

Séria úloh 2

Postupnosť – explicitný a rekurentný tvar, vzťahy, operácie, skladanie, ohraničenosť, minimum, maximum, monotónnosť, limita postupnosti, Heineho veta pre spojité funkcie;

15. 2. 2022

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

Príklad 1. Nájdite všeobecný člen (explicitný tvar) postupnosti danej rekurentne:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n - a_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

$$a_1 = 2, a_2 = 1.$$

Príklad 2. Nájdite rekurentné vyjadrenie postupnosti

$$b_n = 1 - n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Príklad 3. Je daná postupnosť

$$c_n = \frac{5n^2}{n^2 + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Vyšetrite jej monotónnosť, ohraničenosť.

b) Nájdite jej minimum, maximum.

Príklad 4. Vyšetrite ohraničenosť nasledujúcej postupnosti

$$d_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \cdot \sin 2^n + \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \cdot 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Príklad 5. Vypočítajte.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{5^n} \right) \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n+1} \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(9 + \sqrt[n]{n})}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3^n}\right) + \sqrt[n]{7}}$$

Príklad 6. Ukážte, že pre dostatočne veľké prirodzené čísla n platí: $4,9 < \sqrt[n]{3^n + 5^n} < 5,1$.

Príklad 7. Vyšetrite konvergenciu postupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ a určte jej limitu, kde

$$a_1 = 0, \quad a_k = \frac{a_{k-1} + 3}{4}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Príklad 8. Vypočítajte.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a^n}, \quad a > 0$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\pi+1} \sin(4n+2^n)}{n^2-2n} - \frac{\sqrt[n]{n^4}}{n^3}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3n+1}{5n-1}} + \sqrt[n]{2}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n - 5}{3n^3 - 2n^2 + 6}$

Príklad 9. Vypočítajte nasledujúce limity. Ak je limita číslo, nájdite nejaký index, od ktorého sa hodnoty danej postupnosti líšia od limity s presnosťou ε . Ak je limita symbol, nájdite nejaký index, od ktorého sú hodnoty danej postupnosti väčšie, resp. menšie ako číslo K .

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + n^2)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1}$

Príklad 10. Dokážte z definície limity, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \neq \frac{99}{100}.$$

Príklad 11. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcej postupnosti

$$a_n = 1 + \cos(n\pi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Príklad 12. Nájdite supremum a infimum nasledujúcich množín.

a) $(-1, 2)$

b) $\{2, 5, 8\}$

c) $\{2 + \frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$

d) $\{(-1)^n \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$

Príklad 13. Je daná postupnosť

$$b_k = \frac{5k^2}{k^2 + 3}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

a) Vypočítajte $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k$.

b) Nájdite minimum, maximum, infimum, supremum postupnosti $(a_k)_1^\infty$.

Príklad 14. Daná je postupnosť

$$c_m = \sqrt{\frac{m}{m^2 - \frac{1}{4}}}.$$

Dokážte, že čísla -1 a $\frac{3}{2}$ nie sú infimom postupnosti $(c_m)_1^\infty$.

Príklad 15. *Vypočítajte*

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{3n+1} \right)^{3n+1} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^n$$

Príklad 16. *Vyšetrite ohraničenost nasledujúcej postupnosti*

$$c_n = \frac{\sqrt[n]{\pi+1} \sin(4n+2^n)}{n^2-2n} - \frac{\sqrt[n]{n^4}}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Veta 1. *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je kladná postupnosť a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

- a) *Ak $L < 1$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*
 b) *Ak $L > 1$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.*

Veta 2. *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

- a) *Ak $L < 1$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.*
 b) *Ak $L > 1$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.*

Domáca úloha:

úlohy 1 - 3 z témy Vlastnosti postupností a úlohy 1 - 4, 5 e, g, ch, k, l, m, q, s, u, v, w, x, y, z, 6 e, g, q, t, v, 7 c, f, 8, 9, 10 z témy Limita postupnosti v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 1 a úlohy v tejto sérii