Prednáška 5

Určitý integrál

RNDr. Ivan Mojsej, PhD., Jozef Kiseľák

(Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2019-1389.)

ÚMV/FRPb/10 Funkcia reálnych premenných

24. marca 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Agenda

Motivácia

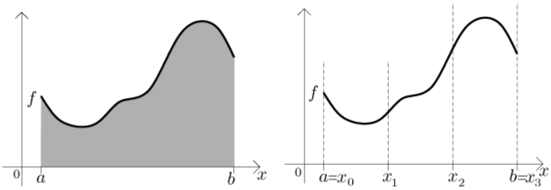
Pojem určitého integrálu patrí k základným pojmom matematickej analýzy. Existuje niekoľko prístupov ako vybudovať tento pojem a tomu odpovedá aj niekoľko druhov určitých integrálov (Riemann, Lebesgue). Spôsob ktorý si my uvedieme sa spája s menom významného nemeckého matematika G. F. Bernharda Riemanna[1] (1826-1866). Pozrime sa na nasledujúce úlohy:

Príklad 1.1

V elementárnej geometrii sa definuje napr. plošný obsah trojuholníka a tým pádom aj plošný obsah útvarov, ktoré sa dajú rozložiť na ich konečný počet. Otázka je, ako definovať obsah všeobecnejších útvarov.
Nech funkcia f je spojitá na nejakom intervale $[a, b]$[a] a $f(x) \geq 0$ pre každé $x \in [a, b]$. Chceme vypočítať obsah geometrického útvaru ohraničeného zhora grafom funkcie f, po stranách priamkami $x = a, x = b$ a zdola priamkou $y = 0$. Nazveme ho "krivočiarym lichobežníkom" a pokúsme sa o definíciu jeho obsahu.

[a] Budeme to označovať $f \in C([a, b])$.

[1] Bol žiakom slávneho matematika J. C. Friedricha Gaussa (1777-1855).



(a) Funkcia f a obsah plochy pod jej grafom.

(b) Delenie lichobežníka pre $n = 3$.

Obr.: Obsah plochy pod grafom funkcie f.

Sme aspoň schopní stanoviť nejaký dolný a horný odhad jeho obsahu? Odpoveď (za určitých okolností) je áno. Použijeme pritom obdĺžniky namiesto trojuholníkov, keďže sa s nimi ľahšie počíta. Položme

$$x_0 = a, x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}$$

a zvoľme si čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ tak, aby platilo, že

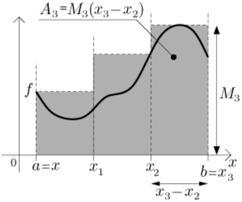
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

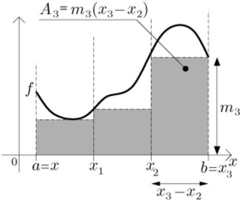
Interval $[a, b]$ sme si vlastne rozdelili na n intervalov.

Priamkami $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ rozdelíme daný útvar na n krivočiarých sublichobežníkov a zrejme je jeho plošný obsah rovný súčtu ich obsahov. Ako ale určiť výšku obdĺžnikov, ktoré majú približne určovať obsah sublichobežníkov? Keďže je f spojitá na $[a, b]$, tak je spojitá aj na $[x_{i-1}, x_i]$ a teda existuje jej minimum a maximum funkcie na daných podintervaloch. Označme si

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Horný (dolný) odhad plošného obsahu pôvodného lichobežníka získame ako súčet horných (dolných) odhadov obsahov čiastočných sublichobežníkov. Obsah i-teho sublichobežníka si označme ako $\tilde{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, t.j. útvar ohraničený priamkami $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = 0$ a grafom funkcie $y = f(x)$ na intervale $[x_{i-1}, x_i]$.





Potom obdĺžnik s dĺžkami strán m_i a $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ je vpísaný i-temu sublichobežníku a pre jeho obsah platí

$$A_i := m_i \triangle x_i \leq \tilde{A}_i.$$

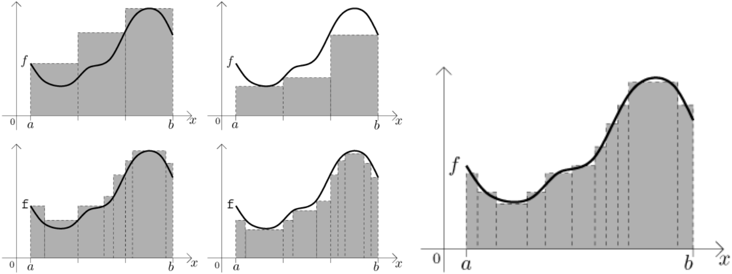
Obdĺžnik s dĺžkami strán M_i a $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ je opísaný i-temu sublichobežníku a pre jeho obsah zasa platí

$$A_i := M_i \triangle x_i \geq \tilde{A}_i.$$

Teraz vidíme, že pre plošný obsah P pôvodného lichobežníka platí

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i \leq \tilde{A} \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i,$$

kde uvedené sumy predstavujú nejaký dolný a horný odhad plošného obsahu $\tilde{A}$ pôvodného lichobežníka.



Obr.: Aproximácie obsahu plochy pod grafom funkcie f.

Ak počet deliacich bodov intervalu $[a, b]$ budeme zväčšovať, tak sa dĺžky $\triangle x_i$ intervalov $[x_{i-1}, x_i]$, budú zmenšovať. Tým zrejme aj rozdiel medzi príslušným horným a dolným odhadom plošného obsahu $\tilde{A}$ daného lichobežníka (obsah útvaru bude určený presnejšie). Takto by sme mohli postupovať nielen pre obdĺžniky, ale povedzme hocijaké mnohouholníky. Ak existuje jediné číslo $\tilde{A}$, ktoré nie je menšie ako obsah ľubovoľného vpísaného mnohouholníka, a nie je väčšie ako obsah ľubovolného opísaného mnohouholníka, potom toto číslo nazveme obsahom daného krivočiareho lichobežníka.

Príklad 1.2

Riešme jednoduchú úlohu z klasickej mechaniky, spočívajúcej v nájdení práce, ktorá je vykonaná pri priamočiarom pohybe, ak smer sily je ten istý ako smer dráhy. Nech

- $[a, b]$ *je dráha prejdená pôsobením sily* f*;*
- f *je nekonštantná* [a]*;*
- *opäť rozdeľme dráhu* $[a, b]$ *na úseky o dĺžke* $\triangle x_i$*;*
- *potom číslo* $\tilde{A}$ *(ak existuje) z predchádzajúcich úvah nazveme prácou, ktorú vykoná sila* f *pod dráhe* $[a, b]$

[a] Ak je sila f konštantná, práca je rovná súčinu sily a dráhy.

Z matematického hľadiska obidve úlohy sú identické a ukazuje sa potreba skúmať takéto súčty. Ide však o to, aby sme sa zbavili nepotrebných obmedzení a problém skúmali pokiaľ možno čo najvšeobecnejšie. Nebudeme požadovať nezápornosť funkcie a ani spojitosť funkcie (nahradíme ju slabšou vlastnosťou).

Základné pojmy a ich vlastnosti

Vyslovenie definície určitého integrálu si vyžaduje vykonať istú prípravnú úvahu, v ktorej zavedieme potrebné pojmy. Zaveďme si teda označenie a predpoklady platné v celej kapitole: Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a majme funkciu f, ktorá je definovaná na intervale $[a, b]$ a je tam ohraničená (prečo?).

Definícia 2.1

Nech $n \in \mathbb{N}$. Delením D intervalu $[a, b]$ nazývame množinu čísel $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ takých, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

čísla $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazývame deliace body delenia D a n intervalov

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

nazývame čiastočné intervaly (množiny) delenia D.

Poznámka 2.1

Označme si i-ty čiastočný interval delenia D ako $\sigma_i = [x_{i-1}, x_i]$ a jeho dĺžku si označme ako $\triangle x_i$, resp. $m(\sigma_i)$, t.j.
$\triangle x_i = m(\sigma_i) = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. *Teda môžeme písať, že*

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i \text{ a } b - a = \sum_{i=1}^{n} m(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i.$$

Definícia 2.2

Nech D a D_1 sú dve delenia intervalu $[a, b]$. Hovoríme, že delenie D_1 je zjemnením delenia D, ak $D \subset D_1$, t.j. ak každý deliaci bod delenia D je zároveň deliacim bodom delenia D_1.

Definícia 2.3

Nech D_1 a D_2 sú dve delenia intervalu $[a, b]$. Hovoríme, že delenie D je spoločným zjemnením delení D_1 a D_2, ak $D = D_1 \cup D_2$.

Definícia 2.4

Nech D je delenie intervalu $[a, b]$ dané deliacimi bodmi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Normou delenia D nazývame číslo $\nu(D) = \max\{\triangle x_i,\ i = 1, 2, \dots, n\} = \max\{m(\sigma_i),\ i = 1, 2, \dots, n\}$.

Označme si:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$i = 1, 2, \dots, n$;

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Teraz si môžeme definovať dve čísla:

–dolný integrálny súčet prislúchajúci funkcii f a deleniu D

predpisom $s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$,

–horný integrálny súčet prislúchajúci funkcii f a deleniu D

predpisom $S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i$.

Tieto súčty sa presnejšie nazývajú horný a dolný Darbouxov súčet.

Delení intervalu $[a, b]$ je samozrejme nekonečne veľa a teda funkcii f môžeme priradiť celú množinu horných a dolných súčtov. Podobne ako v prípade mnohouholníkov v úvahe na začiatku. Definujeme si:
$A = \{s(f, D);\ D \text{ je delenie intervalu } [a, b]\}$ – množina všetkých dolných integrálnych súčtov funkcie f na $[a, b]$;
$B = \{S(f, D);\ D \text{ je delenie intervalu } [a, b]\}$ – množina všetkých horných integrálnych súčtov funkcie f na $[a, b]$.
Skôr, ako uvedieme definíciu určitého integrálu v Riemannovom zmysle pozrime sa na niektoré vlastnosti horných a dolných súčtov.

Lema 2.1

Pre každú ohraničenú funkciu f definovanú na intervaloch I, J, pričom $I \subseteq J$ platí, že $\inf\limits_{x \in J} f(x) \leq \inf\limits_{x \in I} f(x)$ a $\sup\limits_{x \in I} f(x) \leq \sup\limits_{x \in J} f(x)$.

Veta 2.1

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na $[a, b]$. Množina A dolných súčtov a množina B horných súčtov sú ohraničené množiny a pre každé delenie D intervalu $[a, b]$ platí
$m(b-a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b-a)$.

Veta 2.2

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$ a nech D_1 je zjemnením delenia D intervalu $[a, b]$. Potom
$s(f, D_1) \geq s(f, D)$ *a* $S(f, D_1) \leq S(f, D)$.

Otázka: Aké vzťahy platia pre pre dolné a horné súčty prislúchajúce funkcii f a dvom rôznym deleniam intervalu $[a, b]$.

Veta 2.3

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$ a nech D_1, D_2 sú nejaké dve delenia intervalu $[a, b]$. Potom platí $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$.

Pozrime sa teraz na vlastnosti množín A, B, ktoré budeme v ďalšom potrebovať. Pripomeňme si, že

$A = \{s(f, D);\ D \text{ je delenie intervalu } [a, b]\}$,

$B = \{S(f, D);\ D \text{ je delenie intervalu } [a, b]\}$.

Veta 2.4

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$. Potom množina A má supremum číslo α, množina B má infimum číslo β a platí, že $\alpha \leq \beta$.

Definícia Riemannovho integrálu

Označme si teraz

$$\alpha = \sup A = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a túto hodnotu nazvime dolný integrál[2] funkcie f na intervale $[a, b]$. Podobne, označme si hodnotu

$$\beta = \inf B = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a nazvime ju horný integrál[3] funkcie f na intervale $[a, b]$.

Predchádzajúca veta garantuje, že $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ existujú a platí, že

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[2] Supremum množiny dolných integrálnych súčtov.
[3] Infimum množiny horných integrálnych súčtov.

Veta 3.1

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$ a D je ľubovoľné delenia intervalu $[a, b]$. Potom platí, že $m(b-a) \leq s(f, D) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f, D) \leq M(b-a)$, kde $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Definícia 3.1

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na $[a, b]$. Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, tak túto spoločnú hodnotu dolného a horného integrálu nazývame určitým (Riemannovým) integrálom funkcie f na intervale $[a, b]$, označujeme ju znakom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (t.j. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$) a hovoríme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje alebo, že funkcia f je (riemanovsky) integrovateľná na intervale $[a, b]$, označujeme to $f \in \mathcal{R}[a, b]$).

Je dobré si uvedomiť, že sme vyslovili korektnú definíciu Riemannovho (alebo Cauchyho–Riemannovho) určitého integrálu. Už vieme, že horný a dolný integrál vždy existujú z každej ohraničenej funkcie. Integrál však existovať nemusí.

Príklad 3.1

- *Uvažujme funkciu* $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$. *Táto funkcia je integrovateľná na intervale* $[a, b]$ *a platí, že* $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$.
- *Uvažujme funkciu* χ, *označovanú ako Dirichletova funkcia, definovanú predpisom* $\chi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{I}. \end{cases}$ *Táto funkcia nie je integrovateľná na intervale* $[a, b]$.

Ktoré funkcie sú na intervale $[a, b]$ integrovateľné? Presnejšie povedané, za akých predpokladov je nejaká (ohraničená) funkcia f na $[a, b]$ integrovateľná, t.j. kedy existuje $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$?

Vyslovme nasledujúcu nutnú a postačujúcu podmienku integravateľnosti funkcie f na danom intervale $[a, b]$.

Veta 3.2 (Kritérium integrovateľnosti)

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}[a, b]$ práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje delenie D intervalu $[a, b]$ také, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

Úloha 3.1

Ukážte, že funkcia f definovaná predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, 2) \\ 2, x \in [2, 4]. \end{cases} \quad \textit{je integrovateľná na intervale } [0, 4].$$

Z vlastnosti suprema, resp. infima množiny, máme, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje delenie D_1 intervalu $[a, b]$, resp. delenie D_2 intervalu $[a, b]$ také, že

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq s(f, D_1) > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon,$$

resp.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f, D_2) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Otázka je ako musia vyzerať "vhodné" delenia, pre ktoré to platí. Odpoveď: pre ľubovoľné delenie intervalu $[a, b]$, ktorého norma je dostatočne "malá".

Veta 3.3

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$. Potom k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre každé delenie D intervalu $[a, b]$, ktorého norma $\nu(D) < \delta$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < s(f, D) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 3.4

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$. Potom k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre každé delenie D intervalu $[a, b]$, ktorého norma $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f, D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Integrál ako limita postupnosti integrálnych súčtov

Zaviedli sme teda pojem určitého integrálu pomocou suprema a infima dolných a horných integrálnych súčtov. Vieme, že integrál nie je obyčajnou limitou, ale predsa existuje významný súvis medzi integrálom a limitou postupnosti. Predchádzajúce vety nám dávajú aj inú možnosť ako tento pojem zaviesť, a to pomocou limity integrálnych súčtov. To nám dovolí využívať vlastnosti limít postupností pri dôkazoch niektorých vlastností určitých integrálov. Budeme k tomu potrebovať pojem normálna postupnosť delení intervalu $[a, b]$.

Definícia 4.1

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *delení intervalu* $[a, b]$ *nazývame* ***normálnou***, *ak* $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Príklad 4.1

Zrejme postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *intervalu* $[a, b]$, *kde* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *delenie* D_n *rozdelí interval* $[a, b]$ *na* n *rovnakých častí, je normálna.*

Úloha 4.1

Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť delení intervalu* $[a,b]$, *nech*

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \infty,$$

kde d_n *je počet deliacich bodov delenia* D_n. *Vyplýva z toho, že* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je normálna postupnosť delení?*

Vyjadrime teraz horný integrál funkcie v tvare limity istej postupnosti horných súčtov.

Veta 4.1

Nech funkcia f *je definovaná a ohraničená na intervale* $[a,b]$ *a nech postupnosť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ľubovoľná normálna postupnosť delení intervalu* $[a,b]$. *Potom postupnosť* $\left\{S(f,D_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná a platí, že* $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Analogicky výsledok platí aj pre dolný integrál funkcie.

Veta 4.2

Nech funkcia f *je definovaná a ohraničená na intervale* $[a, b]$ *a nech postupnosť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ľubovoľná normálna postupnosť delení intervalu* $[a, b]$*. Potom postupnosť* $\big\{s(f, D_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná a platí, že* $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Teraz predpoklad na funkciu zosilníme a ukážeme si ďalšie kritérium integrovateľnosti funkcie na intervale $[a, b]$.

Dôsledok 4.1

Nech funkcia f *je definovaná a ohraničená na intervale* $[a, b]$*. Funkcia* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *práve vtedy, keď pre ľubovoľnú normálnu postupnosť* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *delení intervalu* $[a, b]$ *je* $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$ *a naviac platí, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

Poznámka 4.1

- *To znamená, že ak je f riemanovsky integrovateľná na $[a, b]$, tak každá normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie f konverguje k jej integrálu.*
- *Pojem riemannovskej integrovateľnosti a Riemannovho integrálu sa často definuje pomocou takéhoto prístupu. Je to však iný prístup, keďže pri samotnom zavedení definície vôbec nepotrebujete vlastnosť ohraničenosti funkcie f.*
- *Zrejme ak každá normálna postupnosť integrálnych súčtov funkcie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má konečnú limitu, tak f je ohraničená funkcia.*

Doteraz sme pracovali s dolnými a hornými súčtami prislúchajúcimi nejakej funkcii f definovanej a ohraničenej na intervale $[a, b]$ a deleniu D tohoto intervalu. Teraz bude užitočné definovať si ešte tzv. integrálny súčet, v istom zmysle zovšeobecnenie už nám známych pojmov.

Definícia 4.2

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$ a $D = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ je delenie intervalu $[a, b]$. Označme si $\mathcal{N}(D)$ množinu m-tíc $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ takých, že $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$. číslo $\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \triangle x_i$ nazývame integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D intervalu $[a, b]$ a výberu m-tice $\xi \in \mathcal{N}(D)$ a označujeme ho pomocou $\mathscr{S}(f, D, \xi)$, t.j.

$$\mathscr{S}(f, D, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \triangle x_i.$$

Poznámka 4.2

Je zrejmé, že pre ľubovoľné delenie D intervalu $[a, b]$ a pre ľubovoľnú m-ticu ξ (t.j. pre každý výber bodov ξ) platí: $s(f, D) \leq \mathscr{S}(f, D, \xi) \leq S(f, D)$.

Ak funkcia f je integrovateľná na intervale $[a, b]$, tak môžeme hodnotu integrálu určiť ako limitu postupnosti integrálnych súčtov.

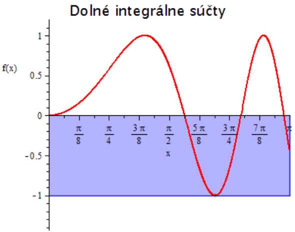
Veta 4.3

Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $[a, b]$ a nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení intervalu $[a, b]$. Potom postupnosť $\{\mathscr{S}(f, D_n, \xi^n)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná pre každý výber bodov $\xi^n \in \mathcal{N}(D_n)$ a platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \xi^n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

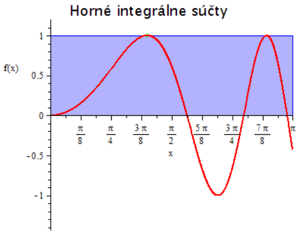
Táto veta sa dá v istom zmysle obrátiť. Platí nasledujúce:

Veta 4.4

Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $[a, b]$. Nech pre ľubovoľnú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$ a ľubovoľnú voľbu bodov $\xi^n \in \mathcal{N}(D_n)$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \xi^n)$ a je vždy rovná číslu I. Potom funkcia f je integrovateľná na intervale $[a, b]$ a platí, že $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Aproximácie integrálu z funkcie
$f(x) = \sin(x^2)$,
$s(f, D_1) = -3.1416$, err $= 3.91$.



Aproximácie integrálu z funkcie
$f(x) = \sin(x^2)$,
$s(f, D_1) = 3.1416$, err $= 2.37$.

Play/Pause

Tabuľka: Aproximácie integrálu[4] $\int_0^\pi \sin(x^2)\,dx \doteq 0.7726517130.$

n/int. súčty	dolné	náhodné	náhodné	horné
10	-0.2846	0.6294	0.6457	1.730
50	0.5694	0.7558	0.7872	0.9723
100	0.6712	0.7758	0.7805	0.8732

[4] Skutočná hodnota tohto integrálu je vyjadriteľná napr. pomocou Fresnelových integrálov.

Základné vlastnosti určitého integrálu

Skôr ako sa naučíme počítať určitý integrál, potrebujeme mať k dispozícii aspoň niektoré jeho vlastnosti.

Veta 5.1 (Lineárnosť určitého integrálu)

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech funkcie $f_1, f_2, \dots, f_k$ sú integrovateľné na intervale $[a, b]$ a $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}$. Potom aj funkcia $F = \sum_{i=1}^{k} d_i f_i$ je integrovateľná na intervale $[a, b]$ a platí, že

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{k} d_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} d_i \int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 5.2 (Aditívnosť určitého integrálu)

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Funkcia f je integrovateľná na intervale $[a_1, a_k]$ práve vtedy, keď funkcia f je integrovateľná na intervaloch $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 2, 3, \dots, k$. Naviac platí, že $\displaystyle\int_{a_1}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=2}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Veta 5.3

Nech funkcie f, g sú integrovateľné na intervale $[a, b]$. Potom

a) *ak* $m \leq f(x) \leq M$ *a* $\phi \in C([m, M])$, *tak* $\phi \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$

b) $f\,g,\ |f| \in \mathcal{R}[a, b]$

c) *ak* $g \not\equiv 0$ *na* $[a, b]$ *a* $\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x) \neq 0,\ \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x) \neq 0$, *tak*

$$\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$$

d) *ak pre každé* $x \in [a, b]$ *je* $f(x) \geq 0$, *tak* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$;

e) $\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$;

f) *ak pre každé* $x \in [a, b]$ *je* $f(x) \leq g(x)$, *tak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

Úloha 5.1

- *Nech* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$*, potom aj* $\min\{f,g\},\ \max\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$.
- *Nech* $f \in \mathcal{R}[a,b]$*, vyplýva z nerovnosti* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ *nerovnosť* $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$*?*
- *Zistite ktorý z integrálov*

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x, \ \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \sin x \,\mathrm{d}x$$

je väčší!

Na záver tejto časti si doplňme definíciu určitého integrálu, v ktorej sme definovali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ len pre prípad, keď $a, b \in \mathbb{R}$ také, že $a < b$, nasledujúcim spôsobom:

Poznámka 5.1

Poznamenajme, že predchádzajúce vety, prípadne ich vhodné modifikácie platia aj bez predpokladu $a < b$. Stačí si uvedomiť, že definitoricky platí.

Definícia 5.1

a) *Ak funkcia f je definovaná v bode $a \in \mathbb{R}$, definujme* $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

b) *Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a funkcia f je integrovateľná na $[a, b]$, potom určitý integrál $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ definujme predpisom*

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postačujúce podmienky integrovateľnosti funkcie

Ešte raz sa vráťme k otázke: Kedy existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

Veta 6.1 (Postačujúca podmienku integravateľnosti I)

Ak funkcia $f \in C([a,b])$, potom je z $\mathcal{R}[a,b]$.

čo však, ak funkcia nie je spojitá? Pokúsme sa teraz zoslabiť túto podmienku na to, aby sme aj pre niektoré nespojité funkcie mali zabezpečenú existenciu určitého integrálu. Potrebovať nasledujúcu definíciu.

Definícia 6.1

Hovoríme, že $M \subset \mathbb{R}$ má Jordanovu mieru nula, ak $\forall \varepsilon > 0$ existuje konečný počet otvorených ohraničených intervalov

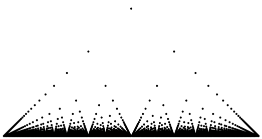
$(a_1, b_1), \ldots (a_k, b_k)$[a] *tak, že* $M \subset \cup_{i=1}^{k}(a_i, b_i)$ *a* $\sum_{i=1}^{k} |b_i - a_i| < \varepsilon$.

[a] číslo k závisí na čísle ε.

Ľahko sa ukáže, že $\chi(x)$ je nespojitá na celom definičnom obore, t.j. $\mathbb{R}$, a tá nemá Jordanovu mieru nula. Vidíme teda že množina "zlých" bodov je príliš veľká. Na druhej strane pre Thomaeova (Riemannova, alebo aj popcorn) funkcia

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ak } x = \frac{p}{q}, \\ 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné. Táto funkcia je nespojitá na $\mathbb{Q}$ (a spojitá inde), čo je tiež relatívne veľká množina, teda nemá Jordanovu mieru nula. Avšak dá sa ukázať, že je integrovateľná na ľubovolnom oraničenom intervale, pričom integrál sa rovná 0.



Obr.: Thomaeova funkcia na $[0, 1]$.

Poznámka 6.1

- *Každá konečná množina má Jordanovu mieru nula.*
- $M_1 := \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ *má Jordanovu mieru nula.*
- $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *nemá Jordanovu mieru nula.*

Uvedieme si teda vetu, v ktorej je v skutočnosti zahrnuté aj predchádzajúce tvrdenie.

Veta 6.2 (Postačujúca podmienku integravateľnosti II)

Ak $f \in C([a, b] \setminus J)$, *pričom* J *má Jordanovu mieru nula, potom* $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Uveďme ešte jedno kritérium, pričom je nutné podotknúť, že množina bodov nespojitosti (sú prvého druhu) monotónnej funkcie je nanajvýš spočítateľná, avšak nemusí byť tvorená iba z izolovaných bodov (napr. $\mathbb{Q} \cap [a, b]$).

Veta 6.3 (Postačujúca podmienku integravateľnosti III)

Nech funkcia f *je monotónna na intervale* $[a, b]$, *potom je integrovateľná na tomto intervale.*

Uvažujme funkciu $f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ 5, & x = 0. \end{cases}$. Vieme, že $f_1 \in \mathcal{R}[a,b]$, lebo je na $[0,1]$ ohraničená a má iba jeden bod nespojitosti (bod $x=0$), t.j. existuje $\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Otázka: Platí, že $\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$

Veta 6.4

Nech ohraničené funkcie f a g sú si rovné na $[a,b]$ až na množinu M, ktorá má Jordanovu mieru nula. Potom sú buď, obe funkcie integrovateľné na $[a,b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

alebo ani jedna z nich nie je integrovateľná.

Poznámka 6.2

- *Z predchádzajúcej vety vyplýva, že hodnota integrálu* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *sa nezmení, ak predpis integrovateľnej funkcie* f *zmeníme na množine s Jordanovou mierou nula (špeciálne: v konečnom počte bodov) tak, aby takto získaná funkcia bola opäť ohraničená na* $[a, b]$.
- *Tieto úvahy vedú k tomu, aby sme zaviedli integrál aj z niektorých takých funkcií, ktoré nie sú definované v každom bode intervalu* $[a, b]$.

Konečne sa ideme oboznámiť s metódami výpočtu určitých integrálov. Pôjde pritom o tri základné metódy. Prvá z nich je známa ako Newtonova–Leibnizova formula (vzorec).

Veta 7.1 (Newtonova–Leibnizova formula)

Nech funkcia $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a má na intervale (a,b) primitívnu funkciu F, pričom existujú konečné limity $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ a $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Poznámka 7.1

- *špeciálne, ak F je primitívna funkcia k f na $[a,b]$, tak* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
- *číslo $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) - \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ budeme označovať $[F(x)]_a^b$.*

- Výpočet určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, podľa Newtonovej-Leibnizovej formuly, spočíva v nájdení primitívnej funkcie F k funkcii f na danom intervale (to už vieme) a výpočte jej hodnôt v bodoch a, b, resp. jednostranných limít v týchto bodoch (a to už tiež vieme).
- Obidva predpoklady predchádzajúcej vety sú dôležité!

  Uvažujme funkciu $f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,2] \\ 2, & x \in (2,4]. \end{cases}$ Zrejme je funkcia f_2 na $[0,4]$ integrovateľná (integrál je 6), ale nemá tam primitívnu funkciu.
- Je známy príklad ohraničenej funkcie, ktorá má primitívnu funkciu, ale nie je integrovateľná na danom intervale (napr. Volterrova funkcia), nie je to však triviálny problém (pozri napr. skriptá Bukovská, Bukovský).

Limitný tvar Newtonovej Leibnizovej formuly je potrebný. Uvažujme funkciu $f(x) = \dfrac{1}{5 + 3\cos x}$ je integrovateľnú na $[0, \pi]$ s primitívnou funkciou na $[0, \pi)$

$$F(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Hodnotu F v bode π počítame pomocou jednostrannej limity (samozrejme, že by sme tam mohli F hladko dodefinovať, ale to by sme len počítali tú istú limitu).
POZOR, tým istým spôsobom (pre subst. $\tan x$ aj $\tan x/2$) by sme spočítali, že

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + 2\sin^2 x} = 0,$$

čo zrejme neplatí (správny výsledok je $\pi/\sqrt{3}$). Kde je teda chyba?

Druhou metódou výpočtu určitého integrálu je metóda per partes pre určité integrály.

Veta 7.2 (Metóda per partes)

Nech funkcie u, v majú derivácie u', v' z $\mathcal{R}[a, b]$. Potom

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x, \text{ kde}$$

$$\big[u(x)v(x)\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Aj tretia metóda má svoju analógiu medzi metódami výpočtu neurčitých integrálov. Nazývame ju substitučná metóda pre určité integrály. Predstavme ju v nasledujúcej vete.

Veta 7.3 (Substitučná metóda)

Nech funkcia f je spojitá na intervale $[A, B]$, funkcia φ má spojitú deriváciu na intervale $[\alpha, \beta]$ a nech pre každé $x \in [\alpha, \beta]$ je $\varphi(x) \in [A, B]$. Ak označíme $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, tak platí, že

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Motivácia
Základné pojmy a ich vlastnosti
Definícia Riemannovho integrálu
Integrál ako limita postupnosti integrálnych súčtov
Základné vlastnosti určitého integrálu
Postačujúce podmienky integrovateľnosti funkcie
Základné metódy výpočtu určitých integrálov
Aplikácie určitého integrálu

Poznámka 7.2

Predchádzajúca rovnosť sa dá dokázať aj za predpokladu, že $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ je monotónna spojite diferencovateľná funkcia a $\varphi([\alpha,\beta]) = [A,B]$, pričom nadobudne tvar

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(x)\big)|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 7.3

Ak naviac predpokladáme, že $\varphi'(x) \neq 0$ na intervale $[\alpha,\beta]$ (bude tým zaručená existencia inverznej funkcie $\overline{\varphi}$ k funkcii φ), tak pri označení $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, bude platiť, že

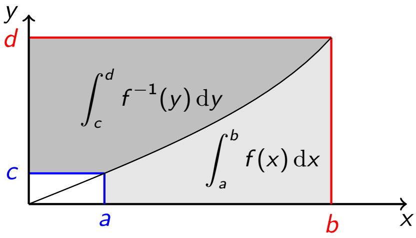
$$\int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt = \int\limits_{\overline{\varphi}(a)}^{\overline{\varphi}(b)} f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Niekedy sa dá využiť na výpočet integrálu inverznej funkcie (ktorý môže byť náročný) použiť integrál z pôvodnej funkcie.

Veta 7.4 (Integrál inverznej funkcie)

Nech f je spojitá, nezáporná a monotónna na intervale $[a, b]$, pričom $f([a, b]) = [c, d]$. Potom

$$\int_c^d f^{-1}(y)\,dy + \int_a^b f(x)\,dx = bd - ac.$$



Obr.: Grafické znázornenie vety o integrovaní inverzie

Aplikácie určitého integrálu

I. Stredná hodnota funkcie na intervale

Keď máme konečný počet reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$, kde $k \in \mathbb{N}$, tak ich charakteristikou (výpovednou hodnotou) je napr. aritmetický priemer[5], t.j. hodnota $\mu = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$.

- čo ak nemáme diskrétne hodnoty, ale máme spojitú veličinu definovanú na nejakom intervale?
- Akým spôsobom definovať strednú (priemernú) hodnotu funkcie na intervale?
- Existuje obdĺžnik so základňou $[a, b]$ a výškou $f(c)$, pričom $c \in [a, b]$, ktorého obsah bude rovný obsahu útvaru ohraničeného grafom (spojitej, nezápornej) funkcie f a priamkami $x = a, x = b, y = 0$, t.j. bude platiť, že
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b - a).$$

Hodnotu $f(c)$ nazveme **strednou hodnotou funkcie** f na intervale $[a, b]$. Spresnime naše úvahy.

---

[5] Nazývaná aj stredná (priemerná, očakávaná) hodnota.

Veta 8.1 (Veta o strednej hodnote I)

Nech $a, b, m, M \in \mathbb{R}$, $a < b$, $m \leq M$, funkcie f, $g \in \mathcal{R}[a, b]$ a nech pre každé $x \in [a, b]$ je $g(x) \geq 0$ a $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Potom existuje číslo $\xi \in [m, M]$ také, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \xi \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 8.1

Predpoklad $g(x) \geq 0$ pre každé $x \in [a, b]$ nahradíme predpokladom $g(x) \leq 0$ pre každé $x \in [a, b]$.

Dôsledok 8.1

Nech funkcia $g \in \mathcal{R}[a, b]$, funkcia $f \in C([a, b])$ a nech pre každé $x \in [a, b]$ je $g(x) \geq 0$ (resp. $g(x) \leq 0$). Potom existuje $\mu \in [a, b]$ také, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\mu) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôsledok 8.2

Nech funkcia $f \in C([a, b])$. *Potom existuje* $\mu \in [a, b]$ *také, že platí* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\mu)(b-a)$, *resp.*

$$f(\mu) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 8.2

- *číslo* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *nazývame* *stredná hodnota funkcie* f *na intervale* $[a, b]$.
- *Tento pojem je uvedeným spôsobom definovaný pre každú integrovateľnú funkciu na danom intervale.*

Úloha 8.1

Ukážte, že $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = 1 = f(c)$, *pričom existujú 2 také* $c \in (0, \pi)$, *pre ktoré to platí.*

Vo všeobecnosti (integrovateľná) funkcia f nemusí nadobúdať svoju strednú hodnotu v žiadnom bode intervalu $[a, b]$.

Príklad 8.1

Položme $g(x) = 1$, $x \in [a, b]$ *a uvažujme funkciu* $f \in \mathcal{R}[a, b] \setminus C([a, b])$. *Uvažujme funkciu* f *definovanú na intervale* $[0, 12]$ *predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} 7, x \in [0, 6) \\ 8, x \in [6, 10) \\ 10, x \in [10, 12]. \end{cases}$$

Jej stredná hodnota na intervale $[0, 12]$ *je rovná číslu* $\dfrac{47}{6}$. *Zrejme ju* f *nenadobúda v žiadnom bode tohto intervalu.*

Zameňme teraz predpoklad nezápornosti za monotónnosť.

Veta 8.2 (Veta o strednej hodnote II)

Nech g je monotónna funkcia na a, b a $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Potom existuje také číslo $\xi \in [a, b]$, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Príklad 8.2

Odhadnime $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\ A > 1$. *Funkcia* $\dfrac{1}{x}$ *je klesajúca na* $[-1, \infty],\ \sin x \in \mathcal{R}[1, A]$ *a teda*

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^c \sin x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{A}\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \cos c - \cos 1 + \frac{1}{A}(\cos c - \cos A).$$

Nakoniec

$$\left|\int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq 2 + \frac{2}{A}.$$

II. Plošný obsah rovinného útvaru

Pokúsme sa zovšeobecniť prípad z úvodu. Nech funkcie $f, g \in C([a, b])$ sú také, že pre každé $x \in [a, b]$ je $g(x) \le f(x)$. Potom môžeme definovať nasledujúce:

Definícia 8.1

Množinu všetkých bodov (x, y) roviny, pre ktoré platí $a \le x \le b$, $g(x) \le y \le f(x)$ nazývame elementárnou oblasťou určenou intervalom $[a, b]$ a funkciami f, g.

Poznámka 8.3

Zrejme predstavuje rovinný útvar, ktorý je ohraničený priamkami $x = a$, $x = b$ a krivkami o rovniciach $y = f(x)$ a $y = g(x)$ pre $x \in [a, b]$.

Veta 8.3

Nech funkcie $f, g \in C([a, b])$. Potom pre obsah A elementárnej oblasti určenej intervalom $[a, b]$ a funkciami f, g platí, že

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

III. Objem rotačného telesa

Nech funkcie $f, g \in C([a, b])$ a také, že pre každé $x \in [a, b]$ je $0 \le g(x) \le f(x)$. Definujme nasledujúce:

Definícia 8.2

Teleso, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti určenej intervalom $[a, b]$ a funkciami f, g (resp. rovinného útvaru ohraničeného priamkami $x = a$, $x = b$ a grafmi funkcií f, g na intervale $[a, b]$) okolo x-ovej osi nazývame rotačné teleso určené intervalom $[a, b]$ a funkciami f, g.

O výpočte objemu rotačného telesa hovorí nasledujúca veta.

Veta 8.4

Nech funkcie $f, g \in C([a, b])$ a pre každé $x \in [a, b]$ je $0 \le g(x) \le f(x)$. Potom pre objem V rotačného telesa určeného intervalom $[a, b]$ a funkciami f, g platí, že

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) \mathrm{d}x.$$

IV. Dĺžka rovinnej krivky

Nech funkcia $f \in C([a, b])$. Potom si definujme nasledujúce:

Definícia 8.3

Množinu všetkých bodov (x, y) roviny, pre ktoré platí $a \leq x \leq b$, $y = f(x)$ nazývame rovinnou krivkou určenou $[a, b]$ a funkciou f.

Uveďme si teraz vetu, ktorá hovorí o spôsobe výpočtu dĺžky rovinnej krivky.

Veta 8.5

Nech funkcia $f \in C^1([a, b])$. Potom dĺžka ℓ rovinnej krivky určenej intervalom $[a, b]$ a funkciou f existuje a platí pre ňu, že

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

My sme krivku uvažovali vo veľmi špeciálnom tvare, pretože sme ju považovali za graf istej "rozumnej" funkcie.

Definícia 8.4

Množinu všetkých bodov (x, y) roviny, pre ktoré platí $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$, kde $\phi, \psi \in C^1([\alpha, \beta])$ nazývame parametricky danou rovinnou krivkou.

Vyslovíme bez dôkazu vetu:

Veta 8.6

Nech je parametricky daná rovinná krivka (pomocou funkcií ϕ, ψ). Potom pre jej dĺžku ℓ platí

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 8.3

Vypočítajme dĺžku cykloidy :
$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$. *Zrejme*

$$\ell = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8a.$$

V. Plošný obsah rotačnej plochy

Vypočítajme teraz povrch rotačného telesa:

Definícia 8.5

Plochu, ktorá vznikne rotáciou krivky danej grafom funkcie f na intervale $[a, b]$ okolo x-ovej osi nazývame rotačná plocha určená intervalom $[a, b]$ a funkciou f.

Pod povrchom rozumieme iba jeho "plášť".

Veta 8.7

Nech funkcia $f \in C^1([a, b])$. Potom pre obsah S rotačnej plochy určenej intervalom $[a, b]$ a funkciou f platí, že

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 8.4

Podobne ako v prípade dĺžky rovinnej krivky je možný všeobecnejší variant vety. Nech je parametricky daná rovinná krivka (pomocou funkcií $\phi, \psi \in C^1([\alpha, \beta])$). Potom platí

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

VI. Niektoré fyzikálne veličiny

Uvažujme rovinný útvar Γ ohraničený grafmi spojitých funkcií f, g, pričom $f \leq g$ na intervale $[a, b]$, pričom hustota závisí len od súradnice x a je daná spojitou funkciou $\rho(x)$. Potom máme definované veličiny:

- hmotnosť $m_\Gamma = \displaystyle\int_a^b \rho(x)(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$;
- statické momenty

$$S_\Gamma^x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho(x)(f(x)^2 - g(x)^2)\,\mathrm{d}x,$$

$$S_\Gamma^y = \int_a^b \rho(x)x\,(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x;$$

- súradnice ťažiska $x_T = \dfrac{S_\Gamma^y}{m_\Gamma}, \quad y_T = \dfrac{S_\Gamma^x}{m_\Gamma}$;
- momenty zotrvačnosti

$$I_\Gamma^x = \frac{1}{3}\int_a^b \rho(x)(f(x)^3 - g(x)^3)\,\mathrm{d}x,$$

$$I_\Gamma^y = \int_a^b \rho(x)x^2\,(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x;$$

Nevlastný integrál

- Určitý Riemannov integrál funkcie sme definovali pre ohraničené funkcie definované na ohraničenom intervale.
- Prirodzene vzniká otázka: je možné rozšíriť pojem určitého integrálu aj na funkcie definované na neohraničenom intervale alebo na neohraničené funkcie definované na ohraničenom intervale?
- Ukážeme si, ako sa to dá urobiť. Takéto integrály budeme nazývať nevlastné integrály. Rozlíšime dva základné typy nevlastných integrálov:
  - nevlastný integrál na neohraničenom intervale;
  - nevlastný integrál z neohraničenej funkcie.

1. Integrál na neohraničenom intervale

Uvažujme interval $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, na ktorom chceme zaviesť nevlastný integrál

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definícia 9.1

Nech funkcia f je definovaná na intervale $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$ a nech pre každé $c \geq a$ je $f \in \mathcal{R}[a, c]$. Ak existuje vlastná limita funkcie $F(c) := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, pre $c \to \infty$, nazýva sa nevlastný (Riemannov) integrál funkcie f na intervale $[a, \infty)$ a označuje sa

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} F(c).$$

Ak daná limita neexistuje alebo je nevlastná, tak hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Poznámka 9.1

Obdobne sa definuje nevlastný (Riemannov) integrál funkcie f na intervale $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Urobme krátku ''odbočku'', doplnenie. Vyslovíme vetu, ktorá hovorí, že nevlastný integrál už prezentovaného typu je spojitou analógiou nekonečných číselných radov.

Veta 9.1 (Integrálne kritérium konvergencie číselných radov)

Nech funkcia f je spojitá, nezáporná, nerastúca na intervale $[K, +\infty)$, $K \in \mathbb{R}$ a nech existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $f(n) = a_n$. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď nevlastný integrál $\int_{K}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

2. Integrál z neohraničenej funkcie

Definícia 9.2

*Nech funkcia f je definovaná na intervale $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ a je neohraničená na intervale $(b-\delta, b)$ pre ľubovoľné $0 < \delta < b-a$. Nech pre každé $c \in [a, b)$ je $f \in \mathcal{R}[a, c]$. Ak existuje vlastná limita funkcie $F(c) := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, pre $c \to b^-$, nazýva sa **nevlastný (Riemannov) integrál** funkcie f na intervale $[a, b)$ a označuje sa*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to b^-} F(c).$$

*Ak daná limita neexistuje alebo je nevlastná, tak hovoríme, že **nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje**.*

Poznámka 9.2

Podobne sa definuje nevlastný integrál z funkcie neohraničenej na pravom okolí bodu a: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Všeobecný prípad nevlastného integrálu (s konečným počtom singulárnych bodov)

V rôznych situáciách sa však môžeme stretnúť s funkciou, ktorá má viacero problémových bodov. Napr. uvažujme integrál

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)}$, kde integrandom je funkcia neohraničená na okolí bodu 1, aj bodu 2 a naviac interval integrácie je neohraničený.

Definícia 9.3

Bod x_0 nazveme singulárnym (kritickým) bodom funkcie f, ak

- *alebo je f definovaná v $(x_0-\delta, x_0)$ a je v ňom neohraničená pre každé dostatočne malé číslo $\delta > 0$;*
- *alebo je f definovaná a neohraničená v $(x_0, x_0+\delta)$, kde $\delta > 0$ je ľubovoľné dostatočne malé číslo;*
- *alebo je f definovaná v $(a, x_0) := (a, \infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$;*
- *alebo je f definovaná v $(x_0, a) := (-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.*

Motivácia
Základné pojmy a ich vlastnosti
Definícia Riemannovho integrálu
Integrál ako limita postupnosti integrálnych súčtov
Základné vlastnosti určitého integrálu
Postačujúce podmienky integrovateľnosti funkcie
Základné metódy výpočtu určitých integrálov
Aplikácie určitého integrálu

Rozšírme teda definíciu nevlastného integrálu na prípad, keď funkcia f má na intervale $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$, konečný počet kritických bodov.

Definícia 9.4

Nech funkcia f je definovaná na intervale $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$, s výnimkou konečného počtu kritických bodov $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$, $k \in \mathbb{N}$ [a]. Nech v každom uzavretom podintervale intervalu $[a, b]$, ktorý neobsahuje ani jeden z kritických bodov, je funkcia f integrovateľná. Hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, ak pre každú postupnosť bodov $\{d_i\}_{i=0}^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ takú, že $a < d_0 < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < c_k < d_k < b$ konvergujú integrály $\int_a^{d_0} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{d_0}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{d_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{c_i}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x$, $i = 1\ldots, k$, a platí, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x :=$

$$\int_a^{d_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d_0}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{k} \int_{c_i}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[a] Aj body a, b môžu byť kritické body funkcie f.

Ak aspoň jeden z uvedených integrálov diverguje, tak hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje. Dá sa ukázať, že táto definícia je korektná, t.j. nie je závislá od voľby bodov $d_0, d_1, \ldots, d_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.