

Séria úloh 9

Diferenciálne rovnice – riešenie DR prvého rádu, riešenie Cauchyho úlohy pre DR prvého rádu.

8. 4. 2022

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

Príklad 1. Určte rád nasledujúcich diferenciálnych rovníc.

- a) $\sin x \cos y + y' = 0$ b) $y' + y^2 + x = 0$ c) $y' + y^{(3)} + x = 0$
 d) $yy' + y'' = \frac{2}{x}$

Príklad 2. Ukážte, že funkcia F je lineárna vzhľadom na premennú y , kde $F(y', y, x) = y' + 3xy$.

Príklad 3. Ukážte, že funkcia G nie je lineárna vzhľadom na premennú y , kde $G(y', y, x) = y'y + 3x$.

Príklad 4. Zistite, ktoré z daných funkcií sú riešením diferenciálnej rovnice $yy''' - y'y'' = 0$.

- a) $y = e^{-x}$ b) $y = 2x + 5$ c) $y = \cos x$ d) $y = x + \cos x$

Príklad 5. Zistite, či funkcie φ sú riešeniami daných diferenciálnych rovníc.

- a) $\varphi(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$, $yy' = x - 2x^3$ b) $\varphi(x) = \frac{12}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y' - y \operatorname{tg} x = 0$
 c) $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $xy' - (x-1)y = 0$ d) $\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, $y' = y(1-y)$

Príklad 6. Riešte diferenciálne rovnice.

- a) $y'y^2 + y' = x$ b) $y^2y' = \frac{1}{1+x^2}$ c) $y' = t - 2ty$
 d) $y'(x-2) = \frac{3y}{x+1}$ e) $y' = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ f) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{y}y' = 0$
 g) $y - xy' = 0$ h) $y \cos x - y' \sin x = 0$ i) $x + yy' = 0$
 j) $x + (y+1)y' = 0$ k) $yy' - x + \frac{1}{x} = 0$ l) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{y'}{1+y^2} = 0$
 m) $10^x - 10^{-y}y' = 0$ n) $1 - 2x - y^2y' = 0$ o) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} = 0$
 p) $y'(1-x^2) + y = 0$ q) $2y'\sqrt{x} = y$ r) $y' = a^2y^2 - b^2$, $a \neq 0, b \neq 0$

Príklad 7. Riešte diferenciálne rovnice.

- a) $y' = 3y$ b) $(y-1)(y-2) - y' = 0$ c) $2y - x^3y' = 0$
 d) $y - y^2 + xy' = 0$ e) $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$ f) $1 + y^2 + xy' = 0$
 g) $y' = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{x(y^2+2)}$ h) $-1 + e^{-y}(1+y') = 0$ i) $y' = \frac{1}{x-y} + 1$
 j) $\sin x \cos y + y' \operatorname{tg} y \cos x = 0$ k) $e^{x+y} - y' = 0$ l) $(1 + e^x)yy' = e^x$
 m) $\sin \frac{x+y}{2} - \sin \frac{x-y}{2} + y' = 0$ n) $y' = \cos(y-x)$ o) $y' = \sqrt{4x+2y+1}$

Príklad 8. *Nájdite riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku.*

- | | | | |
|-----------------------------------|------------|--|------------|
| a) $(x^2 + 1)y' - xy = 0$ | $y(0) = 1$ | b) $\frac{x}{1+y} - \frac{yy'}{1+x} = 0$ | $y(0) = 1$ |
| c) $\frac{1+y^2}{1+x^2} - y' = 0$ | $y(0) = 1$ | d) $y \ln y + xy' = 0$ | $y(1) = 1$ |
| e) $y' = 2\sqrt{y} \ln x$ | $y(e) = 1$ | f) $y\sqrt{1+x^2} - xy + (1+x^2)y' = 0$ | $y(0) = 1$ |

Príklad 9. *Pre pohyb hmotného bodu so zretelom na trenie platí vzťah $mv' = f - \lambda v$, kde m je hmotnosť bodu, v je rýchlosť, t čas, f koeficient trenia, λ je konštanta. Určte rýchlosť pohybu.*

Príklad 10. *Riešte diferenciálne rovnice.*

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(x - y)y' = x + y$ | b) $y' = \frac{-2xy}{x^2+y^2}$ | c) $y(1 + \ln \frac{y}{x}) - xy' = 0$ |
| d) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ | e) $2xyy' = y^2 - x^2$ | f) $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$ |
| g) $3xy^2y' = 4y^3 - x^3$ | h) $y + \sqrt{xy} = xy'$ | i) $xy' - y = \frac{x^2}{y}$ |

Príklad 11. *Zistite stupeň homogénnej funkcie.*

- | | | |
|--|--|--|
| a) $f(x, y) = \frac{2x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}$ | b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ | c) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ |
| d) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + x^2y + y^3}$ | e) $f(x, y) = \frac{x^3}{y} + y^2 \ln \frac{x}{y}$ | f) $f(x, y) = xy \sin \frac{x+y}{x-y}$ |

Príklad 12. *Riešte diferenciálne rovnice.*

- | | | |
|---------------------------------|--|---|
| a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$ | b) $xy' = x + y$ | c) $(x + y)y' + y = 0$ |
| d) $(x + y)y' - y = 0$ | e) $x + yy' = 2y$ | f) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ |
| g) $x^2y' = x^2 + xy + y^2$ | h) $(x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$ | i) $3(x^2 + 2xy + y^2) + (2x^2 + 3xy)y' = 0$ |
| j) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ | k) $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$ | l) $y' = \frac{\ln x}{x}$ |
| m) $xy' = y \ln \frac{x}{y}$ | n) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y-x}{x}$ | o) $x - y \cos \frac{y}{x} + x (\cos \frac{y}{x}) y' = 0$ |

Príklad 13. *Nájdite riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku.*

- | | |
|---|--|
| a) $(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1$ | b) $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad y(0) = 1$ |
|---|--|

Príklad 14. *Riešte diferenciálne rovnice.*

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| a) $xy + e^x - xy' = 0$ | b) $xy - x^2y' = 2a^2$ | c) $xy' + y = \ln x + 1$ |
| d) $xy' - y = x^2 \cos x$ | e) $y' + \frac{1}{x^2} y = 0$ | f) $y' - y \operatorname{tg} x = 0$ |
| g) $y' - y(x \sin x - \cos x) = 0$ | h) $y' + 3y = x$ | i) $y' + 2y = e^{2x}$ |
| j) $y' + xy = x$ | k) $xy' = 2y + x + 1$ | l) $xy' + y = x^3$ |
| m) $x^2y' + xy = -1$ | n) $(1 - x^2)y' + x(y - a) = 0$ | o) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ |

Príklad 15. Riešte diferenciálne rovnice.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & y' - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = a \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} & \text{b)} & x(\ln x)z' - 2z = \ln x & \text{c)} & g' + \frac{1}{x+1} g = \sin x \\
 \text{d)} & xh' - 2h = x^3 \cos x & \text{e)} & u' \cos x + 2u \sin x = 2 \sin x & \text{f)} & z' + \frac{xz}{1+x^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} \\
 \text{g)} & y' \operatorname{tg} t - y = \frac{1}{4} t(2 \operatorname{tg} t - t) & \text{h)} & (1+t^2)y' + y = \operatorname{arctg} t & \text{i)} & y' - 2xy = 0
 \end{array}$$

Príklad 16. Nájdite riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & y' + x^2y = x^2 & y(2) = 1 & \text{b)} & y' + y = \cos x & y(0) = 1 \\
 \text{c)} & y' + y \operatorname{cotg} x = \sin x & y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & \text{d)} & xy' + 2y = 2x \cos 2x + 2 \sin 2x & y(\pi) = 1 \\
 \text{e)} & y'(x+1) - 2y = (x+1)^4 & y(0) = 2 & \text{f)} & y'(x+1) = 1 - y & y(0) = 5
 \end{array}$$

Príklad 17. Nájdite krivku, ktorá prechádza cez bod $[2, 0]$ a má tú vlastnosť, že dĺžka úseku jej dotyčnice medzi dotykovým bodom a osou o_y je 2!

Príklad 18. Nájdite krivky, pre ktoré tangens uhla zovretého dotyčnicou a kladným smerom osi o_x je priamo úmerný y -ovej súradnici dotykového bodu.

Príklad 19. Nájdite krivky, pre ktoré súčet normály a subnormály je veličinou stálou, rovnajúcou sa a .

Príklad 20. Nájdite krivky, pre ktoré úsek vytatý súradnicovými osami na dotyčnici je dotykovým bodom rozpolený. Určte krivku prechádzajúcu bodom $[2, 3]$.

Príklad 21. Nájdite krivku, pre ktorú trojuholník vytvorený osou o_y , dotyčnicou a sprievodičom dotykového bodu je rovnoramenný!

Príklad 22. Miestnosť pojme $V = 10800 \text{ m}^3$ vzduchu. Po ukončení schôdze obsahoval tento vzduch 0,12% CO_2 . Koľko kubických metrov vzduchu obsahujúceho 0,04% CO_2 treba vháňať za minútu do miestnosti, aby po uplynutí 10 minút obsahoval vzduch v miestnosti len 0,06% CO_2 ?

Príklad 23. Nájdite krivku, pre ktorú pomer úseku vytatého dotyčnicou na osi o_y a úseku vytatého normálou na osi o_x má konštantnú hodnotu k ! Krivku vyjadrite v polárnych súradniciach !

Príklad 24. Nájdite krivku, ak jej dotyčnica vytína na osi O_y úsek rovnajúci sa $\frac{1}{m}$ -tine súčtu súradníc dotykového bodu !

Príklad 25. Nájdite krivku AM , aby sa x -ová súradnica ťažiska plochy $OAMP$ rovnala $\frac{3}{4}$ x -ovej súradnice bodu M !

Príklad 26. Nájdite krivky, pre ktoré v každom bode subnormála je aritmetickým priemerom štvorcov súradníc tohto bodu !

Príklad 27. Nájdite krivky, pre ktoré úsek na osi O_y , vytatý dotyčnicou, rovná sa štvorcu y -ovej súradnice dotykového bodu !

Príklad 28. *Nájdite niekoľko Picardových aproximácií riešenia diferenciálnej rovnice $y' = t^2 - y^2$ spĺňajúcej začiatočnú podmienku $y(1) = 2$.*

Domáca úloha:

úlohy 1 - 6 z témy Diferenciálne rovnice v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 2 (okrem Bernoulliho diferenciálnych rovníc) a úlohy v tejto sérii