

## Séria úloh 7

Určitý integrál – definícia určitého integrálu (normy, integrálne súčty), nevlastný integrál. Mocninové rady.

24. 3. 2022

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

**Príklad 1.** Vypočítajte nasledujúce integrály.

$$\text{a) } \int_{24}^8 \frac{1}{3+\sqrt{1+a}} da$$

$$\text{b) } \int_{-1}^x \frac{1}{e^a+1} da$$

$$\text{c) } \int_{16}^{16} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[4]{a}} da$$

$$\text{d) } \int_{100}^0 \frac{c^2+\sqrt{1+c}}{\sqrt[3]{1+c}} dc$$

$$\text{e) } \int_2^2 \frac{1}{c\sqrt{c+1}} dc$$

$$\text{f) } \int_x^{3x} e^c \sin c dc$$

**Príklad 2.** Vypočítajte nasledujúce integrály.

$$\text{a) } \int_0^1 \ln(t^2 + 1) dt$$

$$\text{b) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin c} dc$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{c}{\sqrt{1-c^4}} dc$$

**Príklad 3.** Delenie  $D$  intervalu  $\langle 2, 5 \rangle$  je dané číslami 2, 2, 5, 3, 1, 3, 5, 3, 9, 4, 2, 4, 5, 4, 7, 5. Nájdite dĺžku čiastočných intervalov a normu delenia  $D$ .

**Príklad 4.** Nájdite aspoň dve normálne postupnosti delení intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

**Príklad 5.** Je daná postupnosť delení  $D_k = \{0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$ . Určte normu delení jednotlivých členov postupnosti a zistite, či je celá postupnosť normálna.

**Príklad 6.** Určte horný a dolný integrálny súčet funkcie  $g$  pre delenie  $\{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$ , kde

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \cup (\frac{1}{2}, 1), \\ 0 & x = \frac{1}{2}, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

**Príklad 7.** Vypočítajte určitý integrál  $\int_1^e \frac{1}{a} \, da$  ako limitu postupnosti integrálnych súčtov.

**Príklad 8.** Určte horný a dolný integrálny súčet funkcie  $f : y = \frac{3}{2} - x$  na intervale  $\langle 1, 3 \rangle$  a ekvidištančného delenia  $D_8$  na 8 rovnakých častí. Vypočítajte ich limity pokiaľ existujú.

**Príklad 9.** Určte horný a dolný integrálny súčet funkcie  $f : y = x^2$  na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$  a ekvidištančného delenia  $D_n$ . Vypočítajte ich limity pokiaľ existujú.

**Príklad 10.** Odhadnite integrál  $\int_0^1 e^{x^2} \, dx$  s chybou 0,1.

**Príklad 11.** Integrál  $\int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx$  vypočítajte ako limitu niektorej normálnej postupnosti integrálnych súčtov, kde  $0 < a < b$ .

**Príklad 12.** Zistite, či funkcia  $f$  je riemanovsky integrovateľná, kde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & x \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}), n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

**Príklad 13.** Zistite, či funkcia  $g$  je riemanovsky integrovateľná na intervale  $\langle 0, 2 \rangle$ , kde  $g(x) = \operatorname{sgn}(\sin \frac{\pi}{x})$ .

**Príklad 14.** Vypočítajte nasledujúce integrály.

a)  $\int_2^\infty \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{a^2}\right)^2 \, da$

b)  $\int_0^\infty \cos a \, da$

c)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}} \, da$

d)  $\int_0^\infty \frac{1}{c^2} \, dc$

e)  $\int_0^1 \frac{1-2c}{\sqrt{c-c^2}} \, dc$

f)  $\int_{-1}^1 \frac{\arccos c}{\sqrt{1-c^2}} \, dc$

g)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1} \, dt$

h)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{2t}{t^2+1} \, dt$

**Príklad 15.** Vypočítajte dĺžku krivky danej parametricky rovnicami  $x = e^{-t} \cos 2t$ ,  $y = e^{-t} \sin 2t$  na intervale  $(0, \infty)$ .

**Príklad 16.** Nájdite obor konvergenzie a bodovú limitu nasledujúcich postupností funkcií.

a)  $f_n(x) = nx$       b)  $g_n(x) = \frac{n^2x-5n}{2n^2+nx}$       c)  $h_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$       d)  $\varphi_n(x) = n \left( x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$

**Príklad 17.** Nájdite obor konvergenzie a bodovú limitu postupnosti funkcií  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Rozhodnite, či postupnosť konverguje rovnomerne.

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x & x \in [0, \frac{1}{2^{n+1}}] \\ -2^{n+1}x + 2 & x \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}] \\ 0 & \text{ináč} \end{cases}$$

**Príklad 18.** Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov. V prípade mocninových radov nájdite ich polomer a obor konvergenzie.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+x^4)^n$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$       d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$   
 e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$       f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$       g)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 5^n (x-1)^n$       h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - 1 \right) x^n$

**Domáca úloha:**

úlohu 6 z témy Určitý integrál v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 2, úlohy 1 - 2 z témy Polomer a obor konvergenzie, súčet mocninových radov v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 1 a úlohy v tejto sérii