Prednáška 7

Nekonečné rady funkcií

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Jozef Kiseľák

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných

24. marca 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Agenda

1. Konvergencia radu funkcií

2. Mocninové rady

3. Čo mám vedieť

Bodová konvergencia

Už poznáme číselné postupnosti a rady: limita postupnosti, konvergentná, divergentná postupnosť, súčet radu, konvergentný, divergentný rad.

Teraz : členy postupnosti, resp. radu, nie sú reálne čísla ale funkcie.

Keď máme konečný počet funkcií $f_1, \dots, f_n$, ktoré sú

- spojité na intervale I, tak ich súčet je funkcia spojitá na I;
- diferencovateľné na intervale I, tak ich súčet je funkcia diferencovateľná a platí

$$(f_1(x) + \cdots + f_n(x))' = f_1'(x) + \cdots + f_n'(x), \ x \in I;$$

- integrovateľné na intervale I, tak aj ich súčet je funkcia integrovateľná a platí

$$\int_I (f_1(x) + \cdots + f_n(x)) \, \mathrm{d}x = \int_I f_1(x) \, \mathrm{d}x + \cdots + \int_I f_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

Má takéto vlastnosti aj súčet nekonečného počtu funkcií?

Bodová konvergencia

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií, ktoré sú definované na množine $D \subset \mathbb{R}$ a nech $x_0 \in D$. Potom postupnosť funkčných hodnôt $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, ktorá môže byť konvergentná alebo divergentná. Ak je konvergentná a číslo y_0 je jej limitou, tak hovoríme, že postupnosť funkcií konverguje v bode x_0.

Definícia 1.1

Nech v každom bode $x_0 \in M \subset D$ je číselná postupnosť $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná. Funkciu f, ktorej definičný obor je množina M a ktorej hodnota v každom čísle $x_0 \in M$ je $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$, nazývame limitnou funkciou a hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodovo konverguje k funkcii f na množine M, čo zapisujeme
$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in M$ alebo $f_n \to f$ na M.

Bodová konvergencia

Úloha 1.1

Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *ak:*

a) $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,(nx),\ x \in \mathbb{R},$

b) $f_n(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R}.$

Bodová konvergencia

Definícia 1.2

Nech je daná postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definovaných na množine* D*. Položme*

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),\ x \in D,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ak postupnosť funkcií $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodovo na množine* $M \subset D$ *tak hovoríme, že rad funkcií*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots, \quad x \in M \qquad (1)$$

konverguje bodovo na množine M*, čo zapisujeme* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \to s$ *na* M*.*

Postupnosť funkcií $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nazývame postupnosťou čiastočných súčtov radu (1) a jej limitnú funkciu* s *súčtom radu.*

Bodová konvergencia

Z definície vyplýva, že pri vyšetrovaní bodovej konvergencie radu funkcií môžeme používať všetky kritéria konvergencie číselných radov.

Úloha 1.2

Vyšetrite bodovú konvergenciu nasledujúcich radov funkcií $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$*:*

a) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-xn^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Bodová konvergencia

Postupnosť funkcií nazývame tiež funkcionálna postupnosť a rad funkcií tiež funkcionálny rad. Množinu všetkých čísel $x \in D$, v ktorých postupnosť funkcií (rad funkcií) bodovo konverguje nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (radu funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$).

Z vlastností limít postupností reálnych čísel vyplýva, že ak sú členy postupnosti (radu) funkcií nezáporné funkcie aj limitná funkcia (súčet radu) bude nezáporná funkcia. Z toho istého dôvodu sa prenesie monotónnosť, napr. limita postupností (súčet radu) nerastúcich funkcií je nerastúca funkcia.

Bodová konvergencia

Problematickejšia je spojitosť.

Príklad 1.1

Funkcie $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ sú spojité na intervale $(-1, 1\rangle$. Ľahko sa ukáže, že na tomto intervale je funkcionálna postupnosť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná k limitnej funkcii

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \in (-1, 1), \end{cases}$$

ktorá je nespojitá na intervale $(-1, 1\rangle$ (nespojitá v bode $x = 1$ zľava).

Rovnomerná konvergencia

Definícia 1.3

Hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje na množine* M *k funkcii* f*, ak ku každému* $\epsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že pre každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *a všetky* $x \in M$ *platí* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. *Zapisujeme* $f_n \rightrightarrows f$ *na* M.

Hovoríme, že rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *rovnomerne konverguje k svojmu súčtu* s *na množine* M*, ak postupnosť jeho čiastočných súčtov* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje k funkcii* s *na množine* M.

Zapisujeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows s$ *na* M.

Rovnomerná konvergencia

Je zrejmé, že platia nasledujúce tvrdenia.

Veta 1.1

Ak postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje na množine* M*, potom bodovo konverguje na množine* M.

Veta 1.2

Ak postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje na množine* M *a množina* $P \subset M$*, potom postupnosť funkcií* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje na množine* P.

Veta 1.3

Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *rovnomerne konverguje na množine* M *práve vtedy, ak postupnosť zvyškov* $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje k nule na množine* M.

Rovnomerná konvergencia

Uvedieme praktickejšie kritéria.

Veta 1.4 (supremové kritérium pre funkcionálne postupnosti)

Nech postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *bodovo konverguje na množine* M *k funkcii* f*. Definujme číselnú postupnosť*

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|,\, x \in M\}.$$

Potom funkcionálna postupnosť $f_n \rightrightarrows f$ *na* M *práve vtedy, ak* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$

Je to vlastne konvergencia v supremovej (uniformnej, Čebyševovej) metrike $d_\infty(f,g) = \sup\left\{\,|f(x) - g(x)|\,,\, x \in M\right\}$, prirodzene zavedenej na priestore ohraničených funkcií $B(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : d_\infty(f,0) < \infty\}$.

Rovnomerná konvergencia

Veta 1.5 (Weierstrassovo kritérium)

Nech pre každé $x \in M$ *a všetky* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$|f_n(x)| \le c_n.$$

Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje potom rad funkcií* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *rovnomerne konverguje na množine* M.

Veta 1.6 (porovnávacie kritérium rovnomernej konvergencie)

Nech pre každé $x \in M$ *a všetky* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$|f_n(x)| \le g_n(x).$$

Ak rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *rovnomerne konverguje na množine* M *potom rad aj funkcií* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *rovnomerne konverguje na množine* M.

Rovnomerná konvergencia

Weierstrassovo kritérium, na rozdiel od supremového kritéria rovnomernej konvergencie postupnosti funkcií, nie je je nutnou a postačujúcou podmienkou rovnomernej konvergencie funkcionálnych radov.

Úloha 1.3

Rozhodnite o rovnomernej konvergencii radu funkcií:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in \langle -a, a \rangle, \, 0 < a < 1,$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

Mocninové rady

My už vieme, že pre každé $x \in (-1, 1)$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x}$, teda daný rad konverguje pre každé $x \in (-1, 1)$.
Je to špeciálny typ funkcionálneho radu, ktorého členmi sú mocninové funkcie, t.j. ide o tzv. mocninové rady. Pozrime sa najprv na základné vlastnosti mocninových radov, začnime definíciou mocninového radu. Čo je vlastne mocninový rad?

Definícia 2.1

Mocninovým (potenčným) radom nazývame rad tvaru
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, *kde* $a, x \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Obor konvergencie

Pričom:

- a_n nazývame $n-$tý koeficient radu;
- a nazývame stred radu;
- $a_n(x-a)^n$ nazývame $n-$tý člen radu.

Ak za premennú x v tomto funkcionálnom rade dosadíme prípustné hodnoty z množiny M, dostávame číselné rady, ktorých konvergenciu (divergenciu) už vieme vyšetrovať. Oborom konvergencie funkcionálneho radu je vlastne množina

$$\left\{x \in M : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ konverguje}\right\}.$$

Obor konvergencie

Definícia 2.2

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *nazývame množinu* $\left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}$.

Poznámka:
Obor konvergencie mocninového radu nie je nikdy prázdna množina, vždy obsahuje aspoň bod a, t.j. stred mocninového radu. Pozor! Pre funkcionálne rady vo všeobecnosti táto skutočnosť neplatí, viď nasledujúce príklady.

a) Uvažujme rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Vieme, že je to nekonečný geometrický rad, ktorý je konvergentný iba pre každé $x \in (-1, 1)$. Podľa definície je to aj mocninový rad so stredom v bode $a = 0$ a jeho obor konvergencie je interval $(-1, 1)$.

Obor konvergencie

b) Uvažujme rad $\sum_{n=0}^{\infty}(2+x^2)^n$. Je to funkcionálny rad, dokonca opäť nekonečný geometrický rad s kvocientom $q = 2 + x^2 \geq 2$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, teda pre každé $x \in \mathbb{R}$ je tento rad divergentný a jeho oborom konvergencie je prázdna množina.

c) Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Je to funkcionálny rad, dokonca vieme, že ide o zovšeobecnený harmonický rad, ktorý konverguje pre každé $x > 1$ a teda jeho oborom konvergencie je interval $(1, +\infty)$.

Všimnime si, že obor konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je interval symetrický vzhľadom na stred tohto radu. Bude to platiť pre každý mocninový rad? ”V istom zmysle” ÁNO (krajné body intervalu môžu robiť ”problémy”), uvidíme neskôr.

Obor konvergencie

Poznámka:
Substitúciou $x - a = y$ dostaneme z mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0. Vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, preto pre jednoduchosť (možno pre trochu "ľahšie" dôkazy) sa ďalej budeme zaoberať radom so stredom v bode 0, t.j. radom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

V ďalšom nás budú zaujímať tieto dva okruhy problémov:

1. Aké vlastnosti má obor konvergencie mocninového radu? Ako ho nájsť (vypočítať)?
2. Aké vlastnosti má funkcia, ktorá je súčtom mocninového radu?

Obor konvergencie

K vyšetreniu vlastností oboru konvergencie mocninového radu budeme potrebovať nasledujúce dve pomocné lemy.

Lema 2.1

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konverguje v bode* $x_0 \neq 0$ *a nech* $y \in \mathbb{R}$ *je také, že* $|y| < |x_0|$. *Potom rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ *absolutne konverguje.*

Lema 2.2

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *diverguje alebo relatívne konverguje v bode* $x_1 \neq 0$ *a nech* $y \in \mathbb{R}$ *je také, že* $|y| > |x_1|$. *Potom rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ *diverguje.*

Polomer konvergencie

Na základe predchádzajúcich úvah sme sa dostali k pojmu polomer konvergencie mocninového radu.

Definícia 2.3

a) *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konverguje v každom* $x \in \mathbb{R}$, *tak jeho polomerom konvergencie je* $\rho = +\infty$.

b) *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konverguje iba vo svojom strede, t.j. v bode* $x = 0$, *tak jeho polomerom konvergencie je* $\rho = 0$.

c) *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *nie je konvergentný v každom* $x \in \mathbb{R}$ *a zároveň nie je konvergentný iba vo svojom strede, tak jeho polomerom konvergencie nazývame kladné číslo* ρ *také, že pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *vyhovujúce nerovnosti* $|x| < \rho$ *je mocninový rad konvergentný a pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *vyhovujúce nerovnosti* $|x| > \rho$ *je mocninový rad divergentný.*

Polomer konvergencie

Poznámky:

Z definície polomeru konvergencie mocninového radu vyplýva:

- Polomer konvergencie je jednoznačne určený.
- Ak $\rho \in \mathbb{R}^+$ je polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, potom pre každé $x \in (-\rho, \rho)$ rad konverguje a pre každé $x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$ rad diverguje. Nič sa nehovorí o konvergencii, resp. divergencii radu v bodoch $x = \rho$, $x = -\rho$. V týchto bodoch sa konvergencia, resp. divergencia radu vyšetruje osobitne!
- Interval $(-\rho, +\rho)$ budeme "pracovne" nazývať intervalom konvergencie mocninového radu. V prípade radu so stredom v bode a, t.j. radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, intervalom konvergencie budeme "pracovne" nazývať interval $(a-\rho, a+\rho)$.

Polomer konvergencie

- Teda, oborom konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ môže byť jedna z týchto možností: $\{0\}$; $(-\rho, +\rho)$; $(-\rho, +\rho\rangle$; $\langle-\rho, +\rho)$; $\langle-\rho, +\rho\rangle$; $\mathbb{R}$. V prípade radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ so stredom v bode a, oborom konvergencie môže byť jedna z týchto možností: $\{a\}$; $(a-\rho, a+\rho)$; $(a-\rho, a+\rho\rangle$; $\langle a-\rho, a+\rho)$; $\langle a-\rho, a+\rho\rangle$; $\mathbb{R}$.
- Avšak, treba si uvedomiť, že možnosť $(-\rho, +\rho\rangle$, resp. $(a-\rho, a+\rho\rangle$ nikdy nemôže nastať, keď $a_n \geq 0$ (resp. $a_n \leq 0$) pre každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (alebo pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$). Prečo? (DÚ !)

Otázka: Existuje pre každý mocninový rad polomer konvergencie? Odpoveď je ÁNO.

Veta 2.1

Každý mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *má polomer konvergencie.*

Polomer konvergencie

Nasledujúca veta dokonca garantuje absolútnu konvergenciu radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pre každé $x \in (-\rho, \rho)$, kde ρ je polomer konvergencie tohto radu.

Veta 2.2

Nech ρ je polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $y \in \mathbb{R}$ je také, že $|y| < \rho$. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.

Polomer konvergencie

Na určenie (výpočet) polomeru konvergencie mocninového radu môžeme použiť aj jednoduchší spôsob. Platia nasledujúce dve vety.

Veta 2.3

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$ *pričom* $L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. *Potom platí:*

a) *ak* $L = +\infty$, *tak polomer konvergencie* $\rho = 0$ *(rad konverguje iba vo svojom strede, t.j. iba v bode* $x = 0$*);*

b) *ak* $L = 0$, *tak polomer konvergencie* $\rho = +\infty$ *(rad konverguje v každom bode* $x \in \mathbb{R}$*);*

c) *ak* $0 < L < +\infty$, *tak polomer konvergencie* $\rho = \dfrac{1}{L}$.

Poznámka:

– predchádzajúca veta si nutne vyžaduje, aby $|a_n| \neq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (resp. pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$)

Polomer konvergencie

Podobne sa dokáže aj veta.

Veta 2.4

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a existuje limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, *pričom* $L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. *Potom platí:*

a) *ak* $L = +\infty$, *tak polomer konvergencie* $\rho = 0$ *(rad konverguje iba vo svojom strede, t.j. iba v bode* $x = 0$*);*

b) *ak* $L = 0$, *tak polomer konvergencie* $\rho = +\infty$ *(rad konverguje v každom bode* $x \in \mathbb{R}$*);*

c) *ak* $0 < L < +\infty$, *tak polomer konvergencie* $\rho = \dfrac{1}{L}$.

Operácie s mocninovými radmi

Základné aritmetické operácie s mocninovými radmi s rovnakým stredom, t.j. sčítanie, násobenie nenulovou konštantou a násobenie, okamžite vyplývajú z definície týchto operácií pre číselné rady. Platí nasledujúca veta.

Veta 2.5

Uvažujme mocninové rady $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *s polomerom konvergencie* ρ_1 *a* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ *s polomerom konvergencie* ρ_2*. Potom platí:*

a) *súčtom týchto radov je rad* $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$ *s polomerom konvergencie* $\rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}$*;*

b) *ak* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, *tak nenulovým* λ *násobkom radu je rad* $(\lambda \cdot f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n(x-a)^n$ *s polomerom konvergencie* ρ_1*;*

Operácie s mocninovými radmi

Veta 2.6

c) *súčinom týchto radov je rad* $(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *s polomerom konvergencie* $\rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}$, *kde* $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Poznámka: Polomer konvergencie mocninových radov $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ aj $(f-g)(x)$ môže byť vo všobecnosti väčší ako $\min\{\rho_1, \rho_2\}$, viď príklad. Uvažujme rad $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ktorého polomer konvergencie je $\rho_1 = 1$ a $OK = (-1, 1)$ a rad $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) x^n$, ktorého polomer konvergencie je $\rho_2 = 1$ a $OK = (-1, 1)$. Súčtom týchto radov je rad $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$, je to NGR, ktorého polomer konvergencie je $\rho = 2$ a $OK = (-2, 2)$. Odtiaľ vidíme, že $\rho = 2 > 1 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$.

Derivácia mocninových radov

My už vieme, že derivácia konečného súčtu (lineárnej kombinácie) diferencovateľných funkcií na nejakom intervale I je súčtom (lineárnou kombináciou) derivácií jednotlivých funkcií na danom intervale I.
Otázka: Platí to aj pre nekonečný počet sčítancov? Čiastočná, kladná odpoveď sa nachádza v nasledujúcej vete.
Pre mocninové rady platí veta!

Veta 2.7 (Veta o derivácii mocninového radu)

Mocninové rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-a)^{n-1}$ *majú ten istý polomer konvergencie* ρ. *Funkcia* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *má deriváciu v každom* $x\in(a-\rho,a+\rho)$ *a platí, že*

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-a)^{n-1}.$$

Derivácia mocninových radov

Poznámky:

– Veta hovorí, že mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ s polomerom konvergencie ρ môžeme derivovať člen po člene a dostaneme rad $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-a)^{n-1}$ s tým istým polomerom konvergencie ρ, t.j. intervaly konvergencie týchto radov sú rovnaké, obory konvergencie môžu byť však rôzne!

– Vo všeobecnosti, vlastnosť, že "derivácia nekonečného súčtu diferencovateľných funkcií je nekonečný súčet derivácií týchto jednotlivých funkcií" platí iba pre mocninové rady!

Derivácia mocninových radov

Z predchádzajúcej vety bezprostredne vyplýva nasledujúca vlastnosť funkcie, ktorá je súčtom daného mocninového radu.

Dôsledok 2.1

Majme mocninový rad $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *s polomerom konvergencie* ρ. *Potom platí:*

a) *súčet* f *daného mocninového radu je spojitá funkcia na intervale* $(a-\rho, a+\rho)$;

b) *ak daný mocninový rad konverguje aj v bode* $a-\rho$, *resp.* $a+\rho$, *tak funkcia* f *je spojitá v bode* $a-\rho$ *sprava, resp. spojitá v bode* $a+\rho$ *zľava.*

Nekonečné rady funkcií

Čo mám vedieť z teórie

- pojmy – mocninový rad, interval, obor, polomer konvergencie mocninového radu,
- vlastnosti a výpočet polomeru a oboru konvergencie mocninových radov,
- operácie s mocninovými radmi (algebraické, derivácia).

Čo mám vedieť z príkladov

- nájsť polomer a obor konvergencie mocninových radov,
- nájsť súčet daného číselného alebo mocninového radu pomocou vety o derivácii mocninového radu (nie!),