Séria úloh 8

Diferenciálny počet – diferenciál, l'Hospitalove pravidlá, aplikácie Lagrangeovej vety, Taylorov rad funkcií jednej premennej.

1. 4. 2022

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

Príklad 1. *Vypočítajte deriváciu funkcie v bode x_0.*

a) $g(x) = \begin{cases} \pi x^2 + x \cdot \operatorname{arctg} \frac{3\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$

b) $h(x) = \mathrm{E}(x)$, $x_0 = 0$

Príklad 2. *Určte deriváciu funkcie φ na $\mathbb{R}$, kde* $\varphi(x) = \begin{cases} 5^x \log(x+1) \sin x & x \geq 0 \\ \frac{x - x\cos x}{\sqrt{1+x}-1} & x < 0. \end{cases}$

Príklad 3. *Definujte funkciu ψ tak, aby bola diferencovateľná na $\mathbb{R}$, kde*

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (-\infty, -6) \\ \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2} & x \in (-6, -2) \cup (-2, +\infty). \end{cases}$$

Príklad 4. *Určte deriváciu funkcie ξ na $\mathbb{R}$, kde*

$$\xi(x) = \begin{cases} x + 2 & x > 0 \\ 5 & x = 0 \\ x \sin x & x < 0. \end{cases}$$

Príklad 5. *Nájdite dotyčnicu a normálu k funkcii h v bode $P = [1, ?]$, kde*

$$h: \ y = \sqrt[3]{|x-1|}.$$

Príklad 6. *Nájdite diferenciu a diferenciál funkcie f v bode $x_0 = 1$ pre $h = 0,1$, kde*

$$f: \ y = 3x^2.$$

Príklad 7. *Dokážte, že* $(1+h)^r \doteq 1 + rh$ *pre* $r \in \mathbb{R}$, h *malé. Určte približnú hodnotu* $\sqrt[4]{267}$.

Príklad 8. *Odhadnite a približne vypočítajte hodnotu* $\operatorname{arctg} 1{,}1$.

Príklad 9. *Dokážte, že rovnica* $x^3 - 3x^2 + 6x + 1 = 0$ *má iba jeden reálny koreň a nájdite interval, v ktorom tento koreň leží.*

Príklad 10. *Dokážte, že funkcia* $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ *je konštantná na* $M = \langle 1, +\infty)$ *a nájdite túto konšatntu.*

Príklad 11. *Nájdite deriváciu nasledujúcich funkcií.*

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$ b) $u(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ -x^5 & x < 0 \end{cases}$

Príklad 12. *Odvoďte vzorce pre deriváciu nasledujúcich elementárnych funkcií.*

a) $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ b) $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ c) $\varphi(x) = a^x$, $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$

Príklad 13. *Odvoďte vzorce pre deriváciu nasledujúcich elementárnych funkcií.*

a) $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $g(x) = \operatorname{tg} x$

Príklad 14. *Odvoďte vzorce pre deriváciu nasledujúcich elementárnych funkcií.*

a) $g(x) = \log_a x$, $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ b) $h(x) = \arcsin x$ c) $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x$

Príklad 15. *Odvoďte vzorec pre deriváciu funkcie* $g: \ y = x^\alpha$.

Príklad 16. *Nech funkcie f, g majú deriváciu v bode x_0 a $\alpha \in \mathbb{R}$. Ukážte, že potom aj funkcie $c \cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ a ak $g(x_0) \neq 0$ aj $\frac{f}{g}$ majú deriváciu v bode x_0, pričom platí*

a) $(\alpha \cdot f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)$,

b) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

c) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Príklad 17. *Majme funkciu g, kde*

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ukážte, že funkcia g je spojitá na svojom definičnom obore a diferencovateľná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ukážte, že v bode 0 nemá g deriváciu ani sprava ani zľava.

Príklad 18. *Majme funkciu φ, kde*

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ukážte, že funkcia φ je diferencovateľná na svojom definičnom obore, ale jej prvá derivácia nie je spojitá v bode 0. Vyšetrite diferencovateľnosť druhého rádu.

Príklad 19. *Nájdite $f'''(0)$, ak $f: \; y = |x|^3$.*

Príklad 20. *Vypočítajte nasledujúce limity.*

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\pi - 2 \cdot \operatorname{arctg} x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^5 2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

d) $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x - 1)}}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x}{x \ln x - x + 1}$

Príklad 21. *Rozviňte nasledujúce funkcie do Taylorovho radu so stredom v bode 0 a nájdite množinu, na ktorej je súčet radu pôvodná funkcia.*

a) $f : y = \frac{1}{1+x}$

b) $g : y = \frac{1}{1-x}$

c) $h : y = \frac{2x-1}{x^2+x-6}$

d) $\varphi : y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

Definícia 1. *Majme funkciu $f : A \to \mathbb{R}$. Triedu funkcií $o(f)$ definujeme nasledovne:*

$$o(f) := \{g : A \to \mathbb{R};\ \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\}.$$

Zápis $\varphi(x) + o(f)$ je zápis výrazu $\varphi(x) + \psi(x)$ pre nejaké $\psi \in o(f)$.

Veta 1. *Nech funkcia f je $(n+2)-$krát diferencovateľná na (c_1, c_2), kde $c_1 < x_0 < c_2$. Potom pre všetky $x \neq x_0$ dostatočne blízke x_0 platí*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^j),\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Príklad 22. *Použitím Taylorových polynómov vypočítajte nasledujúce limity.*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

Domáca úloha:

úlohy 1 - 2 z témy Derivácia funkcie, úlohy 1 - 6 z témy Aplikácie diferenciálneho počtu, úlohu 1 z témy Taylorove rady v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 1 a úlohy v tejto sérii

References

[1] L. Kluvánek, I. Mišík, M. Švec, Matematika II, SVTL, Bratislava, 1959.

[2] Mihalíková B., Matematická analýza 3, Funkcionálne postupnosti a rady, učebné texty, PF UPJŠ v Košiciach, 2014.