

Séria úloh 5

Limita reálnych funkcií, číselné rady – limita a spojitosť funkcie, postupnosť čiastočných súčtov číselného radu.

8. 3. 2022

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

Príklad 1. Vypočítajte nasledujúce limity.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{b)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}-1}{x^2+(y-1)^2} & \text{c)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \\
 \text{d)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{e)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y} & \text{f)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2y-x^2}{x^4+(y-1)^2} \\
 \text{g)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{h)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+y^2}} & \text{i)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2+y^2} \\
 \text{j)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}
 \end{array}$$

Príklad 2. Vypočítajte nasledujúce limity.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3-2y^3}{2x^2+3y^2} & \text{b)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{c)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \\
 \text{d)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})} & \text{e)} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)x^2y^2
 \end{array}$$

Príklad 3. Nájdite všetky body nespojitosti daných funkcií.

$$\text{a)} \quad f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{(x^2-y)(x+3y)} \qquad \text{b)} \quad f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

Príklad 4. Zistite, či funkcia f je spojitá na celom priestore \mathbb{E}^2 , ak

$$f(x, y) = \begin{cases} 4-x-y & (x, y) \neq (2, 1) \\ 3 & (x, y) = (2, 1). \end{cases}$$

Príklad 5. Ak je to možné, tak dodefinujte funkciu F na spojitú na celom priestore \mathbb{E}^2 , ak

$$F(x, y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

Príklad 6. Ak je to možné, tak dodefinujte funkciu g na spojitú na celom priestore \mathbb{E}^2 , ak

$$g(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Príklad 7. Pre aké $a \in \mathbb{R}$ je funkcia h spojitá v bode $[0, -1]$, ak

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x^2}{x^4 + y^2 + 2y + 1} & (x, y) \neq (0, -1) \\ a & (x, y) = (0, -1). \end{cases}$$

Príklad 8. Z Heineho definície limity funkcie dokážte, že $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ neexistuje.

Príklad 9. Riešte v \mathbb{R} : $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{4x-3}{3x-4}$.

Príklad 10. Nájdite súčty nekonečných radov.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (\ln 2)^{2n} \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Príklad 11. Vyjadrite v tvare zlomku.

$$\text{a) } 0,4\overline{90} \qquad \text{b) } 0,1\overline{011}|_2$$

Domáca úloha:

úlohy 13 - 19 z témy Diferenciálny počet funkcie viac premenných v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 2, úlohy 1 - 5 z témy Postupnosť čiastočných súčtov - definícia v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 1 a úlohy v tejto sérii

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_p(1+x)}{x} = \log_p e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$