Výpočet limity postupnosti pomocou Heineho vety

(prvá verzia učebného textu)

Tento učebný text je určený študentom Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach ako podpora pri štúdiu limity postupnosti a jej výpočte pomocou Heineho vety. Text obsahuje dva riešené príklady rôznej obtiažnosti. Prvý príklad možno považovať za akýsi základný typ limity postupnosti, pričom druhý svojou obtiažnosťou odpovedá príkladom vyskytujúcim sa v štandardných zbierkach úloh.

Milá študentka, milý študent,

tento učebný text je ešte vo fáze vývoja - je to prvá verzia, a preto by som Vás chcela poprosiť o spätnú väzbu prostredníctvom anonymného dotazníka, ktorého vyplnenie by Vám nemalo trvať viac ako 3 minúty a ktorým prispejete k skvalitneniu tohto textu.

Dotazník nájdete tu: https://forms.gle/adR7i6tgf8fSHdhu8
Ďakujem.

Lenka Košárová, Učiteľské štúdium matematika - chémia, prvý ročník magisterského štúdia.
Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, 2021.
Finálna verzia učebného textu by sa mala stať súčasťou praktickej časti záverečnej práce.

Príklad 1

Vypočítajte limitu postupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n})$.

Riešenie

Vypočítame limitu vnútra, teda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$ (Obr. 1a). Následne sa pozrieme na hodnotu funkcie kosínus v tomto čísle 0, čo je 1 (Obr. 1b). Výsledok limity celej postupnosti je toto číslo 1 (Obr. 1c).

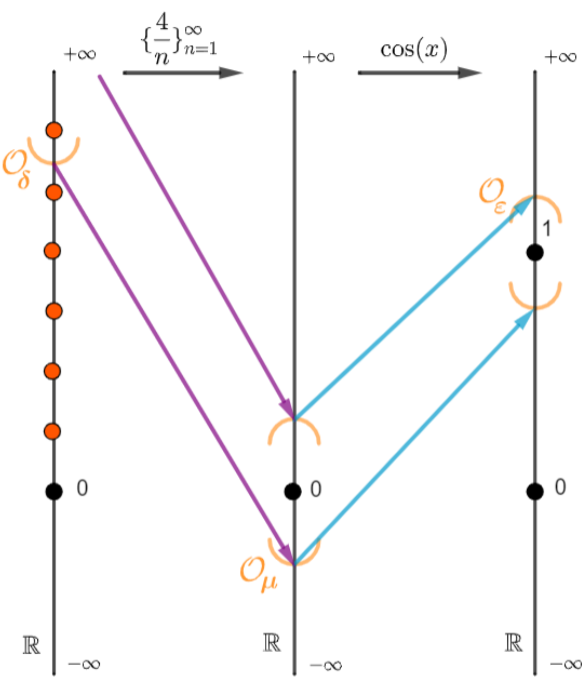
$$\lim_{n\to\infty} \cos(\underset{\downarrow\,0}{\tfrac{4}{n}}) = \qquad \lim_{n\to\infty} \underset{\downarrow\,1}{\cos(\underset{\downarrow\,0}{\tfrac{4}{n}})} = \qquad \lim_{n\to\infty} \underset{\downarrow\,1}{\cos(\underset{\downarrow\,0}{\tfrac{4}{n}})} = 1$$

Obr. 1a Obr. 1b Obr. 1c

Naozaj platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n}) = 1$? Prečo môžeme toto tvrdiť?

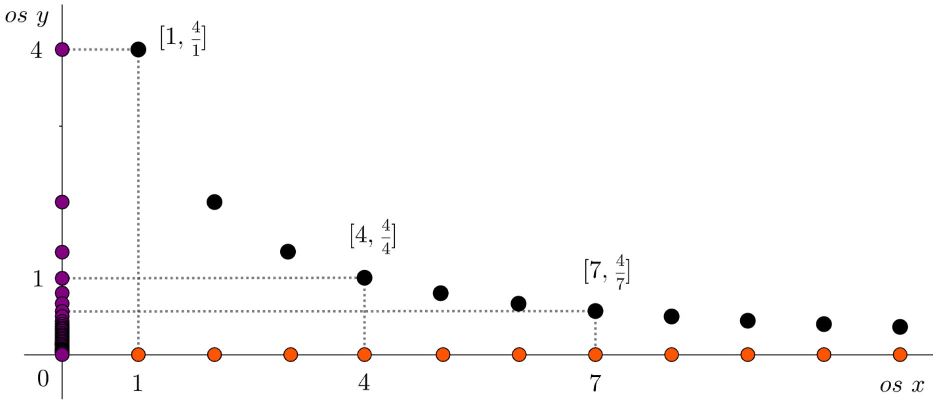
Tak poďme pekne poporiadku. Postupnosť $\{\cos(\frac{4}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ je zložená z dvoch častí, a to vnútornej zložky, ktorou je postupnosť $\{\frac{4}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ a vonkajšej zložky, ktorou je funkcia $\cos(x)$. Ďalej v našich úvahách využijeme diagram s tromi reálnymi osami (Obr. 2). Na osi naľavo sú znázornené prirodzené čísla, ktoré sú definičným oborom postupnosti $\{\frac{4}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Na strednej osi je obor hodnôt vnútornej zložky, teda postupnosti $\{\frac{4}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ a zároveň definičný obor vonkajšej zložky, čiže funkcie $\cos(x)$. Na osi napravo je obor hodnôt funkcie $\cos(x)$, ktorá je vonkajšou zložkou našej postupnosti.

Správne sme vyššie vypočítali, že limita vnútornej zložky je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$. Na diagrame je tento fakt znázornený pomocou fialových čiar, teda hodnoty z okolia $\mathcal{O}_\delta(+\infty)$ prenáša postupnosť $\{\frac{4}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ na okolie $\mathcal{O}_\mu(0)$. Preto nás ďalej bude zaujímať limita vonkajšej zložky funkcie kosínus práve v tomto bode nula. Využijeme, že funkcia kosínus je spojitá v nule. Čiže stačí spočítať funkčnú hodnotu funkcie kosínus v tomto bode, teda $\cos(0) = 1$. Fakt, že limita $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ je na diagrame znázornený modrými čiarami ako prenášanie honôty z okolia $\mathcal{O}_\mu(0)$ funkciou $\cos(x)$ na okolie $\mathcal{O}_\varepsilon(1)$. Súhrnom na diagrame vidíme, ako hodnoty z okolia $\mathcal{O}_\delta(+\infty)$ nevlastného bodu $+\infty$ preniesla postupnosť $\{\frac{4}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ na okolie $\mathcal{O}_\mu(0)$ bodu 0 a odtiaľ ich funkcia $\cos(x)$ preniesla na okolie $\mathcal{O}_\varepsilon(1)$ bodu 1. Takto sme na obrázku 2 znázornili Heineho vetu, podľa ktorej vieme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n}) = 1$.

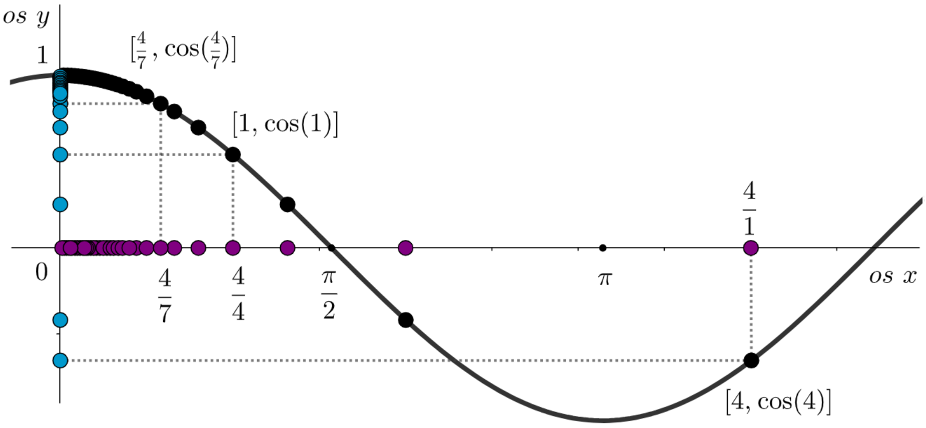


Obr. 2: Tri reálne osi

Druhý pohľad, ktorým sa môžeme pozrieť na tento príklad je pomocou grafov na obrázku 3a a 3b (v krátkosti grafy 3a a 3b).



Obr. 3a: Postupnosť $\{\frac{4}{n}\}_{n=1}^{\infty}$



Obr. 3b: Funkcia $\cos(x)$

Na grafe 3a sú na osi x znázornené oranžovou farbou prirodzené čísla, ktorým vnútorná zložka, čiže postupnosť $\{\frac{4}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ priradzuje fialové body na osi y, teda fialové body sú čísla 4, 2, $\frac{4}{3}$, 1, $\frac{4}{5}$,… . Tieto čísla sú vstupom funkcie kosínus v našej postupnosti $\{\cos(\frac{4}{n})\}_{n=1}^{\infty}$. Preto sa na grafe 3b, ktorý znázorňuje vonkajšiu zložku, čiže funkciu kosínus, zobrazujú na x-ovej osi. Fialovým bodom v grafe 3b na osi x funkcia kosínus priradzuje modré body na osi y.

Na grafe 3a je znázornená fialová postupnosť 4, 2, $\frac{4}{3}$, 1, $\frac{4}{5}$, …konvergujúca k nule. Na grafe 3b je fialová postupnosť konvergujúca k nule previazaná s modrou postupnosťou pomocou funkcie kosínus. Preto modrá postupnosť konverguje k 1.

Predchádzajúce riadky znázorňujú ďalší pohľad, že $\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n}) = 1$.

Príklad 2

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n(\cos(\frac{4}{n}) - 1)$.

Rozdeľme si súčin v predpise postupnosti $\{n(\cos(\frac{4}{n}) - 1)\}_{n=1}^{\infty}$ na dva činitele, a to na $\cos(\frac{4}{n}) - 1$ a n. Ich limity budeme počítať zvlášť. Najprv využijeme z predošlého príkladu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n}) = 1$ (Obr.4a). Ďalej spočítame limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n}) - 1$, teda $1 - 1 = 0$ (Obr. 4b). Následne spočítame limitu druhého činiteľa, teda $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ (Obr. 4c). Dostali sme nedefinovaný výraz takzvané „nula krát nekonečno“(Obr. 4d). Takže takto to nepôjde.

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot (\underbrace{\cos(\tfrac{4}{n})}_{1} - 1) =$$

Obr. 4a

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \underbrace{(\underbrace{\cos(\tfrac{4}{n})}_{1} - 1)}_{0} =$$

Obr. 4b

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{n}_{+\infty} \cdot \underbrace{(\underbrace{\cos(\tfrac{4}{n})}_{1} - 1)}_{0} =$$

Obr. 4c

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{n}_{+\infty} \cdot \underbrace{(\underbrace{\cos(\tfrac{4}{n})}_{1} - 1)}_{0} = „+\infty \times 0“$$

Obr. 4d

Skúsme roznásobiť zátvorku výrazom n a opäť využiť, že $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n}) = 1$. Avšak po dopočítaní limity $\lim\limits_{n\to\infty} n\cos(\frac{4}{n}) = +\infty$ a limity $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ opäť dostávame nedefinovaný výraz takzvané „nekonečno mínus nekonečno“ (Obr. 5). Takže ani takto to nepôjde.

$$\lim_{n\to\infty} n(\cos(\tfrac{4}{n} - 1) = \lim_{n\to\infty} n\underbrace{\cos(\tfrac{4}{n})}_{1} - n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{n\underbrace{\cos(\tfrac{4}{n})}_{1}}_{+\infty} - \underbrace{n}_{+\infty} = „+\infty - (+\infty)“$$

Obr. 5

Častokrát pri výpočte limít nám môže pomôcť výraz vynásobiť vhodnou jednotkou. Zvoľme si vhodnú jednotku v tvare $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$. Po úprave vidíme, že ani tento nápad nám nepomohol, keďže $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n}) - 1 = 0$ aj $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a päť dostávame nedefinovaný výraz takzvané „nula lomeno nulou“.

$$\lim_{n\to\infty} n(\cos(\tfrac{4}{n}) - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\cos(\tfrac{4}{n}) - 1) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}(\cos(\frac{4}{n}) - 1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\cos(\frac{4}{n}) - 1}^{0}}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}} = „\frac{0}{0}“$$

Obr. 6

Zdá sa, že sme už vyčerpali všetky najbežnejšie nápady, ako vypočítať limitu našej postupnosti. Avšak je tu ešte ďalšia možnosť, a to využiť známu limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Naša limita obsahuje $\cos(\frac{4}{n}) - 1$ a poznáme vzťah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (resp. $1^2 - \cos^2 x = \sin^2 x$) pomocou, ktorého môžeme previesť limitu $\lim\limits_{n\to\infty} n(\cos(\frac{4}{n}) - 1)$ na limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. Navyše si všimnime, že prvá limita je vzhľadom na n idúce do nekonečna, pričom druhá vzhľadom na x idúce k 0. Začneme vynásobením výrazu vhodnou jednotkou v tvare $\frac{\cos(\frac{4}{n})+1}{\cos(\frac{4}{n})+1}$, keďže máme $\cos(\frac{4}{n}) - 1$ a chceli by sme $\cos^2(\frac{4}{n}) - 1^2$(Obr.7a).

$$\lim_{n\to\infty} n(\cos(\tfrac{4}{n}) - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\cos(\tfrac{4}{n}) - 1) \cdot \frac{\cos(\frac{4}{n}) + 1}{\cos(\frac{4}{n}) + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos(\frac{4}{n}) + 1} \cdot (\cos^2(\tfrac{4}{n}) - 1^2)$$

Obr. 7a

Následne vyberieme mínus zo zátvorky $(\cos^2(\frac{4}{n}) - 1^2)$ a presunieme ho do prvého činiteľa. Teraz môžeme využiť vzťah $1^2 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Ďalej pre využitie limity $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ by sme potrebovali $\frac{\sin^2(\frac{4}{n})}{(\frac{4}{n})^2}$, preto opäť vynásobíme výraz vhodnou jednotkou v tvare $\frac{(\frac{4}{n})^2}{(\frac{4}{n})^2}$(Obr.7b).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\cos(\frac{4}{n}) + 1} \cdot (1^2 - \cos^2(\tfrac{4}{n})) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\cos(\frac{4}{n}) + 1} \cdot \sin^2(\tfrac{4}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\cos(\frac{4}{n}) + 1} \cdot \sin^2(\tfrac{4}{n}) \cdot \frac{(\frac{4}{n})^2}{(\frac{4}{n})^2}$$

Obr. 7b

Upravíme čitateľa v prvom zlomku a mocniny v druhom zlomku. Využijeme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$ (Obr. 7c).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n \cdot (\frac{4}{n})^2}{\cos(\frac{4}{n}) + 1} \cdot \frac{\sin^2(\frac{4}{n})}{(\frac{4}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-16}{n}}{\cos(\underset{\downarrow\, 0}{\tfrac{4}{n}}) + 1} \cdot \left(\frac{\sin(\overset{0\,\uparrow}{\tfrac{4}{n}})}{\underset{\downarrow\, 0}{\tfrac{4}{n}}}\right)^2$$

Obr. 7c

Ľahko spočítame limitu menovateľa v prvom zlomku, keďže funkcia kosínus je spojitá v 0. Stačí spočítať funkčnú hodnotu v nule, teda $\cos(0) = 1$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{4}{n}) + 1 = 2$. Limita čitateľa je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-16}{n} = 0$, a preto aj limita prvého zlomku je nula. Teraz využijeme, že limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ v druhom zlomku. Vieme, že limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$, a tak vďaka Heineho vete limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{4}{n})}{\frac{4}{n}} = 1$. Takto dostávame, že $\lim\limits_{n\to\infty} n(\cos(\frac{4}{n}) - 1) = 0$ (Obr. 7d).

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\overset{0}{\frac{-16}{n}}}{\underbrace{\cos(\frac{4}{n}) + 1}_{2}}}_{0} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin(\frac{4}{n})}{\frac{4}{n}}\right)}_{1}^2 = 0 \cdot 1 = 0$$

Obr. 7d