Séria úloh 11

Diferenciálny počet funkcie viacerých premenných – parciálne derivácie, diferencovateľnosť a totálny diferenciál, približný výpočet hodnôt, dotyková rovina ku grafu funkcie, parciálne derivácie zloženej funkcie, gradient, derivácia v smere.

29. 4. 2022

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

Príklad 1. *Vypočítajte parciálne derivácie prvého a druhého rádu nasledujúcich funkcií.*

a) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ b) $\phi(s,t) = t^s$ c) $g(x,y,z) = (3x+2z)^{yz}$

d) $\psi(u,v,w) = u\sin(v+w) + \mathrm{e}^{u+v+w}$

Príklad 2. *Nájdite parciálne derivácie funkcie f v bode A, ak*

a) $f(x,y) = \pi\frac{x^2y}{3}$ $A = (4,6)$ b) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $A = (1,1)$

c) $f(a,b) = \mathrm{e}^a \sin b$ $A = (1,2)$ d) $f(x,y) = 3x^2y + \mathrm{e}^{xy}$ $A = (3,2)$

e) $f(c,d) = \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{d}\right)$ $A = (0,1)$ f) $f(z,t) = \sqrt{2z^3 - 3t^3}$ $A = (3,2)$

Príklad 3. *Vypočítajte parciálne derivácie daných funkcií podľa jednotlivých premenných.*

a) $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + x^y$ b) $z = \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ c) $f(x,y,z,u) = xyz + yzu + xzu + xyu$

d) $z = x^2y + \frac{y^3}{x^4}$ e) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ f) $z = y\sin x + \cos(x-y)$

g) $z = \frac{\operatorname{cotg} x^2y}{x+y}$ h) $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$ i) $f(x,y,z) = (2xy^2 + z^3)^{11}$

j) $z = xye^{x+2y}$ k) $z = \ln\frac{x+y}{x-y}$ l) $z = \ln(x - \sqrt{x^2+y^2})$

m) $u = x^y$ n) $u = 2^{x^2(x+y+z)}$ o) $f(x,y) = 3x^3 + 5x^2y - 2y^3$

Príklad 4. *Vypočítajte*

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

pre $f(x,y) = \ln(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{xy})$ *a výsledok zjednodušte.*

Príklad 5. *Vypočítajte a upravte* $2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, *ak* $u = x\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}$.

Príklad 6. *Dokážte, že funkcia* $z = \ln(x^2 + y^2)$ *vyhovuje rovnici*

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Príklad 7. *Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu.*

a) $u = xyz$	b) $z = xy + \frac{y}{z}$	c) $u = xy + yz + zx$
d) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$	e) $k = 2^{xyz}$	f) $l = \mathrm{e}^{2y} \sin x$

Príklad 8. *Vypočítajte*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z},$$

ak $u = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-xz}$.

Príklad 9. *Z definície dokážte, že funkcia* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *je v bode* $A = [1, 2]$ *diferencovateľná a nájdite jej diferenciál.*

Príklad 10. *Zistite, či funcia* $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *je diferencovateľná v bode* $A = [0, 0]$.

Príklad 11. *Uvažujme funckiu* h *s predpisom*

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) *Zistite, či funkcia* h *je spojitá na celom priestore* $\mathbb{E}^2$.

b) *Zistite, či funkcia* h *je diferencovateľná na celom priestore* $\mathbb{E}^2$.

Príklad 12. *Uvažujme funckiu* ψ *s predpisom*

$$\psi(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\ \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zistite, či funkcia ψ *je diferencovateľná v bode* $[0, 0]$.

Príklad 13. *Pomocou diferenciálu nájdite približnú hodnotu čísla* $(1,94)^2 \cdot \mathrm{e}^{0,12}$.

Príklad 14. *Nájdite rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie* φ *v bode* T, *kde* $\varphi(s,t) = 1 - s^2 - 2t^2$, $T = [1, 1, ?]$.

Príklad 15. *Dokážte, že funkcia* $z = xy + y \cdot g(\frac{x}{y})$, *kde funkcia* g *je diferencovateľná na celom priestore* $\mathbb{E}^1$, *vyhovuje rovnici*

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Príklad 16. *Približne vypočítajte.*

a) $\sqrt{3,03^2 + 9,01^2}$ b) $4,004 \cdot 2,002^2 \cdot 3,003^3$ c) $1,04^{3,01}$

d) $\ln\left(\sqrt{0,96} + \sqrt{1,02} + 2\right)$ e) $\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95}$ f) $\arcsin \frac{0,48}{1,05}$

g) $\ln\left(0,97^2 + 0,05^2\right)$ h) $e^{0,05^3 - 0,02}$ i) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^2}$

Príklad 17. *Pomocou vzorcov pre deriváciu zloženej funkcie nájdite derivácie nasledujúcich funkcií.*

a) $z = \frac{u^2}{v}$, $u = x - 2y$, $v = 2x + y$ b) $z = \mathrm{e}^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^3$

c) $(x^2 + x)\ \operatorname{arctg}\ (x^2 + y^2)$

Príklad 18. *Nech funkcia* f *je diferencovateľná na celom priestore* $\mathbb{E}^3$ *a nech* $x = \rho \sin u \cos v$, $y = \rho \cos u \cos v$, $z = \rho \sin v$. *Vypočítajte*

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \ \frac{\partial F}{\partial v}, \ \frac{\partial F}{\partial \rho},$$

ak $F(\rho, u, v) = f(\rho \sin u \cos v, \rho \cos u \cos v, z = \rho \sin v)$.

Príklad 19. *Ukážte, že* $z^{(5)}_{xxxyy} = z^{(5)}_{yyxxx}$, *ak* $z = 3x^3y^3$.

Príklad 20. *Vypočítajte* $z^{(5)}_{xxyxy}$ *a* $z^{(7)}_{yxxxyxx}$ *pre* $z = 6x^3y^2 + 2xy^2 - 7x$.

Príklad 21. *Nájdite* $\mathbf{d}f(A, X)$ *a* $\mathbf{d}^2 f(A, X)$, *ak* $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$ *a* $A = [0, 0]$.

Príklad 22. *Nájdite* $\mathbf{d}^2 f(A, X)$, *ak* $f(x, y) = \frac{x}{y}$ *a* $A = [1, 1]$.

Príklad 23. *Nájdite* $\mathbf{d}^3 f(A, X)$, *ak* $f(x, y) = x^4y^2 + 3xy^3 + 2x^3 + 3y^2$ *a* $A = [1, 2]$.

Príklad 24. *Nájdite* $\mathbf{d}^3 f(X, h)$, *ak* $f(x, y) = x^4y^2 + 3xy^3 + 2x^3 + 3y^2$.

Príklad 25. *Nájdite deriváciu funkcie* $f(x, y, z) = x^2 - 2xzy + 3z^2$ *v bode* $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$ *v smere jednotkového vektora* $\vec{\mathbf{i}}$ *určeného vektorom* $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, *kde* $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$. *Určte gradient* f *v bode* $\mathbf{a}$.

Príklad 26. *Nájdite deriváciu funkcie* $f(s, t) = 5s^2 - 6st + 10t^3 - 7$ *v bode* $\mathbf{d} = (0, 1)$ *v smere jednotkového vektora* $\vec{\mathbf{i}} = (-1, 0)$. *Určte gradient* f *v bode* $\mathbf{d}$.

Príklad 27. *Nájdite gradient skalárneho poľa* $f(u, v) = u^3 + v^3 - 3uv$ *a určte smer a hodnotu najväčšej derivácie tejto funkcie (tohto skalárneho poľa) v bode* $\mathbf{c} = (2, 1)$.

Príklad 28. *Nájdite deriváciu funkcie* $f(s, t) = 3s^2 - 6st + t^2$ *v bode* $\mathbf{d} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ *v smere ľubovoľného jednotkového vektora* $\vec{\mathbf{i}}$. *V akom smere je táto derivácia najväčšia?*

Domáca úloha:

úlohy 25 - 51 z témy Diferenciálny počet funkcie viac premenných v mini-zbierke príkladov k cvičeniam 2 a úlohy v tejto sérii