Prednáška 4

Nekonečné číselné rady

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Mgr. Jozef Kiseľák, PhD.

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných

18. marca 2021

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Agenda

1. Základné pojmy
2. Operácie s radmi
3. Kritéria konvergencie radov
4. Absolútna konvergencia
5. Súčin radov
6. Zoskupovanie členov radu
7. Prerovnanie radu
8. Čo mám vedieť

Základné pojmy

Už vieme, čo je to postupnosť, limita postupnosti. Teraz sa budeme zaoberať úlohou ako vhodne definovať súčet členov danej postupnosti. K tomu potrebujeme pojem nekonečného číselného radu.

Definícia 1.1

Nech je daná číselná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nekonečným číselným radom nazývame súčet členov tejto postupnosti, t.j.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i. \tag{1}$$

Sčítať konečný počet sčítancov vieme, avšak pri úlohe definovať súčet členov postupnosti (súčet nekonečného číselného radu) ide o súčet nekonečného počtu sčítancov. Otázky: Ako sčítať nekonečný počet čísel? Čo bude ich súčtom?

K postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vieme jednoznačne vytvoriť postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nasledovne:

Základné pojmy

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3,$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n.$$

Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosťou čiastočných súčtov radu (1).

– prvok s_n nazývame n-tý čiastočný súčet radu (1)

– prvok a_n nazývame n-tý člen radu (1)

– k postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ vieme taktiež spätne vytvoriť postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a to takto: $a_1 = s_1$, $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$

Základné pojmy

Čo budeme rozumieť pod pojmom súčet radu?

Definícia 1.2

Súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame vlastnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame konvergentný.

Zapisujeme to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Ak neexistuje vlastná limita postupnosti čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemá súčet a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame divergentný.

Poznámky:

- z definície je zrejmé, že o tom, či rad má alebo nemá súčet rozhoduje to, či postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná alebo divergentná

Základné pojmy

- rad je konvergentný$\leftrightarrow$má súčet; rad je divergentný$\leftrightarrow$nemá súčet
- o súčte radu hovoríme iba pri konvergentných radoch, v prípade divergentných radov môžeme rozlíšiť 3 prípady divergencie:
  a) ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, tak hovoríme, že rad diverguje do $+\infty$,
  b) ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, tak hovoríme, že rad diverguje do $-\infty$,
  c) ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n =$ neex., tak hovoríme, že rad osciluje.

Príklady špeciálnych radov

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1+(-1)+1+(-1)+\ldots$ je divergentný rad (osciluje), pretože pre vybrané postupností z postupnosti jeho čiastočných súčtov platí: $s_{2k}=0\to 0$, $s_{2k-1}=1\to 1$ pre $k\to\infty$ a teda $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ je divergentný rad (diverguje do $+\infty$). Tento rad sa nazýva harmonický rad.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n$, $a,q\in\mathbb{R}$. Tento rad sa nazýva geometrický rad. Kedy je tento rad konvergentný? Rozlíšme tieto prípady:
   - $a=0$, $q\in\mathbb{R}$ ... $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0+0+0+\ldots$, teda $s_n=0$, $n\in\mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} s_n = 0\in\mathbb{R}$, rad konverguje

Príklady špeciálnych radov

- $q = 1$ a $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ... $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a = a + a + a + \dots$, teda $s_n = na$, $n \in \mathbb{N}$ a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, ak $a > 0$, rad diverguje; $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$, ak $a < 0$, rad diverguje
- $a \neq 0$, $q \neq 1$ ... $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $n \in \mathbb{N}$ a

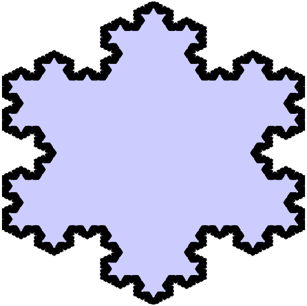
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1, \text{rad konverguje} \\ \text{neexistuje}, & q = -1, \text{rad diverguje} \\ \text{neexistuje alebo je nevlastná}, & |q| > 1, \text{rad diverguje} \end{cases}$$

Príklady špeciálnych radov

Úloha 1.1

Nájdite dĺžku Kochovej vločky a obsah jej vnútra. Vznikne nekonečným opakovaním postupu: na začiatku je to rovnostranný trojuholník. V každom kroku sa s každou úsečkou urobí nasledovné:

1. *Rozdelí sa na tri rovnaké časti.*
2. *Nad prostrednou časťou sa zostrojí rovnostranný trojuholník.*
3. *Jeho základňa sa odstráni.*

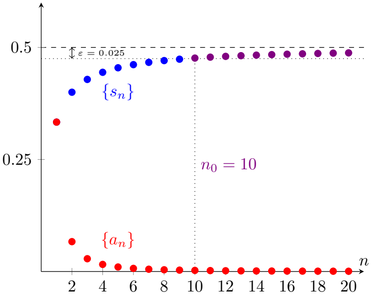


Príklady špeciálnych radov

Uvažujme rad $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Nájdeme čiastočné súčty

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k+1)} \right) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{2}.$$



Operácie s radmi

Uvažujme rady: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad (2)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \qquad (3)$$

Súčtom radov (2) a (3) nazývame rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Nech $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. C-násobkom radu (2) nazývame rad $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$.

Násobenie radu nenulovou konštantou

Veta 2.1

Nech $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$. Naviac platí $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Operácie s radmi

Súčet radov

Veta 2.2

Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú konvergentné a majú súčty* A, B.

Potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *konverguje a má súčet* $A + B$.

Otázka: Čo sa stane s konvergenciou (divergenciou) radu, ak vynecháme alebo zmeníme konečný počet jeho členov? Potrebujeme k tomu pojem:

Definícia 2.1

Nech $k \in \mathbb{N}$, *pevné. Rad* $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ *nazývame* ***zvyškom radu*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***po k-tom člene.***

Operácie s radmi

Odpoveď na našu otázku je: "nič sa nestane" – konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii, resp. divergencii radu!
Platí veta.

Veta 2.3

Nech $k \in \mathbb{N}$, pevné. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a jeho súčet je číslo s práve vtedy, keď konverguje jeho zvyšok po k-tom člene, t.j. rad $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ a jeho súčet je číslo $s - s_k$, kde $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

Rozhodnúť o konvergencii radu len na základe definície, t.j. cez limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov, je častokrát zložité. Preto sa pozrime na ďalšie možností ako rozhodnúť o konvergencii, na tzv. kritériá konvergencie radov.

Kritériá konvergencie radov

Otázka: Aké vlastnosti musí mať postupnosť $(a_n)_1^\infty$, aby rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergoval?

Veta 3.1 (Nutná podmienka konvergencie (Nulové kritérium))

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ide iba o nutnú podmienku konvergencie radov, ako to ukazuje nasledujúce:

$$\text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje a } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ konverguje a } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

– o konvergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nevieme nič povedať, ak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kritériá konvergencie radov

– túto nutnú podmienku využívame však v tomto zmysle: ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} - \{0\}$ (ex. vlastná limita, ale rôzna od nuly) alebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \text{neex.}$ alebo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$), potom vieme povedať, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

V ďalšom budeme potrebovať nasledujúci pojem.

Definícia 3.1

Majme rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *pričom* $b_n \geq 0$ *pre všetky* $n \in \mathbb{N}$. *Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *nazývame majorantný rad k radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *minorantný rad k radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *ak pre každé* $n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq b_n$.

– nerovnosť $|a_n| \leq b_n$ môže platiť iba pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ (počnúc nejakým indexom n_0)

Kritériá konvergencie radov

Rady s nezápornými členmi

Porovnávacie kritériá

Ich spoločným znakom je to, že skúmaný rad určitým spôsobom porovnáme s vhodným známym radom a na základe tohto porovnania vyslovíme záver o konvergencii alebo divergencii skúmaného radu.

Veta 3.2 (Majorantné (porovnávacie) kritérium)

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú rady s nezápornými členmi a rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je majorantný k radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*. Potom z konvergencie majorantného radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *vyplýva konvergencia radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Kritériá konvergencie radov

– veta tiež hovorí, že ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Príklad 3.1

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *pre* $\alpha > 1$ *daný rad konverguje,*
- *pre* $\alpha \leq 1$ *daný rad diverguje.*

Tento rad sa nazýva zovšeobecnený harmonický rad.

Kritériá konvergencie radov

Máme aj tzv. limitnú verziu porovnávacieho kritéria.

Veta 3.3 (Limitné porovnávacie kritérium)

Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$, $b_n > 0$.

a) *Ak existuje vlastná limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, potom konverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) *Ak existuje vlastná limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, *ale rôzna od nuly alebo nevlastná a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje, potom diverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

– z vety máme, že ak ex. vlastná limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, ale rôzna od nuly, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Kritériá konvergencie radov

odmocninové kritérium

Veta 3.4 (Cauchyho (odmocninové) kritérium)

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi.*

a) *Ak existujú čísla* $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ *a* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že pre každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $\sqrt[n]{a_n} < q$, *potom rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

b) *Ak existuje číslo* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že pre každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *potom rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

– v prípade a) predchádzajúcej vety je dôležitý predpoklad existencie $q < 1$, nestačí predpokladať, že $\sqrt[n]{a_n} < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Lebo napr. pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je

$\sqrt[n]{n} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} < 1$, to by znamenalo, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ je konvergentný, čo je spor ("blbosť")

Kritériá konvergencie radov

Veta 3.5 (Cauchyho limitné (odmocninové) kritérium)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi a existuje* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, *kde* $l \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$.

a) *Ak* $l < 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

b) *Ak* $l > 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Príklad 3.2

Dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Kritériá konvergencie radov

– ak $l = 1$ v Cauchyho limitnom kritériu, tak nevieme rozhodnúť o konvergencii skúmaného radu, lebo napr.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje a } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje a } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Podielové kritérium

Veta 3.6 (d'Alambertovo (podielové) kritérium)

Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

a) *Ak existujú čísla $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$, tak rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

b) *Ak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Kritériá konvergencie radov

Veta 3.7 (d'Alambertovo limitné (podielové) kritérium)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi a existuje* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, *kde* $l \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$.

a) *Ak* $l < 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

b) *Ak* $l > 1$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

– v nelimitnom kritériu je opäť dôležitý predpoklad existencie $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ a v limitnom kritériu opäť nevieme rozhodnúť o konvergencii skúmaného radu v prípade, ak $l = 1$. Lebo napr.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje a } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje a } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Kritériá konvergencie radov

Veta 3.8 (Raabeho limitné kritérium)

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=l,$$

kde $l \in \mathbb{R}^*$.

a) *Ak* $l < 1$, *tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

b) *Ak* $l > 1$, *tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Kritériá konvergencie radov

Rady so striedavými znamienkami
Čo to je?

Definícia 3.2

Nech $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}$. *Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

nazývame radom so striedavými znamienkami.

O konvergencii týchto radov môžeme rozhodnúť na základe nasledujúceho kritéria.

Veta 3.9 (Leibnitzovo kritérium)

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca postupnosť kladných čísel. Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Naviac, pre súčet* s *tohto radu platí* $a_1 - a_2 \le s \le a_1$.

Kritériá konvergencie radov

Poznámka:
– predpoklad v Leibnitzovom kritériu, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca sa nedá vynechať! Uvažujme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{1+(-1)^n}{2n}\right).$$

Je to rad so striedavými znamienkami, pričom postupnosť $a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{2^n}-\frac{1+(-1)^n}{2n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Táto postupnosť nie je monotónna a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Keby sme "vynechali"nerastúcosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak záver by bol, že daný rad konverguje, čo nie je pravda. Tento rad je divergentný (dôkaz sa urobí sporom).

Absolútna a relatívna konvergencia

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a tiež $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje

"silnejšia a slabšia konvergencia"

Skúsme tieto dve situácie rozlíšiť. V ďalších úvahách rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ môže byť radom s nezápornými členmi alebo taktiež radom so striedavými znamienkami.

Absolútna a relatívna konvergencia

Definícia 4.1

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Absolútna a relatívna konvergencia

Definícia 4.2

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *relatívne (alebo neabsolútne) konverguje, akk konverguje rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverguje.*

Aký je vzťah medzi absolútnou konvergenciou a konvergenciou?

Veta 4.1

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje, tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Absolútna a relatívna konvergencia

- Obrátená veta k tejto vete neplatí. Napr. rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje, ale rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, čo znamená, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ nie je absolútne konvergentný.
- Na vyšetrovanie absolútnej konvergencie radov samozrejme môžeme používať všetky kritériá pre rady s nezápornými členmi.
- Ak uvažujeme rady s nezápornými členmi, vtedy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Teda, ak rad konverguje, tak vždy ide o absolútnu konvergenciu.
- Rady s nezápornými členmi môžu byť konvergentné (absolútne) alebo divergentné.
- Rady so striedavými znamienkami môžu byť absolútne konvergentné, relatívne konvergentné alebo divergentné.

Súčin radov

Súčin radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$$

Už vieme, že súčet dvoch radov sa definoval ako rad, ktorého členy sú súčtom odpovedajúcich členov sčítavaných radov. Pozrime sa teraz na súčin radov. Ako násobiť rady? Súčin dvoch radov musí nejako zovšeobecňovať súčin dvoch polynómov (mnohočlenov). Formálne využijeme násobenie polynómov.

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots) \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \dots) = \\
&a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \cdots + a_1 b_n + \cdots + \\
&a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_2 b_n + \cdots + \\
&a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_3 b_n + \cdots + \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&a_n b_1 + a_n b_2 + a_n b_3 + \cdots + a_n b_n + \cdots + \\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Súčin radov

Zoskupením podľa členov na vedľajších diagonálach dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots +$$

$$(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda b_{n+1-\lambda}$$

Teda môžeme definovať súčin radov, presnejšie Cauchyho súčin radov, nasledovne:

Definícia 5.1

Cauchyho súčinom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *rozumieme rad* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, *kde* $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$.

Formálne zapísané: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda b_{n+1-\lambda}$

Súčin radov

Kedy Cauchyho súčin radov bude konvergentným radom?

Veta 5.1

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú konvergentné rady, jeden z nich je absolútne konvergentný a ich súčty sú odpovedajúce* A, B. *Potom Cauchyho súčin týchto radov konverguje a jeho súčet je číslo* $A \cdot B$.

Poznámka:

- Ak obidva rady sú absolútne konvergentné, tak aj ich Cauchyho súčin je absolútne konvergentný rad.
- Veta neplatí, ak obidva rady sú len relatívne konvergentné.

Príklad 5.1

Nájdite Cauchyho súčin radov $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, x, y \in \mathbb{R}$.

Dostávame, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}, x, y \in \mathbb{R}$.

Ďalšie operácie s radmi

Zoskupovanie členov radu

Vieme, že pre konečný počet sčítancov platí asociatívny zákon, t.j. $a + (b + c) = (a + b) + c$. Ako to je s nekonečným počtom sčítancov? Platí aj vtedy asociatívny zákon? V prípade nekonečného počtu sčítancov hovoríme o tzv. zoskupovaní členov radu. Čo to zoskupenie členov radu vlastne je?

Uvažujme rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ a nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Označme si:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 + a_2 \cdots + a_{k_1}\\
b_2 &= a_{k_1+1} + a_{k_1+2} \cdots + a_{k_2}\\
&\vdots\\
b_n &= a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n}.
\end{aligned}
$$

Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazývame radom, ktorý vznikol zoskupením členov radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podľa zoskupenia členov $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ďalšie operácie s radmi

O vzťahu medzi konvergenciou týchto radov hovorí nasledujúca veta.

Veta 6.1

Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom konverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, ktorý vznikol zoskupením členov radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *podľa ľubovoľného zoskupenia členov* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a má ten istý súčet ako rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka:

– pre konvergentné rady platí äsociatívny zákon"

– veta sa nedá obrátiť, napr. uvažujme rad

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$. Tento rad diverguje (podľa nutnej podmienky), ale rad

Ďalšie operácie s radmi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{(1+(-1))}_{b_1} + \underbrace{(1+(-1))}_{b_2} + \underbrace{(1+(-1))}_{b_3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 0$$

konverguje a má súčet rovný 0 (je to rad, ktorý vznikol zoskupením členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podľa zoskupenia členov $k_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$) alebo rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{1}_{b_1} + \underbrace{((-1)+1)}_{b_2} + \underbrace{((-1)+1)}_{b_3} + \cdots = 1+0+0+\ldots$$

konverguje a má súčet rovný 1 (je to rad, ktorý vznikol zoskupením členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podľa zoskupenia členov $k_n = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$).

Ďalej si všimnime, že uvažovaní rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musí byť divergentný na základe predchádzajúcej vety, lebo máme dve zoskupenia členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ktoré určujú číselné rady s rôznymi súčtami.

Ďalšie operácie s radmi

Premiestňovanie členov radu (prerovnanie členov radu)
Vieme, že pre konečný počet sčítancov platí komutatívny zákon, t.j. $a + b + c = b + c + a$. Ako to je s nekonečným počtom sčítancov? Platí aj vtedy komutatívny zákon? V prípade nekonečného počtu sčítancov hovoríme o tzv. prerovnaní členov radu. Čo to prerovnanie členov radu vlastne je?

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prirodzených čísel, v ktorej sa každé prirodzené číslo vyskytuje práve raz (ide o jedno-jednoznačné zobrazenie ("prosté a na") prirodzených čísel na seba, t.j. $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \dots$ nazývame

radom, ktorý vznikol prerovnaním členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podľa prerovnania členov $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ďalšie operácie s radmi

Múdro môžeme tento pojem definovať nasledovne:

Definícia 7.1

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je prerovnaním radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, akk existuje bijekcia* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *taká, že pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Otázka: Aký je vzťah medzi konvergenciou týchto radov? Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, potom bude aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ktorý vznikol prerovnaním členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tiež konvergentný?

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Tento rad je relatívne konvergentný.
Urobme také prerovnanie členov tohto radu, že po jednom kladnom člene budú vždy nasledovať dva záporné členy, teda dostaneme rad

Ďalšie operácie s radmi

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+$$
$$\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}\right)+\cdots.$$

Ukázali sme, že súčet tohto prerovnaného radu je iný ako súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Teda príklad ukazuje, že pre relatívne konvergentné rady "komutatívny zákon"neplatí.

Prerovnaný rad relatívne konvergentného radu môže mať iný súčet (pozri predchádzajúci príklad), dokonca ho ani nemusí mať (lebo tento prerovnaný rad môže byť divergentný).

Ďalšie operácie s radmi

Nasledujúce vety ukazujú, že je rozdiel medzi prerovnaním členov relatívne a absolútne konvergentných radov.

Veta 7.1 (Riemannova o prerovnaní)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je relatívne konvergentný rad a* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Potom existuje také prerovnanie členov* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *že prerovnaný rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentný a má súčet rovný číslu* α *alebo je divergentný.*

Veta 7.2

Pre ľubovoľné prerovnanie členov $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je prerovnaný rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentný a má súčet vždy to isté číslo práve vtedy, keď rad* $\sum a_n$ *je absolútne konvergentný.*

Definícia funkcie e^x

V nasledujúcich úvahách budeme potrebovať Bernoulliho nerovnosť.

$$(1+a)^k \geq 1 + k \cdot a, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}, a \geq -1$$

Definícia 7.2

Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ si definujme $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Ďalej, pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ máme, že $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Teda dostávame, že

$$\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Čo mám vedieť z číselných radov

Čo mám vedieť z teórie

- pojmy – súčet radu, konvergentný, divergentný rad, absolútne a relatívne konvergentný rad
- kritéria konvergencie radov – nutná podmienka konvergencie (nulové kritérium), porovnávacie, Cauchyho (odmocninové), d'Alambertovo (podielové), Leibnitzovo kritérium
- operácie s radmi – násobenie konštantou, súčet, rozdiel, súčin, zoskupovanie a prerovnavanie členov
- definovať funkciu e^x

Čo mám vedieť z príkladov

- nájsť súčet radu z definície, t.j. pomocou postupnosti čiastočných súčtov
- vyšetrovať konvergenciu radov, prípadne ich absolútnu, relatívnu konvergenciu, pomocou uvedených kritérií