Prednáška 1

Číselné postupnosti

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Mgr. Jozef Kiseľák, PhD. a RNDr. Jaroslav Šupina, PhD.

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných

7. marca 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Agenda

1. Opakovanie ?
2. Základné pojmy
3. Ohraničenosť postupnosti
4. Vlastná limita postupnosti
5. Nevlastná limita postupnosti
6. Monotónne postupnosti
7. Vybrané postupnosti
8. Fundamentálna postupnosť
9. Bachmannova-Landauova notácia

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Množiny

Pod množinou si môžeme predstaviť súbor objektov (prvkov).

- množina je určená iba svojimi prvkami
- $a \in M$ ... a je prvkom množiny M; a je z M
- $a \notin M$ ... a nie je prvkom množiny M; a nie je z M
- $\emptyset$ ... prázdna množina, neobsahuje žiaden prvok

$\emptyset$, $\{2\}$, $\{0, 2, \pi\}$, $(2, 3)$, $[-4, 4]$, $(5, \infty)$, $(-\infty, 6)$, $[-200, \infty)$, $(-\infty, 100]$

$$\subseteq : \quad A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\{x;\ \mathcal{V}(x)\} \qquad \{x \in A;\ \mathcal{V}(x)\}$$

$\{x;\ \cos x = 0\}$,
$\{x;\ x^2 - 5x + 1 < 0\}$, $\quad \{x;\ \log_5(x-1) + 2\ln(x^2-1) \geq x + 6\}$

Číselné postupnosti
Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Množiny

$$\setminus \; : \quad A \setminus B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$$

$\{4, 5, 6, -2, -8, 100\} \setminus \{5, 6, -2, -8\}$, $\mathbb{N} \setminus \{n;\ (\exists k \in \mathbb{N})\ n = 2k\}$

$$\cup \; : \quad A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$$

$(-\infty, 5) \cup [10, 15)$,
$\{n;\ (\exists k \in \mathbb{N})\ n = 3k\} \cup \{m;\ (\exists l \in \mathbb{N})\ m = 3l + 1\}$

$$\cap \; : \quad A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$$

$[\pi, 100) \cap (3, 4]$, $\{n;\ (\exists k \in \mathbb{N})\ n = 3k\} \cap \{m;\ (\exists l \in \mathbb{N})\ m = 2l\}$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Množiny

$$\times \ : \quad A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}$$

$\{5, -2, -8, 100\} \times \{-2, -8\} =$

$\{(5, -2), (-2, -2), (-8, -2), (100, -2), (5, -8), (-2, -8), (-8, -8), (100, -8)\}$

$A \times A = A^2, \quad A \times \cdots \times A = A^n \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$

$$\mathcal{P}(A) \ : \quad \text{systém všetkých podmnožín množiny } A$$

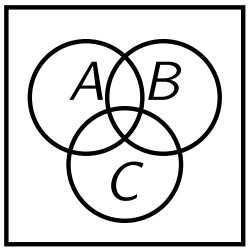
$\mathcal{P}(\{2, 3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \equiv x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

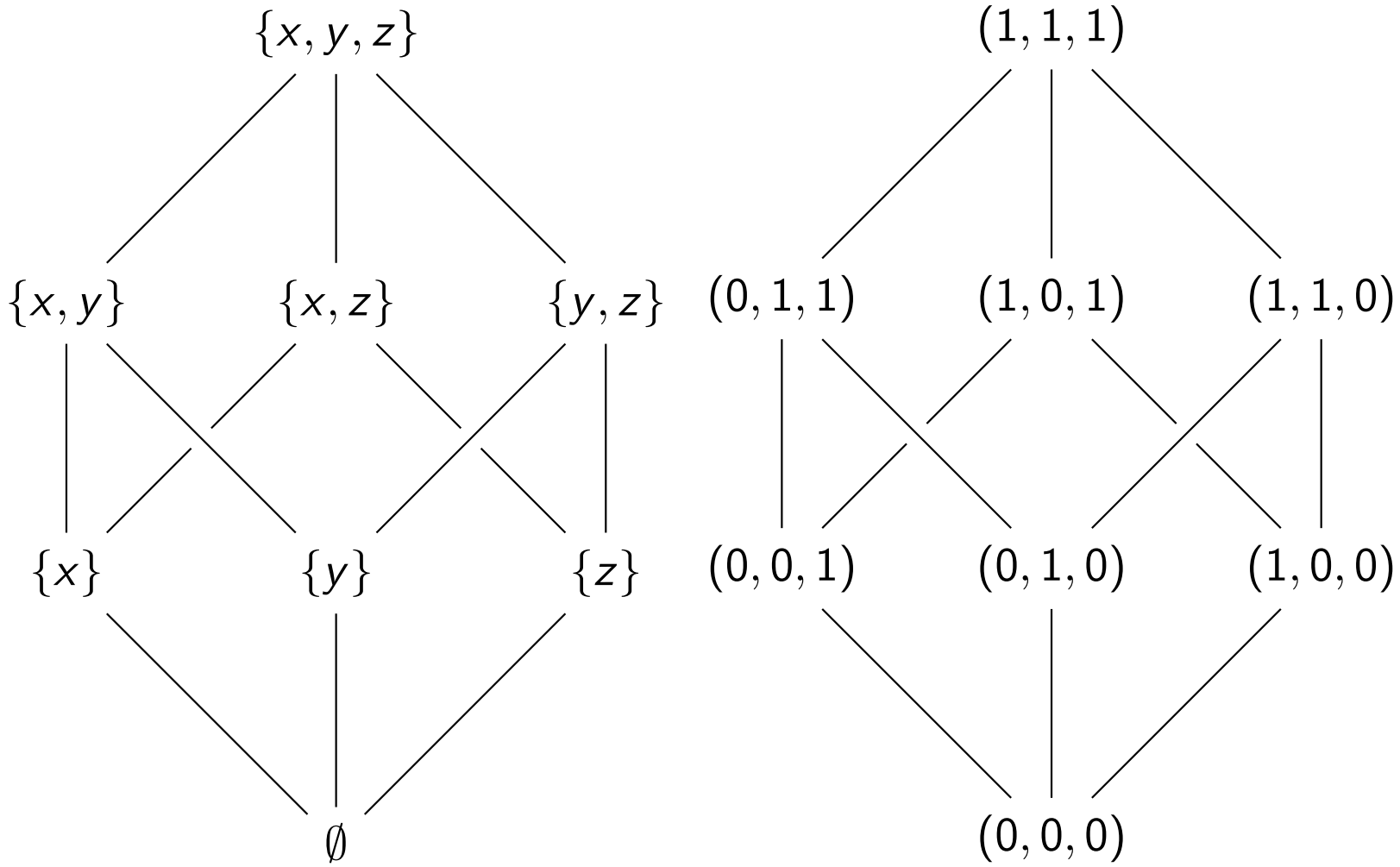
Úloha 1.1

Nech $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. *Zakreslite* $A \triangle B \triangle C$ *pre*



Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

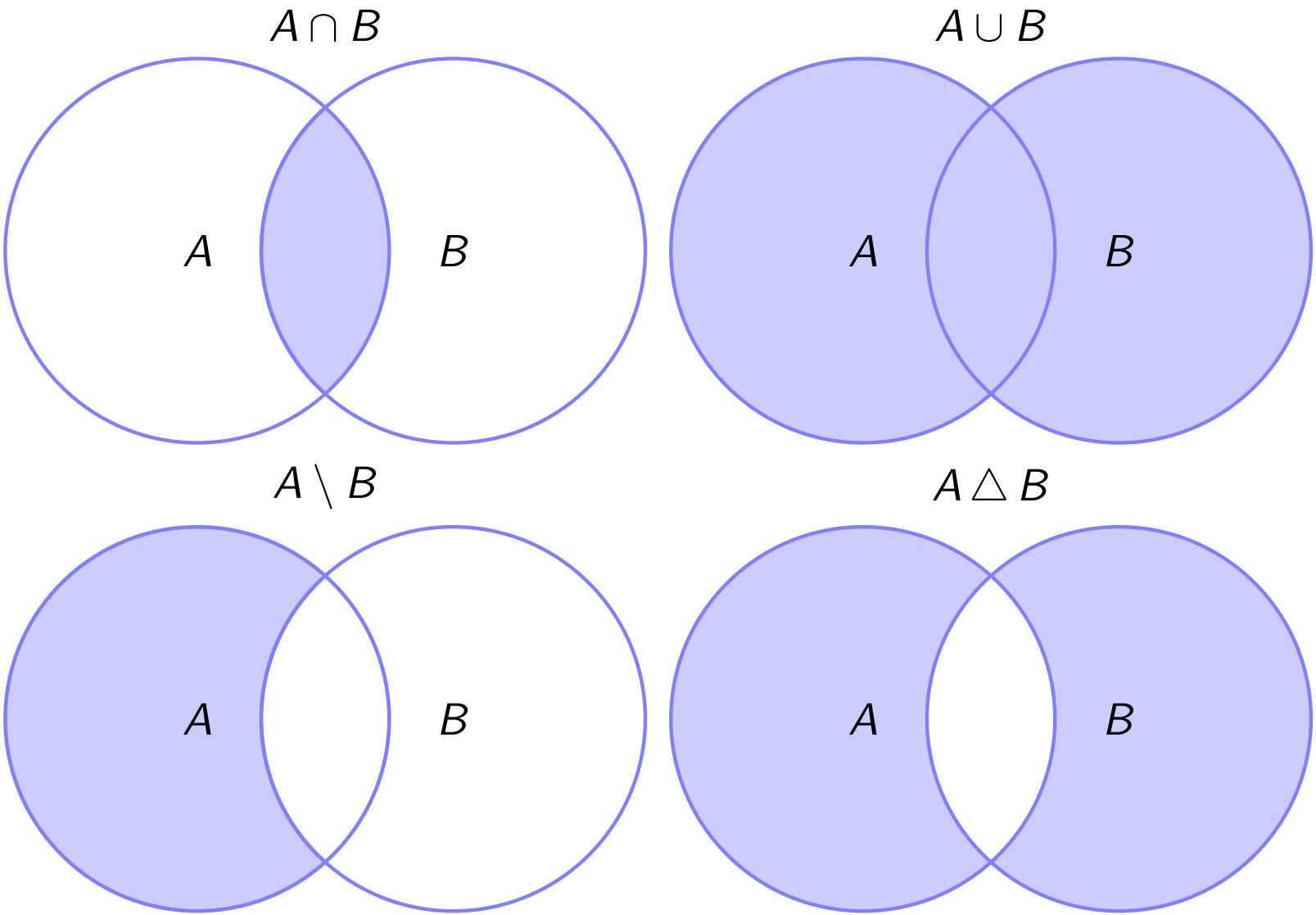
Množiny



Obr.: Hasseho diagram pre $\mathcal{P}(\{x, y, z\})$ (v zmysle inklúzie) a binárna reprezentácia.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Množiny



Obr.: Vennove diagramy

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Množina reálnych čísel

Množinou reálnych čísel rozumieme pole $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (množina s dvoma operáciami, ktoré sú **asociatívne, komutatívne**, majú **nulový**, resp. **jednotkový** prvok, obe majú **opačný** prvok a platí **distributívnosť**), ktoré je **lineárne usporiadaná** množina (**reflexívnosť, antisymetria, tranzitívnosť, totalita**), pričom obe operácie zachovávajú usporiadanie a to je **úplné** (každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina má najmenšie horné ohraničenie - Bolzanov princíp).

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z);\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Ešte sa používa tzv. kompaktifikácia $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Ohraničenosť množiny

Neprázdnu množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ nazývame ohraničenou zhora (zdola), ak existuje $K \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{R}$) také, že pre každé $x \in M$ platí $x \leq K$ ($x \geq k$).

Každé číslo $K(k)$ s touto vlastnosťou nazývame horným (dolným) ohraničením množiny M.

Definíciu pomocou kvantifikátorov zapíšeme nasledovne:

ohraničená zhora $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \leq K$

ohraničená zdola $(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \geq k$

Neprázdnu množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ nazývame ohraničenou, ak je ohraničená zhora aj zdola.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Maximum a minimum množiny

Nech množina $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $d \in M$ ($c \in M$) nazývame maximum (minimum) množiny M, ak pre každé $x \in M$ platí $x \leq d$ ($x \geq c$).

Najväčší (najmenší) prvok množiny M označujeme $d = \max M$ ($c = \min M$).

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Zobrazenie - funkcia

Nech sú dané dve neprázdne množiny X, Y.

Ak ku každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$ hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f z množiny X do množiny Y, čo zapisujeme $f : y = f(x), x \in X$.

$f : X \to Y$ (f označuje zobrazenie z množiny X do množiny Y)

Ak $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, tak zobrazenie f nazývame reálnou funkciou reálnej premennej. Stručne budeme hovoriť len funkcia.

Množinu X nazývame definičným oborom zobrazenia (funkcie) f a označujeme ho $D(f)$. Prvky množiny X nazývame argumentami, vzormi alebo nezávislými premennými.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Monotónne funkcie

Funkciu f nazývame neklesajúcou (nerastúcou) na množine $A \subseteq D(f)$, ak pre ľubovoľné dva body x_1, $x_2 \in A$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Funkciu f nazývame rastúcou (klesajúcou) na množine $A \subseteq D(f)$, ak pre ľubovoľné dva body x_1, $x_2 \in A$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Funkciu f nazývame rýdzomonotónnou na množine $A \subseteq D(f)$, ak je rastúcou alebo klesajúcou na A.

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Absolútna hodnota

Definícia 1.1

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum z čísel $x, -x$.

Označenie

$|x|$, t.j. $|x| = \max\{x, -x\}$

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Geometrická interpretácia

- $|x|$ sa rozumie ako vzdialenosť obrazu čísla x od obrazu čísla 0 na reálnej osi
- pod $|x - y|$ pre $x, y \in \mathbb{R}$ sa rozumie vzdialenosť obrazov čísel x a y na reálnej osi

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vlastnosti absolútnej hodnoty, $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

a) $|a| = |-a|$

b) $|a| \geq 0$

c) $-|a| \leq a \leq |a|$

d) $|ab| = |a||b|$

e) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

f) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

g) $|a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon$

h) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(Δ nerovnosť)

Veta 1.1

Nech $x, x_0 \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom

1. $|x - x_0| < \varepsilon$ *práve vtedy, keď* $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$,
2. $|x - x_0| \leq \varepsilon$ *práve vtedy, keď* $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$,
3. $|x - x_0| > \varepsilon$ *práve vtedy, keď* $x < x_0 - \varepsilon$ *alebo* $x_0 + \varepsilon < x$,
4. $|x - x_0| \geq \varepsilon$ *práve vtedy, keď* $x \leq x_0 - \varepsilon$ *alebo* $x_0 + \varepsilon \leq x$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Znamienko čísla

Definícia 1.2

Signum čísla $x \in \mathbb{R}$ *nazývame číslo* $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

Vlastnosti $a, b \in \mathbb{R}$

a) $a = |a| \cdot \operatorname{sgn} a$

b) $|a| = a \cdot \operatorname{sgn} a$

c) $\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b$

d) $\operatorname{sgn}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\operatorname{sgn} a}{\operatorname{sgn} b}, \; b \neq 0$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vzťahy

- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ \ \mathrm{e}^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2} = \mathrm{e}^{x_1+x_2}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \mathrm{e}^{x} > 0$
- $(\forall x \in \langle 0, \infty))\ \ \mathrm{e}^{x} \geq 1 + x$
- $(\forall x \in \langle 0, 1))\ \ \mathrm{e}^{x} \leq \dfrac{1}{1-x}$
- $(\forall x \in (-1, 1))\ \ 1 + x \leq \mathrm{e}^{x} \leq \dfrac{1}{1-x}$

- $(\forall x \in (0, \infty))\ \ \mathrm{e}^{\ln x} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ \ln \mathrm{e}^{x} = x$
- $(\forall x_1, x_2 \in (0, \infty))\ \ \ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$
- $(\forall x_1, x_2 \in (0, \infty))\ \ \ln \dfrac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$
- $(\forall x_1 \in (0, \infty))\ (\forall r \in \mathbb{R})\ \ \ln x_1^r = r \ln x_1$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vzťahy

- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ (\forall a \in (0,\infty))\quad a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$
- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ (\forall a \in (0,\infty))\ \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$
- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ (\forall a \in (0,\infty))\ (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall a, b \in (0,\infty))\ a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x.$

- $(\forall x \in (0,\infty))\ a^{\log_a x} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \log_a a^x = x$
- $(\forall x_1, x_2 \in (0,\infty))\ \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $(\forall x_1, x_2 \in (0,\infty))\ \log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $(\forall x \in (0,\infty)),\ (\forall y \in \mathbb{R})\ \log_a x^y = y \log_a x$
- $(\forall x \in (0,\infty))\ \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vzťahy

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x - y}{2} \sin \frac{x + y}{2}$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

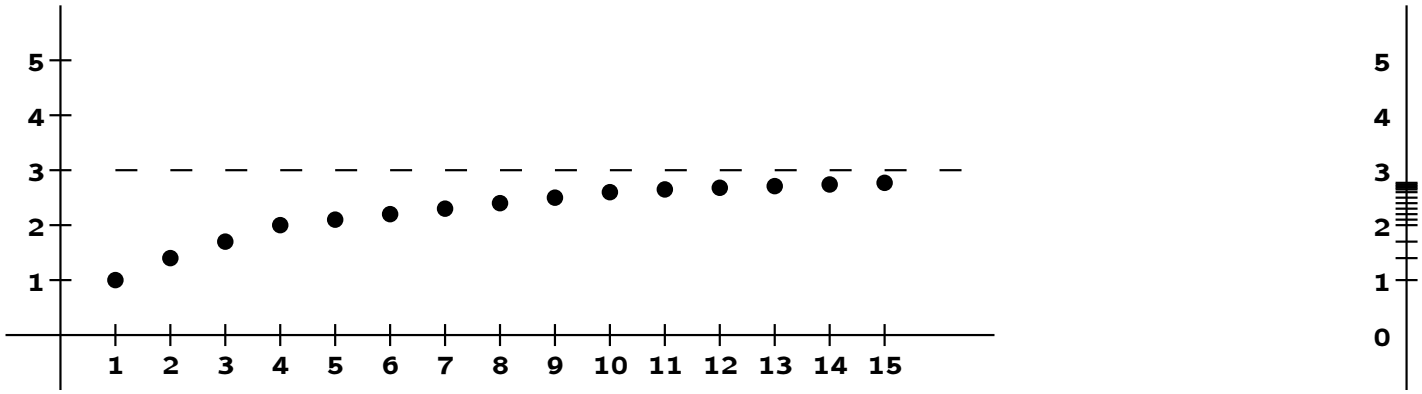
Základné pojmy

Čo je to postupnosť?

Definícia 2.1

Nech každému prirodzenému číslu n je priradené nejaké reálne číslo a_n (skrátene $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Potom hovoríme, že je daná postupnosť čísel (alebo postupnosť)

Stačí vlastne hovoriť o množine :
$\mathcal{H}(a) := \{y \in \mathbb{R} : \ (\exists n \in \mathbb{N})\ a(n) = y\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$



– postupnosť čísel budeme označovať $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (iné ozn. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$)
– a_n nazývame n-tý člen postupnosti
– n nazývame index člena a_n

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Základné pojmy

Postupnosť môže byť daná rôznymi spôsobmi:

a) Pomocou formuly (predpisu), ktorá dovoľuje vypočítať ľubovoľný člen postupnosti podľa jeho indexu. Hovoríme, že postupnosť je daná v explicitnom tvare, pomocou všeobecného člena.
   – napr. $a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \quad \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) Pomocou popisu, opísaním jej členov.
   – napr. a_n je v poradí n-té prvočíslo
   $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ \ldots$

c) Pomocou rekurentného vzťahu (rekurentne daná postupnosť), ktorý dovoľuje vypočítať člen postupnosti pomocou známych predchádzajúcich členov.
   – napr. Fibonacciho postupnosť
   $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Základné pojmy

Operácie s postupnosťami

Nech sú dané dve postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ich súčtom, rozdielom, súčinom, podielom nazývame postupne tieto postupnosti:

$$\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty},\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

pričom pri definícii podielu predpokladáme, že $b_n \neq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Hovoríme, že postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovnajú, ak $a_n = b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Každá postupnosť určuje množinu reálnych čísel, ktorú tvoria reálne čísla vystupujúce ako členy tejto postupnosti. Túto množinu nazývame množinou členov postupnosti, označujeme ju $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.
– množina členov postupnosti je to vlastne množina
$\{x \in \mathbb{R} :$ ex. $n \in \mathbb{N}$ také, že $x = a_n\}$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Motivácia k ďalším pojmom

– napr. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ a množina členov tejto postupnosti je $\{-1, 1\}$
– dve rôzne postupnosti môžu mať tú istú množinu členov

Motivácia k ďalším pojmom

Zložené úrokovanie s n-konverziami:

$$a_k^n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{kn}$$

je hodnota vkladu po k rokoch, pričom a_0 je počiatočný vklad, p je ročná úroková sadzba (p.a.), k je počet rokov a n je počet konverzií.

Pozrime sa ako sa vyvíja hodnota vkladu $a_0 = 1000000$ pri úrokovej sadzbe $p = 10\%$ po 20 rokoch (k=20) vzhľadom na počet konverzií. Teda máme postupnosť:

$$a_k^n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{kn}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Motivácia k ďalším pojmom

- $n = 1, \quad a_{20}^{1} = 6727499$
- $n = 2, \quad a_{20}^{2} = 7039988$
- $n = 4, \quad a_{20}^{4} = 7209567$
- $n = 12, \quad a_{20}^{12} = 7328073$
- $n = 365, \quad a_{20}^{365} = 7387032$

So zvyšovaním počtu konverzií sa zdá, že sa vklad výhodnejšie zúročuje. Otázka: Bude sa pri ďalšom zvyšovaní počtu konverzií hodnota vkladu naďalej neobmedzene zvyšovať alebo sa bude "blížiť" ku nejakej hodnote, ktorú nikdy nepresiahne?
Ustáli sa! $\leftrightarrow$ limita postupnosti, ohraničenosť postupnosti

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Ohraničenosť postupnosti

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Definícia 3.1

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame ohraničenou zhora (zdola), ak je ohraničená zhora (zdola) množina členov tejto postupnosti. Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zhora aj zdola nazývame ju ohraničenou.

Z tejto definície a definícií o ohraničenosti množín reálnych čísel máme nasledujúcu vetu:

Veta 3.1

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora (zdola) práve vtedy, ak existuje číslo c_2 (existuje číslo c_1) také, že pre všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n \leq c_2$ ($a_n \geq c_1$).

A taktiež platí:

Veta 3.2

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená práve vtedy, ak existuje číslo $c > 0$ také, že pre všetky členy postupnosti platí $|a_n| \leq c$.

Limita postupnosti

Intuícia – členy postupnosti sa "blížia" ku nejakému číslu, ktoré je limitou tejto postupnosti.
Napr. uvažujme postupnosť

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{101}{100}, \ldots\right\},$$

"členy sa blížia ku 1", číslo 1 je limitou tejto postupnosti.

Upresníme, čo znamená "členy sa blížia" k číslu 1. v postupnosti nájsť člen, počnúc ktorým sa všetky ďalšie členy líšia od 1 o menej ako ε, t.j. vieme nájsť $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že všetky členy postupnosti, ktorých index je väčší ako n_0 spĺňajú nerovnosť $|a_n - 1| < \varepsilon$. Ak to dokážeme urobiť pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, tak číslo 1 je limitou danej postupnosti. Hodnota čísla n_0 závisí od hodnoty čísla ε.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Limita postupnosti

Definícia 4.1

Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazývame limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ platí nerovnosť $|a_n - a| < \varepsilon$.

– ak číslo a je limitou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zapisujeme to $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ alebo $a_n \to a$ pre $n \to \infty$

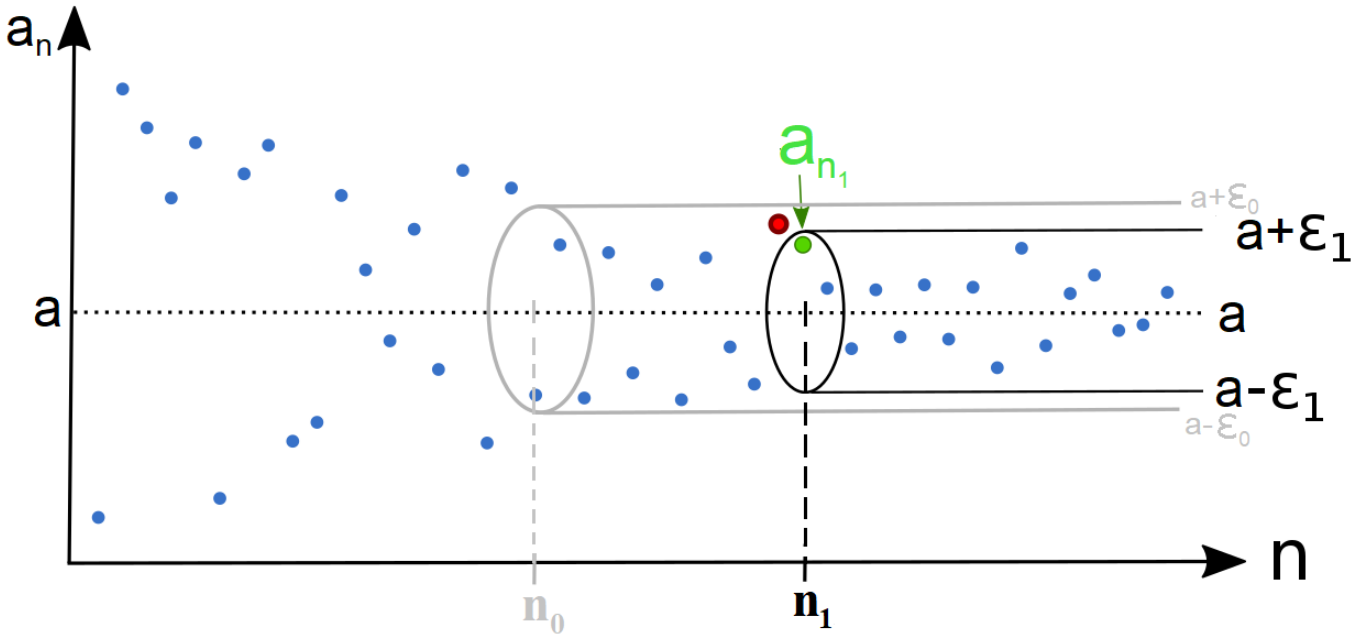
Pomocou kvantifikátorov môžeme túto definíciu zapísať takto:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Postupnosť, ktorá má limitu, nazývame konvergentnou. Postupnosť, ktorá nie je konvergentná, nazývame divergentnou. Je to taká postupnosť, pre ktorú žiadne reálne číslo nie je jej limitou.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Limita postupnosti



2 rôzne n pre 2 rôzne hodnoty ε.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Limita postupnosti

Koľko čísel môže byť limitou postupnosti? Odpoveď dáva nasledujúca veta.

Veta 4.1

Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.

Veta 4.2

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu práve vtedy, ak postupnosť* $\{a_{k+p}\}_{p=1}^{\infty}$, *kde* k *je ľubovoľné prirodzené číslo, má limitu a obidve limity sú rovnaké.*

Táto veta hovorí, že konvergencia, divergencia postupnosti sa nezmení, ak pridáme, vynecháme alebo zmeníme konečný počet členov postupnosti.

Tvrdenie 4.1

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0.$$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vzťah konvergentnej a ohraničenej postupnosti

Aký je vzťah konvergentnej a ohraničenej postupnosti?

Ak je postupnosť ohraničená, potom je konvergentná. Neplatí!
– napr. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je ohraničená, ale nie je konvergentná!

Avšak platí nasledujúce:

Veta 4.3

Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, potom je ohraničená.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Operácie s konvergentnými postupnosťami

Algebraické operácie

Veta 4.4

Nech postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sú konvergentné a* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Potom konvergujú postupnosti* $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak* $b \neq 0$ *aj postupnosť* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje, pričom platí*

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Operácie s konvergentnými postupnosťami

Dôsledkom predchádzajúcej vety je nasledujúce:

Dôsledok 4.1

a) *Ak* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $c \in \mathbb{R}$, *potom* $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$.

b) *Ak* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *potom* $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.

c) *Ak* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $k \in \mathbb{N}$, *potom* $\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Limita postupnosti a skladanie

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Veta 4.5 (Heineho)

Majme funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in D(f)$. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

a) *f je spojitá v bode a*

b) *Pre každú postupnosť reálnych čísel* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *takú, že* $H(a) \subseteq D(f)$ *máme:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

Taktiež teda platí:

Dôsledok 4.2

Nech $a \geq 0$ *a pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $a_n \geq 0$ *a* $k,\ p \in \mathbb{R}^+$. *Potom platí*

a) *ak* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *potom* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$,

b) *ak* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *potom* $\lim_{n\to\infty} p^{a_n} = p^a$.

– špeciálne ak $k \in \mathbb{N}$ potom pre ľubovoľnú k-tu odmocninu vieme "vchádzať" pod odmocniny

Operácie s konvergentnými postupnosťami

V špeciálnom prípade pre limitu súčinu platí:

Veta 4.6 ("0×ohr.")

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a postupnosť* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená. Potom* $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Dôsledok 4.3 (Heineho vety)

Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *potom* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

– táto veta sa nedá obrátiť! Lebo, napr. pre $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ vieme, že $|a_n| \to 1$ pre $n \to \infty$, ale $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je konvergentná. Avšak v špeciálnom prípade ($a = 0$) sa to dá:

Veta 4.7

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Operácie s konvergentnými postupnosťami

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Operácie spojené s nerovnosťami

Veta 4.8 (O policajtoch (o zovretí))

Nech pre postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí:*

a) *existuje* $n_1 \in \mathbb{N}$ *také, že pre všetky* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ *je* $a_n \leq c_n \leq b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a.$

Potom postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná a* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a.$

Príklad 4.1

Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$, $x > 0$.

Operácie s konvergentnými postupnosťami

Veta 4.9

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *pričom* $a < b$. *Potom existuje číslo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že pre všetky* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ *platí* $a_n < b_n$.

– "vzťah medzi limitami postupností → vzťah medzi ich členmi"

Veta 4.10

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *a existuje číslo* $n_1 \in \mathbb{N}$ *také, že pre všetky* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ *platí* $a_n \leq b_n$. *Potom* $a \leq b$.

– "vzťah medzi členmi postupností → vzťah medzi ich limitami"
– predchádzajúca veta hovorí, že limitný prechod zachováva neostrú nerovnosť, ostrá nerovnosť sa limitným prechodom NEMUSÍ zachovávať. Napr. nech $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, potom $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\frac{2}{n} > \frac{1}{n}$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Nevlastná limita postupnosti

Vieme, že postupnosť, ktorá nemá limitu je divergentná. Postupnosti $a_n = n^2$, $b_n = -\sqrt{n}$, $c_n = (-1)^n \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$ sú divergentné, lebo nie sú ohraničené. Niektoré z divergentných postupností však majú vlastnosť, že s rastúcim indexom n členy postupnosti neohraničene rastú, resp. klesajú. Členy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa so zväčšujúcim indexom n približujú k nevlastnému číslu $+\infty$ a členy $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ku nevlastnému číslu $-\infty$. Postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ má úplne iný "príbeh" (nemá ani nevlastnú limitu).

Dostali sme sa ku pojmu nevlastná limita postupnosti.

Definícia 5.1

Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastnú limitu $+\infty$, ak pre každé reálne číslo A existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $a_n > A$ (označujeme to $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$).

Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastnú limitu $-\infty$, ak pre každé reálne číslo B existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $a_n < B$ (označujeme to $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.)

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Nevlastná limita postupnosti

Pomocou kvantifikátorov môžeme túto definíciu zapísať nasledovne:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall A \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n > A)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall B \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n < B)$$

Teraz uvedieme niekoľko viet o nevlastných limitách, ktoré budú užitočné pri počítaní limít.

Veta 5.1

Nech $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Veta 5.2

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *a existuje číslo* $n_1 \in \mathbb{N}$ *také, že pre všetky* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ *platí* $a_n \leq b_n$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Nevlastná limita postupnosti

Príklad 5.1

Dokážte, že

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & -1 < a < 1. \end{cases}$$

Pre $a \leq -1$ doplníme neskôr.

Ďalšie vety o nevlastných limitách.

Veta 5.3

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola (zhora) ohraničená. Potom $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$ ($\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$).

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Nevlastná limita postupnosti

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Veta 5.4

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) *a existujú čísla* $n_1 \in \mathbb{N}$, $K > 0$ *také, že pre všetky* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ *platí* $b_n \geq K > 0$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$ ($\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$).

– postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená kladnou konštantou počnúc nejakým členom

Veta 5.5

Majme funkciu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *postupnosť* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

a) *Ak* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = L \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, *tak* $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$.

b) *Ak* $\lim_{t\to-\infty} f(t) = L \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, *tak* $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$.

Nevlastná limita postupnosti

Poznámky:

- Pozor na prácu s divergentnými postupnosťami!
- Neurčité výrazy (nevieme čomu sa to rovná):

$$\infty - \infty \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \cdot \pm\infty \qquad 0^0 \qquad 1^{\pm\infty}$$

- Veta o jednoznačnosti limity ostáva v platnosti aj pre nevlastné limity.
- Pod slovom "limita" budeme vždy rozumieť reálne (vlastné) číslo. Tejto limite sa hovorí vlastná limita. Zvlášť zdôraznime, keď pripustíme aj nevlastnú limitu.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Limita postupnosti

- Pre ľub. postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ môžu nastať len tieto prípady:
  - ex. vlastná limita, t.j. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$; napr. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$; konvergentná postupnosť
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$; napr. $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$; divergentná postupnosť
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$; napr. $a_n = -\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$; divergentná postupnosť
  - neex. ani vlastná ani nevlastná limita, napr. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$; divergentná postupnosť

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Supremum a infimum

Nech $(S, \preceq)$ je **čiastočne usporiadaná množina** (relfexívnosť, antisymetria, tranzitívnosť), teda $\preceq$ je relácia na S a spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $(\forall x \in S)\ x \preceq x$;
2. $(\forall x, y \in S)\ (x \preceq y\ \wedge\ y \preceq x) \quad \Rightarrow \quad x = y$;
3. $(\forall x, y, z \in S)\ ((x \preceq y\ \wedge\ y \preceq z) \rightarrow x \preceq z)$.

Majme neprázdnu množinu $M \subseteq S$.
Prvok $H \in S$ ($h \in S$) nazveme horným (dolným) ohraničením množiny M, ak platí $\forall\ x \in M\ x \preceq H$ ($h \preceq x$). Označme U_M (L_M) množinu všetkých horných (dolných) ohraničení množiny M (zrejme $U_\emptyset = S$).

Definícia 6.1

Povieme, že množina $M \subseteq S$ je zhora (zdola) ohraničená, ak $U_M \neq \emptyset$ ($L_M \neq \emptyset$).

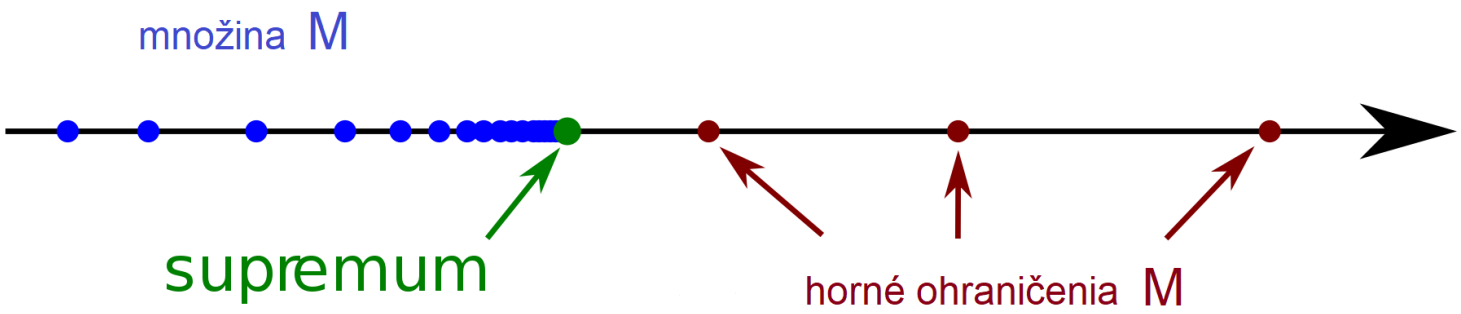
Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Supremum a infimum

Zrejme ak $H, \tilde{H} \in U_M \cap M$, tak $H = \tilde{H}$. Teda množina $U_M \cap M$ je buď prázdna, alebo jednoprvková.

Definícia 6.2

Maximum (minimum) množiny $M \subseteq S$ je prvok $\max M$ $(\min M)$ *množiny $U_M \cap M$ $(L_M \cap M)$, ak je neprázdna. Supremum (infimum) množiny $M \subseteq S$ je definovaný ako* $\min U_M$ $(\max L_M)$, *ak taký prvok existuje a označujeme ho* $\sup M$ $(\inf M)$.



Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Supremum a infimum

Nutná podmienka na existenciu suprema (infima) je ohraničenosť zhora (zdola). Zrejme ak existuje $\max M$ rovná sa $\sup M$. Ak supremum (infimum) existuje a usporiadanie je úplné (napr. reálne čísla), potom je jediné.

Príklad 6.1

Nech $S = \mathbb{Q}$ *a* $M_n := \{x \in S : x^2 < n\},\ n \in \mathbb{N}$. *Potom* $\sup M_1 = 1,\ \inf M_1 = -1$, *ale* $\max M_1,\ \min M_1$ *neexistujú a taktiež* $\sup M_2$ *a* $\inf M_2$ *neexistujú.*

Zrejme ak $m := \inf M \in L_M \subseteq S$, potom spĺňa 2 podmienky

- $m \preceq x$ pre všetky $x \in M$ (je dolným ohraničením)
- ak $t \preceq s\ \forall s \in M$, potom $t \preceq m$ (je najväčším zo všetkých dolných ohraničení)

Úloha 6.1

Nájdite príklad čiastočne usporiadanej množiny, ktorá má viacero infím.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Infimum

Veta 6.1 (Charakterizácia infima v $\mathbb{R}$)

Ak existuje infimum množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, potom má tieto vlastnosti

- $m \leq x$ *pre všetky* $x \in M$
- $(\forall t \in \mathbb{R} : t > m)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < t$

Veta 6.2

Pre každú neprázdnu zdola ohraničenú podmnožina reálnych čísel existuje (jediné) infimum.

Konkrétnejšie pre postupnosť a jej infimum platí: $a = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, ak

- $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a \leq a_n$
- $\forall \varepsilon > 0$ existuje člen a_{n_0} taký, že $a_{n_0} < a + \varepsilon$

Podobne pre supremum.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vlastnosť reálnych čísel

Veta 6.3 (Archimedov princíp)

$\mathbb{N}$ *je zhora neohraničená.*

Dôsledok 6.1 (Archimedova vlastnosť)

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Potom existuje prirodzené číslo* n *také, že*

$$n \cdot a > b.$$

Veta 6.4 (Hustota racionálnych čísel)

Pre každé dve reálne čísla $a < b$ *existuje racionálne číslo* r *také, že*

$$a < r < b.$$

Veta 6.5 (Hustota iracionálnych čísel)

Pre každé dve reálne čísla $a < b$ *existuje iracionálne číslo* r *také, že*

$$a < r < b.$$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Limes superior (inferior)

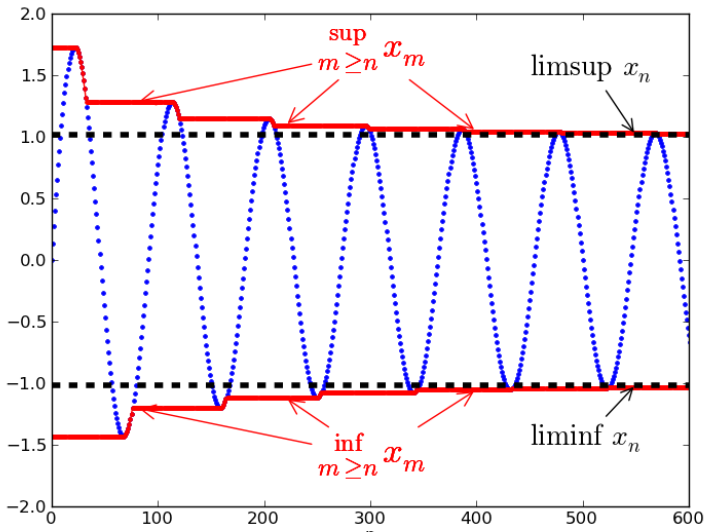
Ak je postupnosť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zhora (zdola) ohraničená, kladieme limes superior (limes inferior)

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} \sup S_k,\ S_k = \{x_n : n \geq k\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} \inf S_k,$$

ak limita existuje a ∞ $(-\infty)$ v opačnom prípade.

- Limes superior a limes inferior postupnosti vždy existujú.
- $\lim_{n\to\infty} x_n \ \exists \ \Leftrightarrow \ \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$



Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Monotónnosť postupnosti

Monotónne postupnosti tvoria špeciálnu triedu postupností. Budú nás zaujímať vlastnosti týchto postupností spojené s konvergenciou. Už vieme, že každá konvergentná postupnosť je ohraničená a taktiež, že obrátená veta k nej neplatí. Avšak, pre triedu monotónnych postupností to už bude platiť.

Definícia 6.3

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nazývame rastúcou (neklesajúcou), ak pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} \geq a_n)$.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nazývame klesajúcou (nerastúcou), ak pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} < a_n$ $(a_{n+1} \leq a_n)$.

– postupnosť nerastúcu alebo neklesajúcu nazývame monotónna postupnosť, postupnosť rastúcu alebo klesajúcu nazývame rýdzomonotónna postupnosť
– z definície je zrejmé, že každá rastúca (klesajúca) postupnosť je neklesajúca (nerastúca), ale nie naopak

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Monotónnosť postupnosti

– ak postupnosť nie je rastúca, neznamená to hneď, že musí byť nerastúca, napr. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ nie je ani rastúca, ani klesajúca, táto postupnosť nie je monotónna

Prv než uvedieme vety o limitách monotónnych postupností potrebujeme definovať pojem infimum a supremum postupnosti.

Definícia 6.4

Infimom (supremom) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nazývame infimum (supremum) množiny členov postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a označujeme ho* $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $(\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n)$.

Veta 6.6

Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je neklesajúca. Potom platí:*

a) *ak nie je zhora ohraničená, tak* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

b) *ak je zhora ohraničená, tak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Monotónna postupnosť

Analogicky sa dokáže nasledujúca veta:

Veta 6.7

Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca. Potom platí:*

a) *ak nie je zdola ohraničená, tak* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$,

b) *ak je zdola ohraničená, tak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Z predchádzajúcich dvoch viet a skutočnosti, že každá konvergentná postupnosť je ohraničená máme tvrdenie pre triedu monotónnych postupností.

Veta 6.8

Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónna. Potom* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená práve vtedy, keď je konvergentná.*

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Monotónna postupnosť

Poznámky:

- význam týchto viet je v tom, že pomôžu rozhodnúť o konvergencii (divergencii) danej postupnosti bez výpočtu jej limity
- vzhľadom na to, že konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii postupnosti, tieto vety ostávajú v platnosti aj pre postupností monotónne počnúc nejakým členom

Príklad 6.2

Vyšetrite konvergenciu postupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Daná postupnosť je konvergentná a položme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

e – Eulerovo číslo, e=2,718281..., je to iracionálne číslo

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Zložené úrokovanie verzus spojité úrokovanie

Spojité úrokovanie

Hodnoty vkladu po k rokoch pri zloženom úrokovaní s n konverziami vytvárajú postupnosť

$$a_k^n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{kn}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teraz, nech sa nám úročí vklad "každý okamih, t.j. $n \to \infty$". Dostávame tzv. spojité úrokovanie a hodnota vkladu po k rokoch bude

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^n = \lim_{n\to\infty} a_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{kn} = \cdots = a_0 \cdot e^{0.01pk}.$$

Pre náš príklad, $a_0 = 1000000$, $p = 10\%$, $k = 20$ je hodnota $a_{20} = 7389056$. Táto hodnota je väčšia ako akákoľvek hodnota pri zloženom úrokovaní.

Spojité úrokovanie je limitným prípadom zloženého úrokovania.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vybraná postupnosť

Vieme, že ak v postupnosti vynecháme (zmeníme) konečný počet jej členov nezmení sa jej konvergencia. Otázka: Čo sa stane s postupnosťou, ak v nej vynecháme nekonečný počet členov tak, aby ostal nekonečný počet členov tejto postupnosti? Aké bude mať vlastnosti takáto postupnosť?

Tento proces výberu si presne definujme.

Definícia 7.1

Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a rastúca postupnosť prirodzených čísel* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Postupnosť* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *budeme nazývať vybranou postupnosťou z postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *pomocou postupnosti* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vybraná postupnosť

Uvažujme postupnosť $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ je vybraná postupnosť z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pričom $n_k = 2k$, $k \in \mathbb{N}$; ide o postupnosť $a_{n_k} = \frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$
- $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{55}, \frac{1}{4}, \ldots$ je vybraná postupnosť? NIE JE, pretože vybraná postupnosť musí zachovávať následnosť členov pôvodnej postupnosti, lebo $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rastúca!

Vzťah medzi pôvodnou postupnosťou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a z nej vybranej postupnosti je nasledujúci:

Veta 7.1

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastnú alebo nevlastnú limitu, potom každá z nej vybraná postupnosť má tú istú limitu.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vybraná postupnosť

Príklad 7.1 (Doplnenie)

Dokážte, že

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & -1 < a < 1 \\ \textit{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Uvažujme opäť postupnosť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Táto postupnosť nie je konvergentná, avšak existujú vybrané postupnosti $a_{2k} = 1$, $a_{2k-1} = -1$, $k \in \mathbb{N}$, ktoré sú už konvergentné.
Otázka: Akú vlastnosť musí mať pôvodná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, aby sa z nej dala vybrať konvergentná postupnosť?
Musí byť

- konvergentná,
- ohraničená (napr. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je ohraničená).

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Vybraná postupnosť

Lema 7.1 (Cantorov princíp vložených intervalov)

Nech $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť neprázdnych uzavretých intervalov taká, že

a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_{n+1} \subseteq I_n$;

b) *dĺžka intervalov I_n konverguje k nule.*

Potom prienik $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ obsahuje práve jedno reálne číslo.

Platí veta:

Veta 7.2 (Bolzanova – Weierstrassova)

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, potom existuje z nej vybraná konvergentná postupnosť.

Pre neohraničené postupnosti vieme nasledujúce:

Veta 7.3

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená, potom existuje z nej vybraná postupnosť, ktorá má nevlastnú limitu.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Fundamentálna postupnosť

Definícia konvergentnej postupnosti je spojená s hodnotou limity tejto postupnosti, t.j. s číslom a. Čo ak číslo a nemáme? O konvergencii postupnosti možno rozhodnúť aj bez udania čísla a. Potrebujeme však pojem fundamentálna (Cauchyovska) postupnosť.

Definícia 8.1

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva fundamentálnou (alebo Cauchyovskou), ak vyhovuje podmienke: pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ a pre každé $m \in \mathbb{N}$, $m > n_0$ platí nerovnosť $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

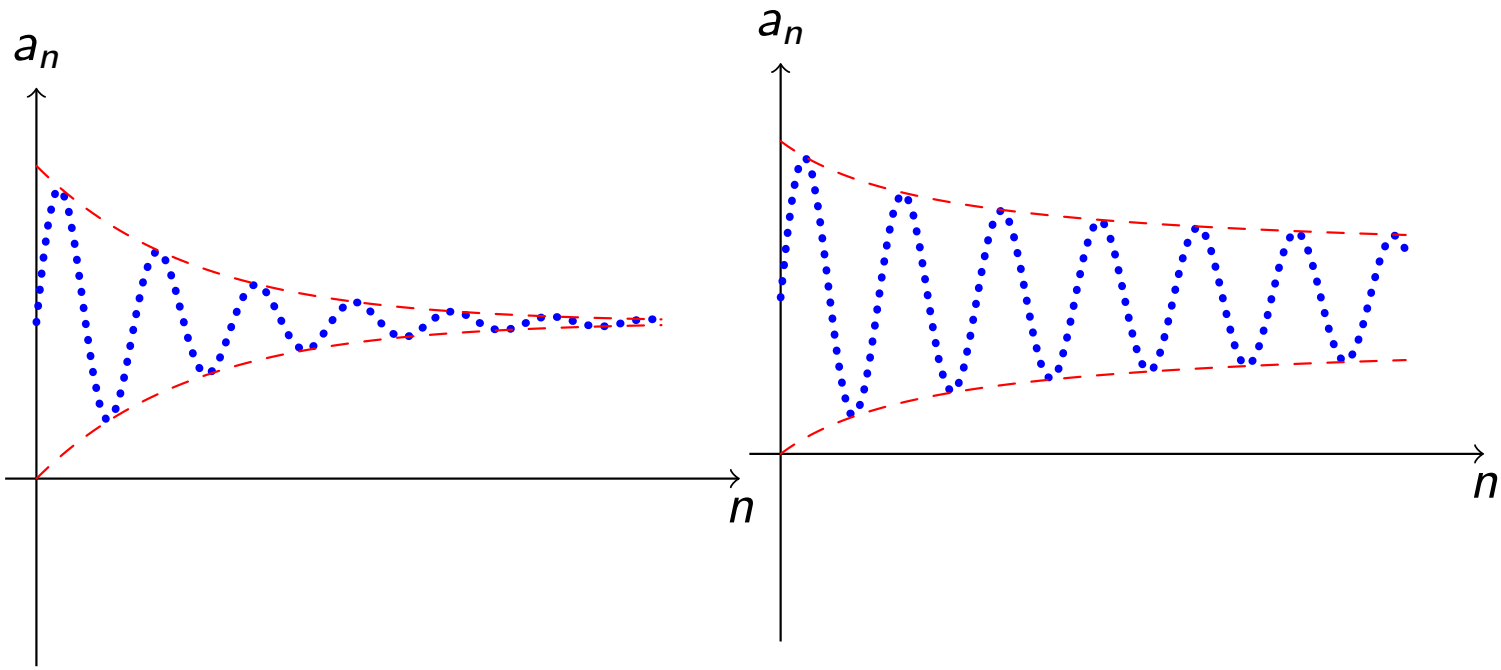
O konvergencii postupností vieme rozhodnúť aj na základe vety.

Veta 8.1 (Cauchyho – Bolzanovo kritérium konvergencie postupností)

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, keď je fundamentálna.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Fundamentálna postupnosť



(a) $\{1 + \sin(10n)\,\mathrm{e}^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left\{1 + \sin(10n)\,\dfrac{n+4}{4(n+1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Obr.: Fundamentálna a nefundamentálna postupnosť.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Bachmannova-Landauova notácia

Nech $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. V nasledujúcom predpokladáme, že existuje dostatočne veľké n_0 tak, že nerovnosti platia pre všetky $n > n_0$.

$\Theta(a) := \{b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+;\ (\exists k_1, k_2 \in (0, \infty))\ k_1\, a_n \leq b_n \leq k_2\, a_n\}$

$c \in \Theta(a)$: postupnosť c je asymptoticky ohraničená (zdola aj zhora) postupnosťou a (c rastie rovnako rýchle ako a)

$\mathcal{O}(a) := \{b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+;\ (\exists k_2 \in (0, \infty))\ b_n \leq k_2\, a_n\}$

$c \in \mathcal{O}(a)$: postupnosť c je asymptoticky zhora ohraničená postupnosťou a (c rastie maximálne tak rýchle ako a)

$\Omega(a) := \{b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+;\ (\exists k_1 \in (0, \infty))\ k_1\, a_n \leq b_n\}$

$c \in \Omega(a)$: postupnosť c je asymptoticky zdola ohraničená postupnosťou a (c rastie aspoň tak rýchle ako a)

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Bachmannova-Landauova notácia

Veta 9.1

Nech $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

a) $\Theta(a) = \mathcal{O}(a) \cap \Omega(a)$

b) *Ak* $a \in \Theta(b)$ *a* $b \in \Theta(c)$, *tak* $a \in \Theta(c)$. *Podobne pre* $\mathcal{O}, \Omega$.

c) *Ak* $a, b \in \Theta(c)$, *tak* $a + b \in \Theta(c)$. *Podobne pre* $\mathcal{O}, \Omega$.

d) *Ak* $a \in \Theta(c)$, *tak* $k \cdot a \in \Theta(c)$ *pre* $k > 0$. *Podobne pre* $\mathcal{O}, \Omega$.

e) $a \in \mathcal{O}(b)$ *práve vtedy, keď* $b \in \Omega(a)$.

Algoritmus	$\mathbf{T(n)}$
binárne vyhľadávanie	$\mathcal{O}(\log n)$
FFT	$\mathcal{O}(n \log n)$
vyhľadávanie v k-rozm. strome	$\mathcal{O}(n^c),\ c \in (0,1)$
bublinkové triedenie	$\mathcal{O}(n^2)$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Bachmannova-Landauova notácia

Veta 9.2

Nech $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $a, b > 0$ *a* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

a) *Ak* $0 < L < +\infty$, *tak* $a \in \Theta(b)$.

b) *Ak* $L = 0$, *tak* $a \notin \Theta(b)$, $a \in \mathcal{O}(b)$.

c) *Ak* $L = +\infty$, *tak* $a \notin \Theta(b)$, $a \in \Omega(b)$.

Veta 9.3

Ak P *je polynóm stupňa* k, $P \geq 0$, *tak* $P \in \Theta(n^k)$.

$k \in \mathbb{N}, k > 1, r > 1$

$$\mathcal{O}(\log n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^k) \subset \mathcal{O}(n^{k+1}) \subset \mathcal{O}(r^n) \subset \mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$$

$$\Omega(\log n) \supset \Omega(n) \supset \Omega(n \log n) \supset \Omega(n^k) \supset \Omega(n^{k+1}) \supset \Omega(r^n) \supset \Omega(n!) \supset \Omega(n^n)$$

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Bachmannova-Landauova notácia

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Ilustráciou zložitosti je nasledujúca tabuľka, predpokladajme, že vykonanie jednej operácie trvá jednu mikrosekundu:

Funkcia počtu operácií	20	40	60	80	100	200	500	1000
n	20 µs	40 µs	60 µs	80 µs	100 µs	200 µs	500 µs	1000 µs
n.log n	86 µs	0,2 ms	0,35 ms	0,5 ms	0,7 ms	1,5 ms	4,5 ms	10ms
n^2	0,4 ms	1,6 ms	3,6 ms	6,4 ms	10 ms	40 ms	0,25s	1 s
n^3	8 ms	64 ms	0,22 ms	0,5 ms	1 s	8 s	125 s	17 min
n^4	0,16 s	2,56s	13 s	41 s	100 s	27 min	17 h	11,6 dní
2^n	1 s	11,7 dní	36 600 r	$3{,}6.10^9$ r				
n!	77 000 r							

zdroj: https://sk.wikipedia.org

Bachmannova-Landauova notácia

Striktne väčšie horné ohraničenie:

$$o(a) := \{b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+;\ (\forall k_2 \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ b_n < k_2\, a_n\}$$

Zrejme

$$o(a) = \left\{ b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+;\ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \right\}$$

a

$$o(a) \subseteq \mathcal{O}(a).$$

Podobne aj ω a θ.

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia

Postupnosti

Čo mám vedieť z postupností

Čo mám vedieť z teórie

- pojmy – ohraničená, konvergentná (divergentná), monotónna, vybraná, fundamentálna postupnosť
- vzťah medzi pojmami
  - ohraničenosťou a konvergenciou postupnosti
  - monotónnosťou a konvergenciou postupnosti
  - konvergenciou pôvodnej a z nej vybranej postupnosti
- operácie s konvergentnými (algebraické, spojené s nerovnosťami) a divergentnými postupnosťami

Čo mám vedieť z príkladov

- vyšetriť ohraničenosť, monotónnosť, konvergenciu (z definície) postupnosti
- vypočítať rôzne typy limít postupnosti

Opakovanie ?
Základné pojmy
Ohraničenosť postupnosti
Vlastná limita postupnosti
Nevlastná limita postupnosti
Monotónne postupnosti
Vybrané postupnosti
Fundamentálna postupnosť
Bachmannova-Landauova notácia