P_m(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ a P_m je polynóm stupňa m. Potom (KP) *má partikulárne riešenie v tvare*

$$\varphi(t) = t^k\, \mathrm{e}^{\alpha t}(Q_m \cos(\beta t) + Z_m \sin(\beta t)),$$

pričom Q_m, Z_m sú polynómy tiež stupňa m a $\alpha + i\beta$ je $k-$násobný ($k \in \{0, 1\}$) komplexný koreň charakteristickej rovnice (CH) *rovnice* (K).

Ako nájdeme nejaké partikulárne riešenie, keď pravá strana rovnice (KP) je súčtom viacerých funkcií? Okrem Lagrangeovej metódy variácie konštánt (v tejto situácii je jej použitie pomerne komplikované) vieme nájsť jedno partikulárne riešenie pomocou tzv. princípu superpozície. Vyslovme tvrdenie, ktoré platí vo všeobecnosti, tj. pre rovnicu (LP).

Veta 7.19 (Princíp superpozície)

Nech funkcie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, $k \in \mathbb{N}$ *sú odpovedajúco partikulárnymi riešeniami rovníc* $y'' + a(t)y' + b(t)y = f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $t \in I$. *Potom funkcia* $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \dots + \varphi_k(t)$ *je partikulárnym riešením* $y'' + a(t)y' + b(t)y = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_k(t)$, $t \in I$.

Poznámka 7.6

Toto tvrdenie samozrejme platí aj pre lineárne nehomogénne DR s konštantnými koeficientami, tj. pre rovnice typu (KP).

Motivácia, história
Základné pojmy
DR 1. rádu
Separovaná a separovateľná DR
Homogénna DR
Lineárna DR prvého rádu
Lineárna DR druhého rádu