

## Séria úloh 4

Limita reálnych funkcií a postupností – konvergencia postupnosti bodov metrického priestoru, limita a spojitosť funkcie.

2. 3. 2022

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

**Príklad 1.** Pre dané  $K \in \mathbb{R}$  nájdite číslo, že pre čísla  $x$  väčšie ako to číslo budú hodnoty  $\sqrt[4]{x}$  väčšie ako  $K$ .

**Príklad 2.** Majme funkciu  $\varphi$  definovanú predpisom  $\varphi(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ . Vypočítajte nasledujúce limity.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x)$                       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$                       c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$

**Príklad 3.** Vypočítajte nasledujúce limity funkcií.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log(1-\cos x) + \sin \frac{1}{x}}$                       b)  $\lim_{p \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+p+p^2} - \sqrt{1-p+p^2})$

c)  $\lim_{a \rightarrow \pi} \frac{3}{\cos a + 1}$                       d)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sin t}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 6x^2 - 4}{x^4 + x^3 + 1}$                       f)  $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^3 + a - 2}{a^3 - a^2 - a + 1}$

g)  $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{\sqrt{t+5} - 2}{t+1}$                       h)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{y^6 - 1} + y^2}{(y-2)^3}$

i)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 5z}{\sqrt{z+4} - 2}$                       j)  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{z+5}{z+3} \right)^{2z+7}$

k)  $\lim_{z \rightarrow 0+} z \lfloor \frac{2}{z} \rfloor$                       l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\operatorname{cotg} 9x}$

m)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$                       n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 5^{3x}}{\sin x}$

**Príklad 4.** Vyšetrite spojitosť zadaných funkcií. Ak je to možné, dodefinujte danú funkciu tak, aby bola spojitá na  $\mathbb{R}$ .

a)  $f(x) = \frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}$                       b)  $g(t) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{t}}}$                       c)  $h(s) = \begin{cases} s^2 + 2 & s \in \mathbb{Q} \\ 2 & s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

**Príklad 5.** Vypočítajte nasledujúce limity postupností.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} - n \right)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+4n}{4n-3} \right)^{5n}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{n-1} \right)^n$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+3n}{4n-3} \right)^{5n}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

**Príklad 6.** Majme  $\alpha(t) = (2+t)^{\frac{1}{t}}$ . Vypočítajte limitu  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t)$  a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$ .

**Príklad 7.** Dokážte, že postupnosť bodov  $\left\{ \left[ \frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}, 2 \right] \right\}_{k=0}^{\infty}$  konverguje k bodu  $[0, 1, 2]$ .

**Príklad 8.** Nájdite postupnosť bodov  $\mathbb{E}^3$ , ktorá konverguje k bodu  $[-1, e^2, \frac{1}{4}]$ .

**Príklad 9.** Vyšetrite všetky limity a spojitosť funkcie  $h$  v bodoch  $-10, -3, -\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}, -1, 0, 2, 10$ . Vyšetrite limity v smeroch  $+\infty$  a  $-\infty$ .

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & x \in (-\infty, -3) \\ 20 & x = -3 \\ (x+2)^2 & x \in (-3, -1) \setminus \left\{ -1 - \frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{N} \right\} \\ -1 & x \in \left\{ -1 - \frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{N} \right\} \\ \operatorname{sgn} x & x \in \langle -1, 2 \rangle \\ \log(x-2) & x > 2 \end{cases}$$

### Domáca úloha:

úlohy 1 - 4 z témy Limita funkcie, úlohy 1 - 4 z témy Spojitosť funkcie a úlohy 1 - 11 z témy Limita postupnosti v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 1, úlohy 10 - 12 z témy Diferenciálny počet funkcie viac premenných v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 2 a úlohy v tejto sérii

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_p(1+x)}{x} = \log_p e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$