Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 1

22. septembra 2023

Podmienky

- nepovinná účasť na prednáškach (!nie na cvičeniach!)
- jedinečná možnosť pýtať sa!!!
- podmienky ku skúške (zverejnené koncom semestra)

Obsah

VI. Určitý integrál – Newtonov integrál, Riemannov integrál, nevlastný Riemannov integrál [cca 7 prednášok]

VII. Číselné a funkcionálne rady – postupnosti čísel, kritériá konvergencie, postupnosti funkcií, bodová a rovnomerná konvergencia, Taylorove a mocninové rady [cca 6 prednášok]

Podmienky

- nepovinná účasť na prednáškach (!nie na cvičeniach!)
- jedinečná možnosť pýtať sa!!!
- podmienky ku skúške (zverejnené koncom semestra)

Obsah

VI. Určitý integrál – Newtonov integrál, Riemannov integrál, nevlastný Riemannov integrál [cca 7 prednášok]

VII. Číselné a funkcionálne rady – postupnosti čísel, kritériá konvergencie, postupnosti funkcií, bodová a rovnomerná konvergencia, Taylorove a mocninové rady [cca 6 prednášok]

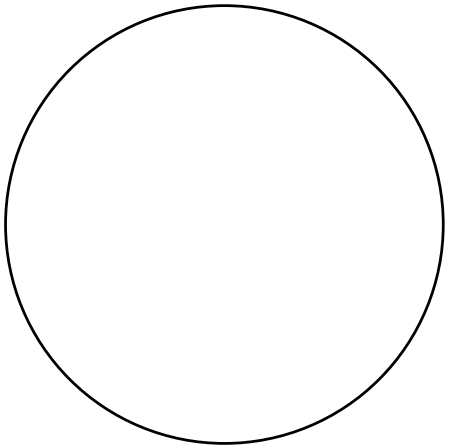
Literatúra k prednáškam

1. Mihalíková, B. – Ohriska, J.: *Matematická analýza 2*, skriptá UPJŠ, Košice, 2007.
2. Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: *Matematika I.*, Alfa, Bratislava, 1966 (v závislosti od vydania).
3. Hutník, O.: *Určitý integrál*, el. skriptá PF UPJŠ, Košice, 2012. `http://www.upjs.sk/public/media/5596/Urcity-integral.pdf`
4. Mihalíková, B., Hutník, O., Kiseľák, J.: *Matematická analýza 3. Nekonečné číselné a funkcionálne rady* `https://unibook.upjs.sk/img/cms/2021/pf/matematicka_analyza3-final.pdf`
5. ďalšie dostupné texty...

Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

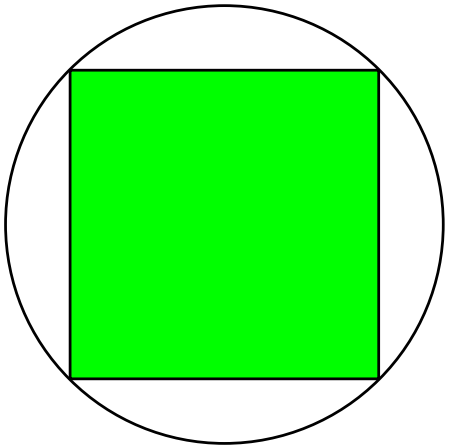
Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)



Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

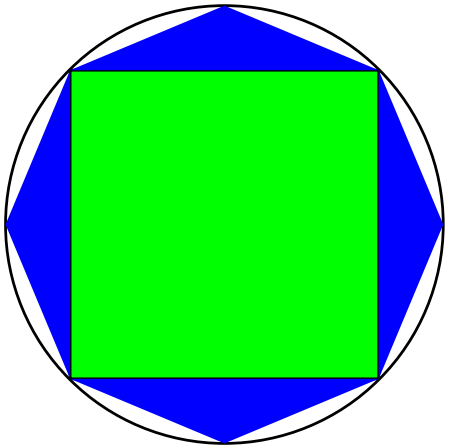
Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)



Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

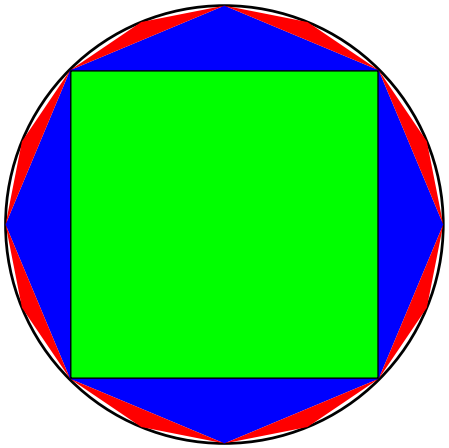
Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)



Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

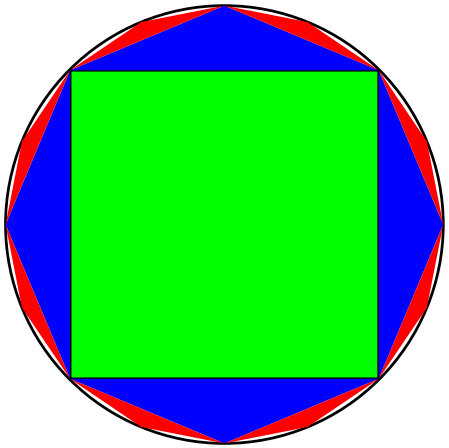
Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)

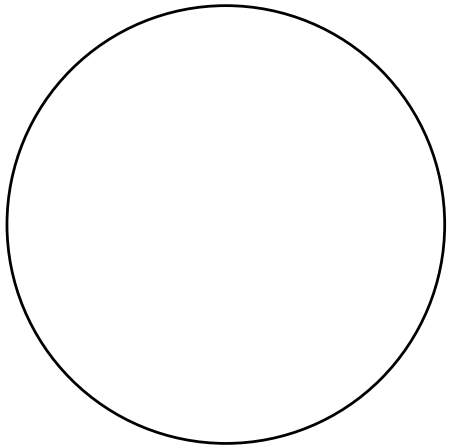


Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)

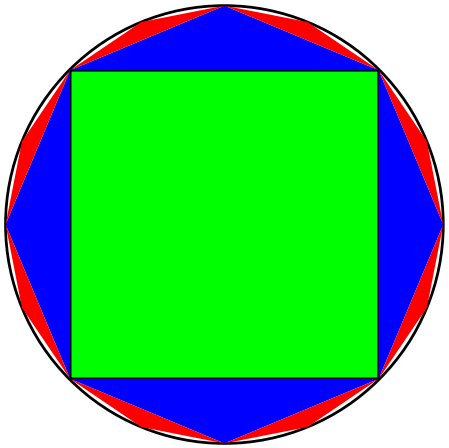


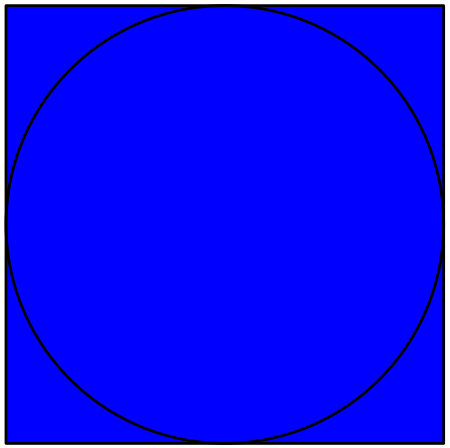


Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)

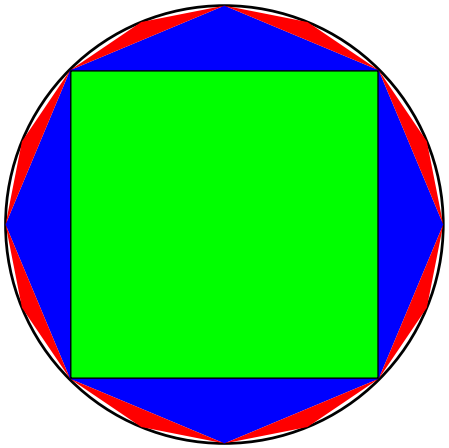


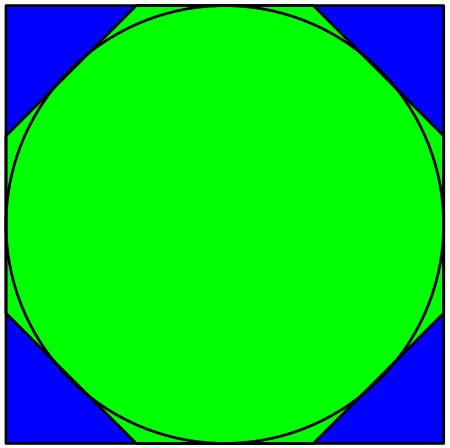


Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)

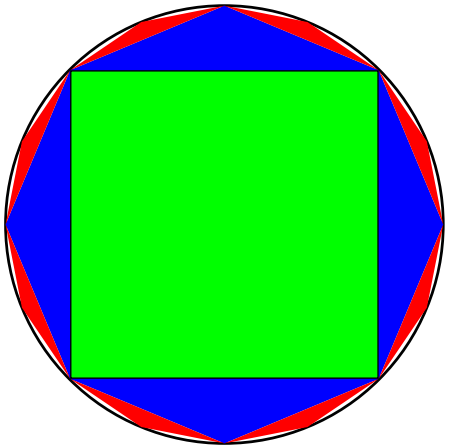


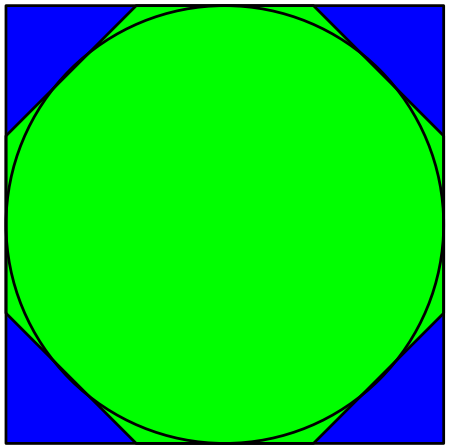


Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)



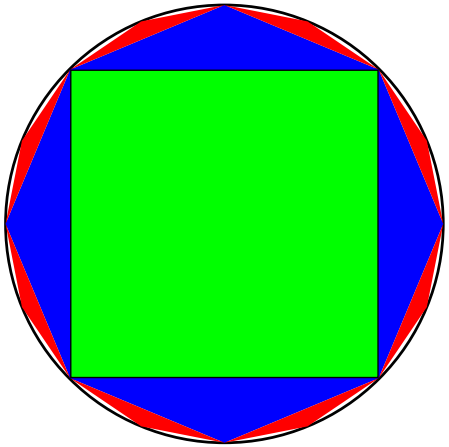


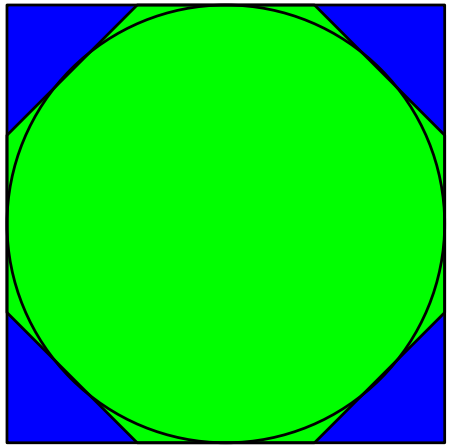
$$\text{obvod} : \text{priemer} = \text{obsah} : \text{štvorec polomeru} = \text{konštanta}$$

Trochu histórie: Archimedes – plocha kruhu

Pocítil som nutnosť napísať Ti [pozn. Eratostenovi] a v tejto knihe vyložiť jednu zvláštnu metódu, pomocou ktorej získaš možnosť nájsť niektoré matematické vety pomocou mechaniky. Verím, že Ti táto metóda bude nemenej užitočná i k dôkazom samotných viet. Naozaj, čokoľvek som najprv nahliadol pomocou mechaniky, neskôr som dokázal i geometricky, pretože to, čo sa nahliadne touto metódou, nie je ešte dôkaz; je ale oveľa jednoduchšie získať pomocou nej nejakú predstavu o skúmanej veci a potom nájsť i dôkaz, ako keď sa skúma a nič sa nevie.
.... preto som sa rozhodol napísať o tejto metóde a zverejniť ju, jednak preto, aby moje predchádzajúce odkazy na ňu nezostali prázdnymi slovami, ale tiež preto, že som presvedčený, že môže priniesť matematike nemalý úžitok; predpokladám, že niektorí súčasní alebo budúci matematici budú vedieť predvedenou metódou nájsť aj iné vety, ktoré nám ešte neprišli na um.

Archimedes: *Metóda* (z pergamenu nájdeného v Carihrade v roku 1906)





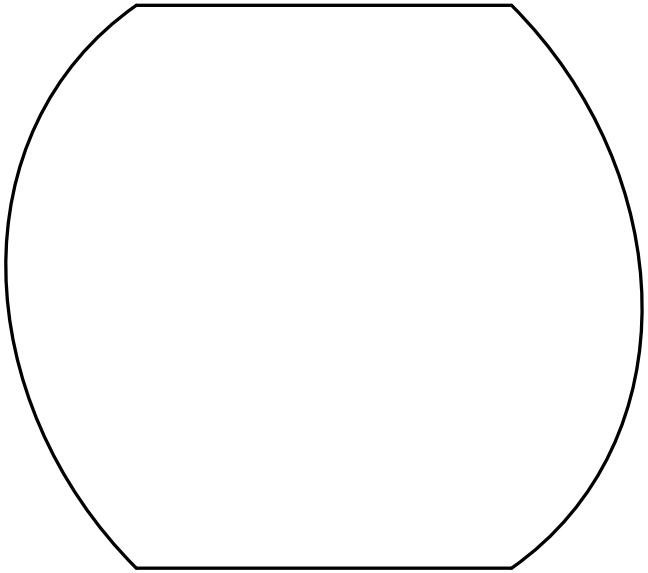
$$\text{obvod} : \text{priemer} = \text{obsah} : \text{štvorec polomeru} = \text{konštanta}$$

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{30}{71} \qquad 3,1408 < \pi < 3,1429$$

Trochu histórie: Kepler – problém objemov vínnych sudov

Kepler's approach in [his Stereometria was] to dissect a given solid into an ... infinite number of infinitesimal pieces, or solid 'indivisibles', of a size and shape convenient to the solution of the particular problem.

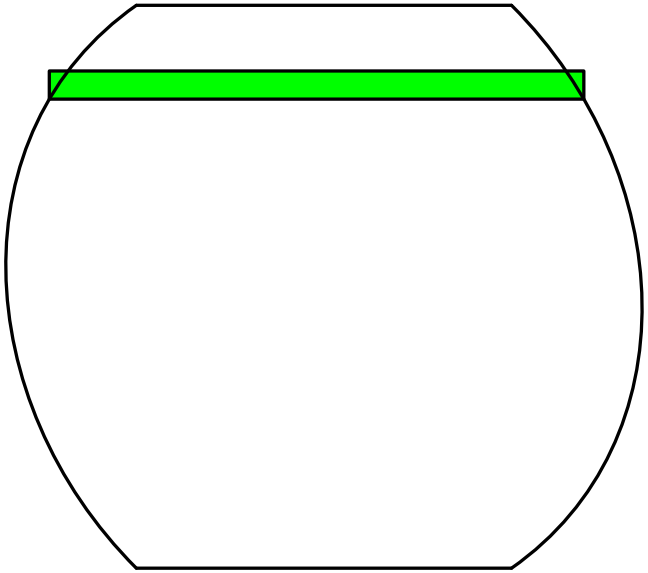
Edwards k dielu Kepler: *Nova Stereometria Doliurum Vinariorum* (1615)



Trochu histórie: Kepler – problém objemov vínnych sudov

Kepler's approach in [his Stereometria was] to dissect a given solid into an ... infinite number of infinitesimal pieces, or solid 'indivisibles', of a size and shape convenient to the solution of the particular problem.

Edwards k dielu Kepler: *Nova Stereometria Doliurum Vinariorum* (1615)

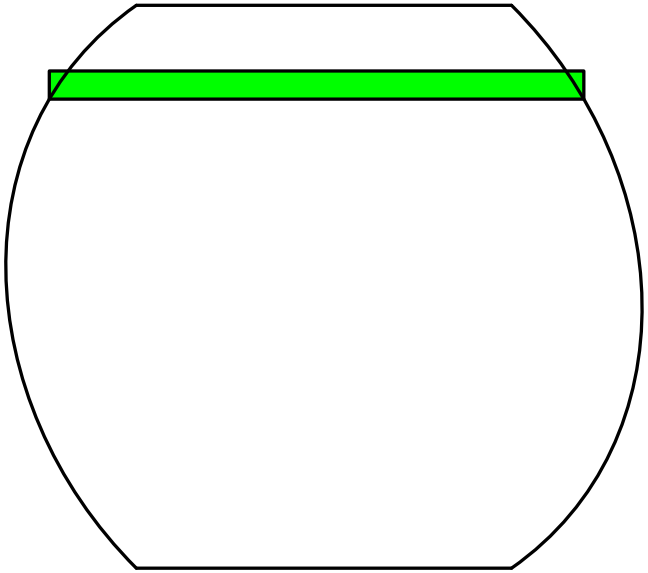


rozrezal teleso na nízke "válce"

Trochu histórie: Kepler – problém objemov vínnych sudov

Kepler's approach in [his Stereometria was] to dissect a given solid into an ... infinite number of infinitesimal pieces, or solid 'indivisibles', of a size and shape convenient to the solution of the particular problem.

Edwards k dielu Kepler: *Nova Stereometria Doliurum Vinariorum* (1615)



rozrezal teleso na nízke "válce"

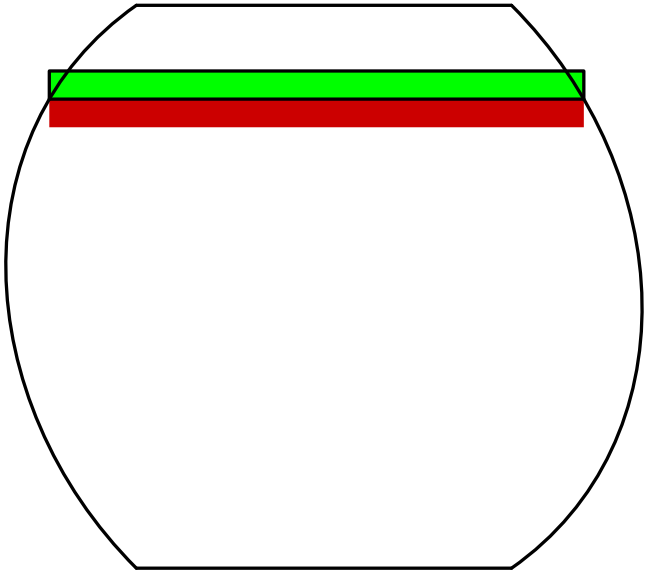
objem válca vie spočítať

objem suda $<$ súčet objemov týchto válcov

Trochu histórie: Kepler – problém objemov vínnych sudov

Kepler's approach in [his Stereometria was] to dissect a given solid into an ... infinite number of infinitesimal pieces, or solid 'indivisibles', of a size and shape convenient to the solution of the particular problem.

Edwards k dielu Kepler: *Nova Stereometria Doliurum Vinariorum* (1615)



rozrezal teleso na nízke "válce"

objem válca vie spočítať

objem suda $<$ súčet objemov týchto válcov

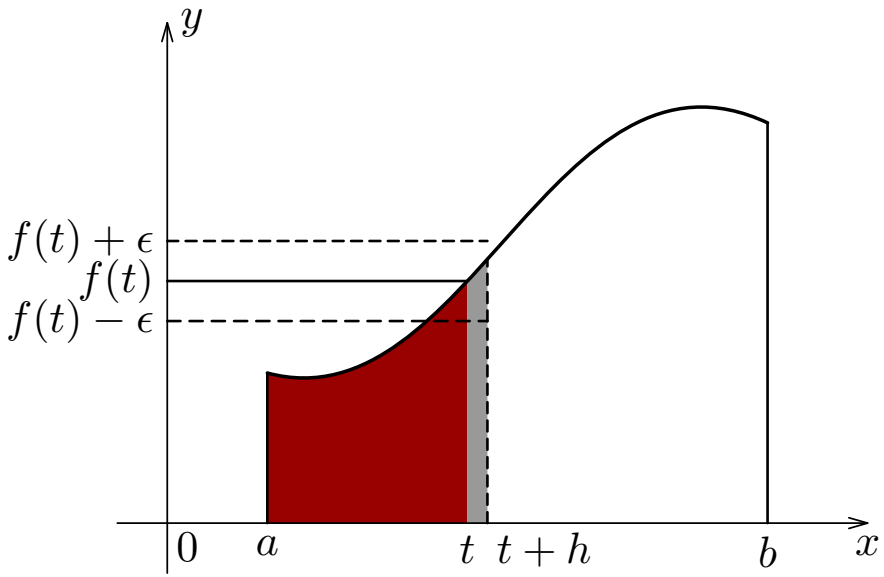
alebo

objem suda $>$ súčet objemov týchto válcov

All this was in the two plague years of 1665 and 1666, for in those days I was in the prime of my age for invention, and minded mathematics and philosophy more than at any other time since.

Newton o svojom *Annus mirabilis*

Problém: Nech f je spojitá, nezáporná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť *funkciu obsahu P útvaru pod touto krivkou.*



pre $t \in < a, b)$ označíme $P(t)$ plochu útvaru $\{[x, y] : a \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$

ak x vzrastie z t na $t+h$, (malé $h > 0$) zmení sa obsah o... $P(t+h) - P(t)$

pre odhad zmeny obsahu použijeme spojitosť f v bode t..$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$

$$(t < x < t+\delta \Rightarrow f(t) - \epsilon < f(x) < f(t) + \epsilon)$$

pre $h < \delta$

$$h(f(t) - \epsilon) < P(t+h) - P(t) < h(f(t) + \epsilon)$$

$$\left|\frac{P(t+h)-P(t)}{h} - f(t)\right| < \epsilon \quad \text{t.j. } \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = f(t)$$

$$P'(t) = f(t),\ t \in < a, b)$$

to znamená, že P je jedna z primitívnych funkcií k f a to tá, že $P(a) = 0$

Nous désignons en général par le signe $\int_b^a$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complete lorsque la variable équivaut à b...

Fourier: *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Newtonov určitý integrál

Definícia - Newtonov integrál

Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, $\langle a, b\rangle \subset I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Číslo $F(b) - F(a)$ nazývame Newtonov určitý integrál (skrátene $\mathscr{N}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak existuje $\mathscr{N}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia f je Newtonovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{N}$-integrovateľná) na intervale $\langle a, b\rangle$. Množinu všetkých $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{N}\langle a, b\rangle$.

Poznámka: ak F je primitívna k f na (a, b), potom môžeme $\mathscr{N}$-integrál zaviesť ako

$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

ak rozdiel na pravej strane má zmysel.

Nous désignons en général par le signe $\int_b^a$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complete lorsque la variable équivaut à b...

Fourier: *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Newtonov určitý integrál

Definícia - Newtonov integrál

Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, $\langle a, b\rangle \subset I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Číslo $F(b) - F(a)$ nazývame Newtonov určitý integrál (skrátene $\mathscr{N}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak existuje $\mathscr{N}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia f je Newtonovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{N}$-integrovateľná) na intervale $\langle a, b\rangle$. Množinu všetkých $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{N}\langle a, b\rangle$.

Poznámka: ak F je primitívna k f na (a, b), potom môžeme $\mathscr{N}$-integrál zaviesť ako

$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

ak rozdiel na pravej strane má zmysel.

Nous désignons en général par le signe $\int_b^a$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complete lorsque la variable équivaut à b...

Fourier: *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

Newtonov určitý integrál

Definícia - Newtonov integrál

Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, $\langle a, b\rangle \subset I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Číslo $F(b) - F(a)$ nazývame Newtonov určitý integrál (skrátene $\mathscr{N}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak existuje $\mathscr{N}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia f je Newtonovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{N}$-integrovateľná) na intervale $\langle a, b\rangle$. Množinu všetkých $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{N}\langle a, b\rangle$.

Poznámka: ak F je primitívna k f na (a, b), potom môžeme $\mathscr{N}$-integrál zaviesť ako

$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

ak rozdiel na pravej strane má zmysel.

Základné vlastnosti a výpočet $\mathscr{N}$-integrálu

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(i) $(\mathscr{N})\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ a $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathscr{N})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) linearita:
$(\mathscr{N})\int_a^b (\alpha_1 f(x) \pm \alpha_2 g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha_1(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \alpha_2(\mathscr{N})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

(iii) aditivita: $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{N})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

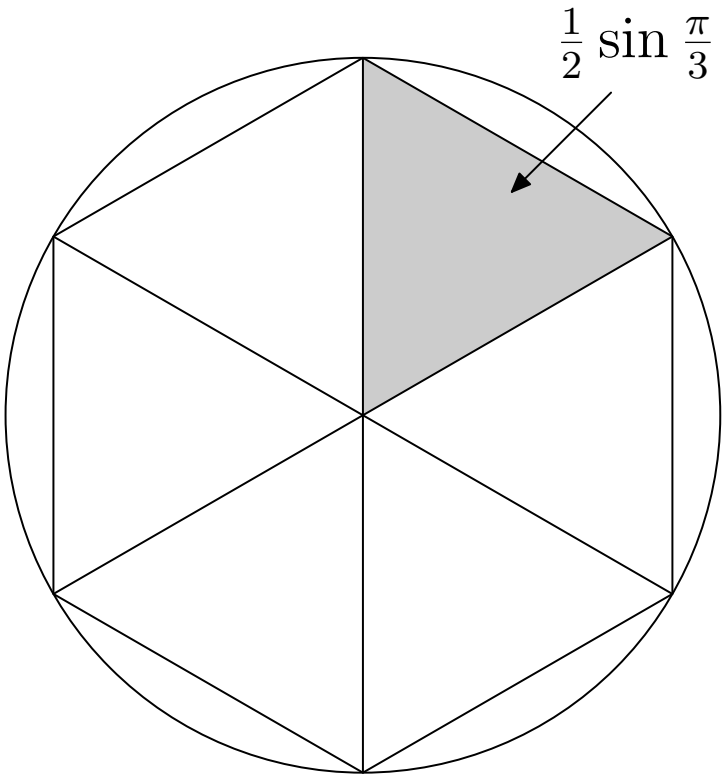
(iv) monotónnosť: ak $f(x) \geq g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$, tak
$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{N})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

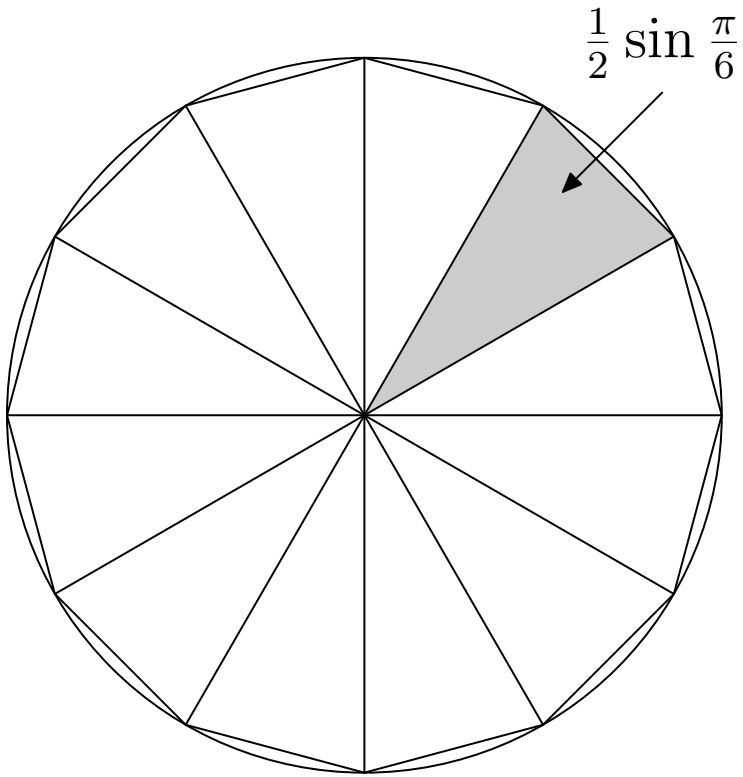
(v) substitučná metóda: $(\mathscr{N})\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$;

(vi) metóda per partes:
$(\mathscr{N})\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - (\mathscr{N})\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$;

(II) Riemannov určitý integrál

Myšlienka vpisovania mnohouholníkov opäť!

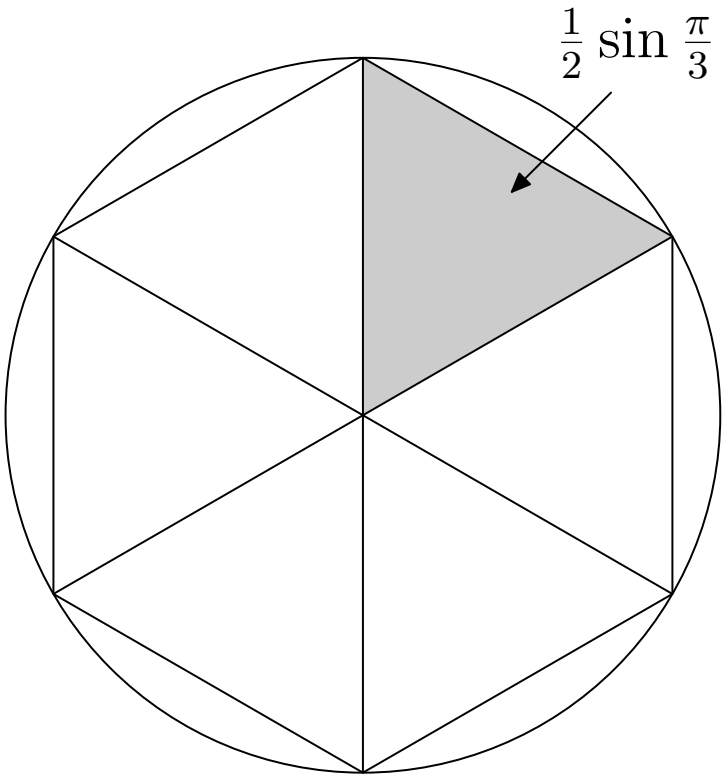


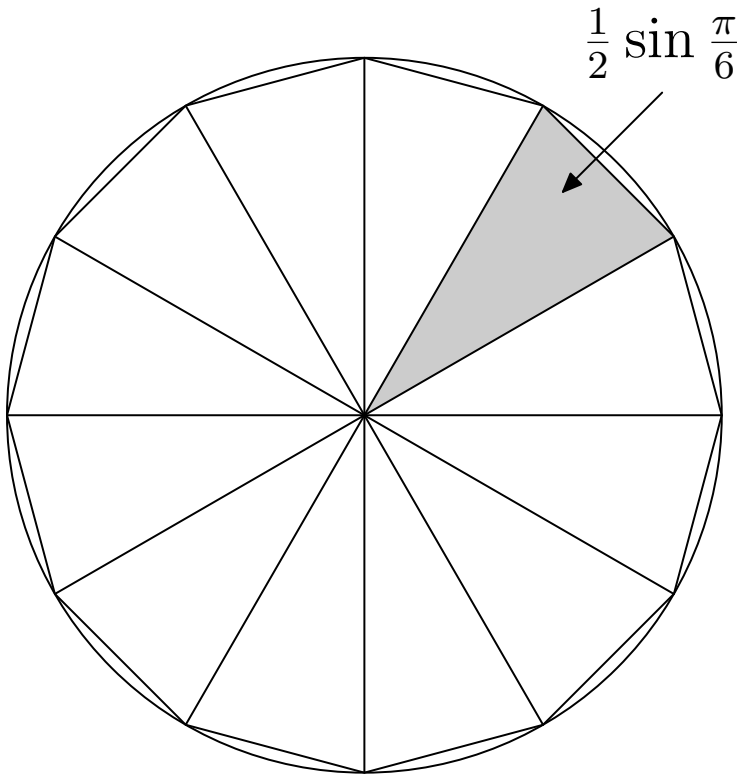


$$a_n = \frac{1}{2} s_n \sin\frac{2\pi}{s_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s_n = 3 \times 2^n$$

(II) Riemannov určitý integrál

Myšlienka vpisovania mnohouholníkov opäť!

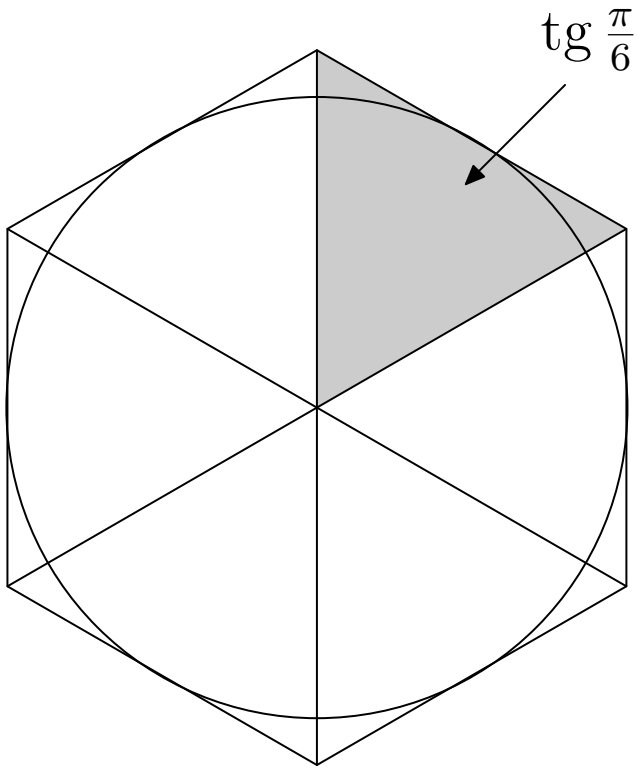


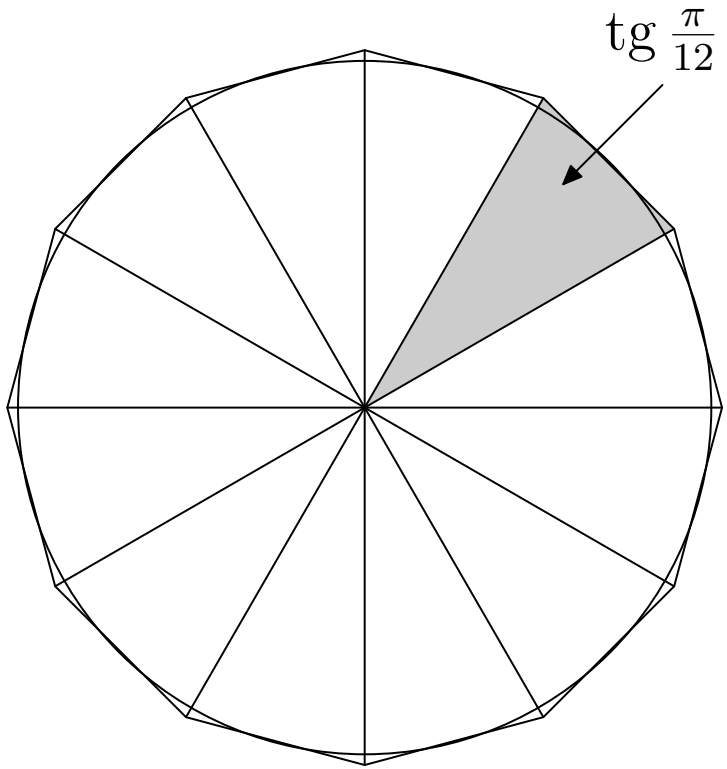


$$a_n = \frac{1}{2} s_n \sin\frac{2\pi}{s_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s_n = 3 \times 2^n$$

(II) Riemannov určitý integrál

Myšlienka opisovania mnohouholníkov opäť!

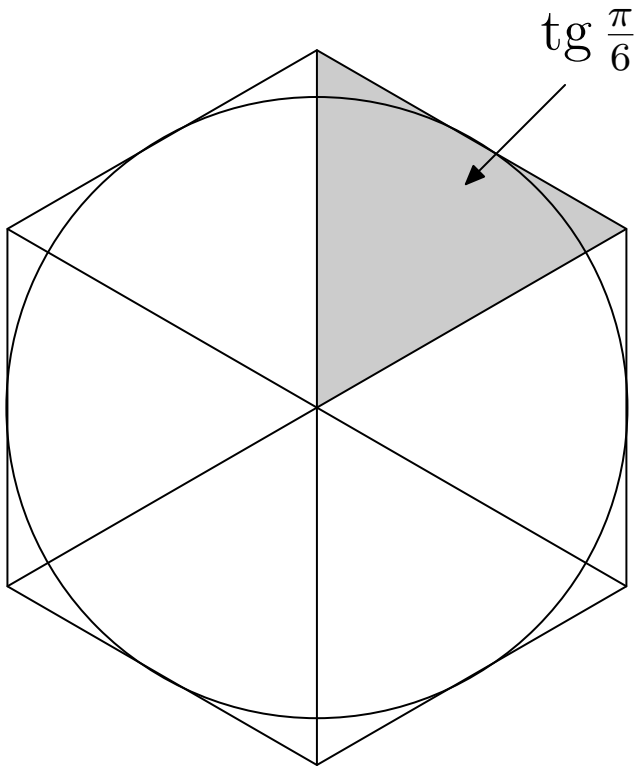


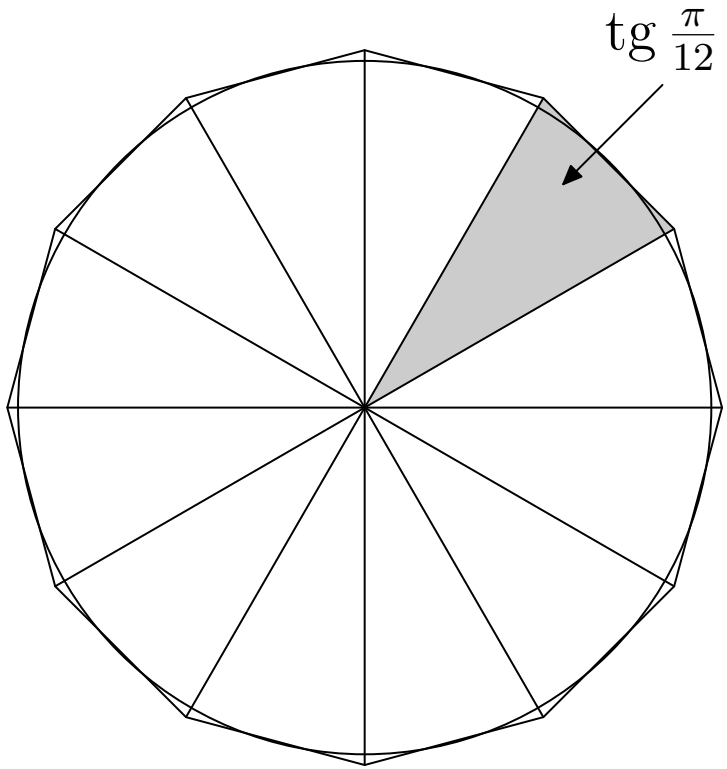


$$b_n = s_n \operatorname{tg}\frac{\pi}{s_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s_n = 3 \times 2^n$$

(II) Riemannov určitý integrál

Myšlienka opisovania mnohouholníkov opäť!





$$b_n = s_n \operatorname{tg}\frac{\pi}{s_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s_n = 3 \times 2^n$$

Zovšeobecnenie myšlienky vpisovania a opisovania

Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu

By one of those insights of which only the greatest minds are capable, the famous geometer [Riemann] generalises the concept of the definite integral, ...

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Considérons la somme

$$\Sigma = \delta_1 f(a + \theta_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2 \delta_2) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \theta_n \delta_n).$$

Il est clair qu'elle dépend à la fois du choix des intervalles δ et des quantités θ. Examinons d'abord comment elle varie quand on donne aux θ tous les systèmes possibles de valeurs.

Désignons par M_i, m_i les limites maxima et minima de la fonction dans le $i^{ième}$ intervalle. Le terme $\delta_i f(x_i + \theta_{i+1} \delta_{i+1})$ demeurera compris lorsque θ_{i+1} variera entre $\delta_i M_i$ et $\delta_i m_i$, et il s'approchera autant qu'on le voudra de l'une ou de l'autre de ces quantités. Donc la somme Σ demeurera comprise entre les deux sommes

$$M = \delta_1 M_1 + \ldots + \delta_n M_n,$$
$$m = \delta_1 m_1 + \ldots + \delta_n m_n,$$

dont elle pourra s'approcher autant qu'on voudra.

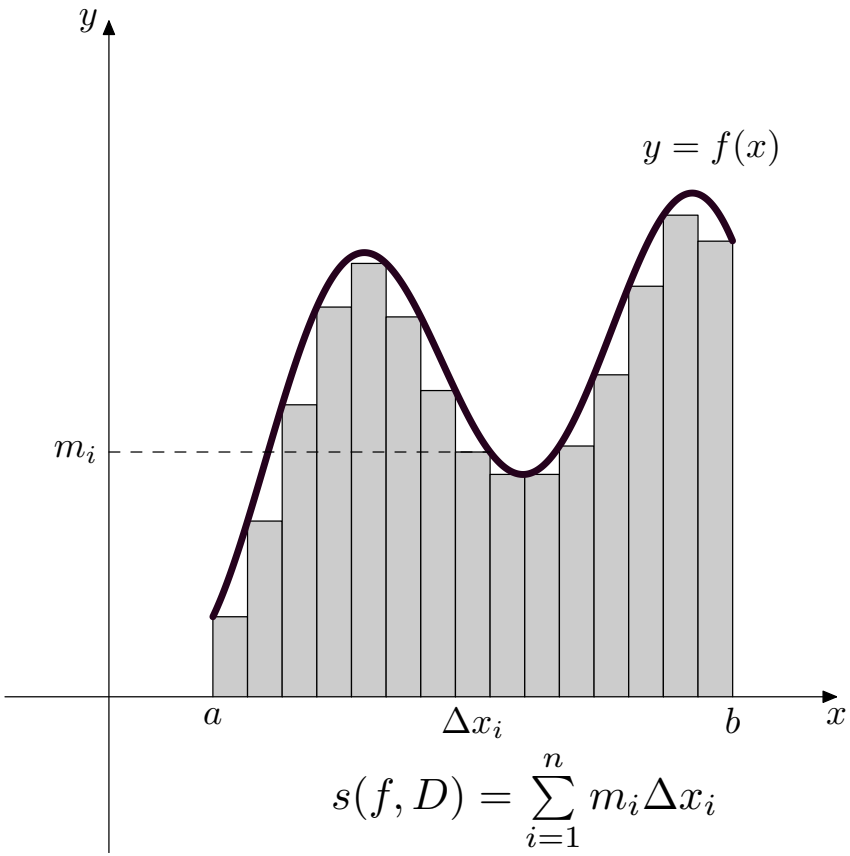
JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917)

Zovšeobecnenie myšlienky vpisovania a opisovania

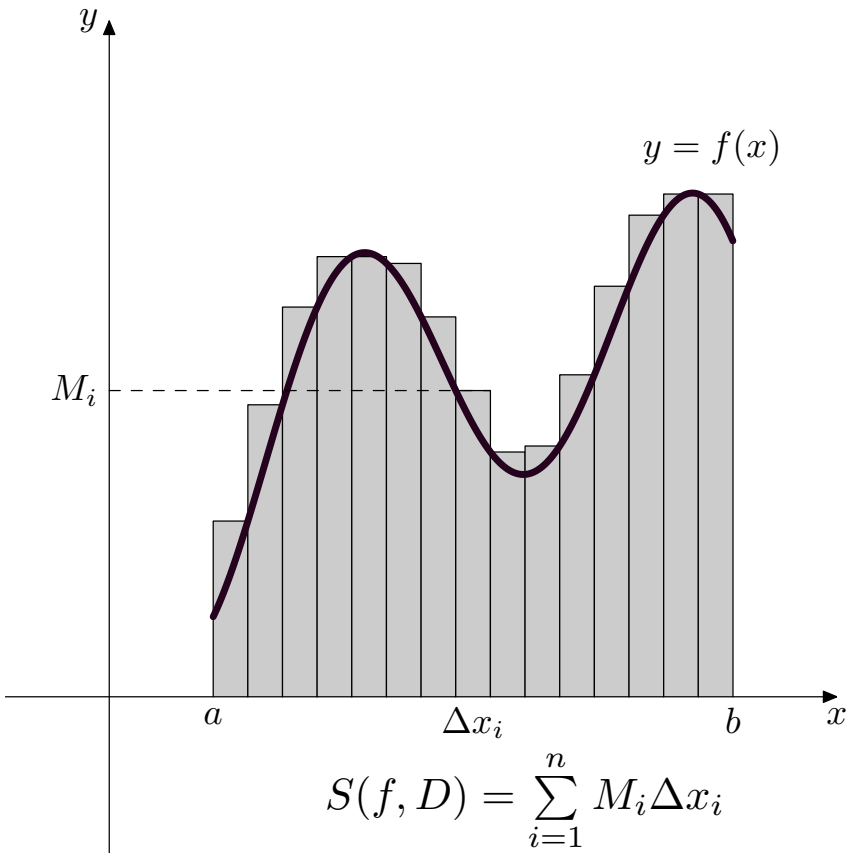
Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu

By one of those insights of which only the greatest minds are capable, the famous geometer [Riemann] generalises the concept of the definite integral, ...

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)



$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$



$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Dvakrát meraj a raz strihaj...

Definícia - delenie intervalu

Delením intervalu $\langle a, b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ takých, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Čísla x_i, $i = 0, 1, \dots, n$ nazývame deliacimi bodmi delenia D a intervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ čiastočnými intervalmi delenia D. Množinu všetkých delení D intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $\mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Čísla

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

nazývame *dolný* a *horný Darbouxov súčet* prislúchajúci ohraničenej funkcii f na $\langle a, b\rangle$ a deleniu $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n; n \in \mathbb{N}\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, kde

Δx_i ..... dĺžka i-teho čiastočného intervalu $I_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$

$m_i = \inf\limits_{x \in I_i} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Dvakrát meraj a raz strihaj...

Definícia - delenie intervalu

Delením intervalu $\langle a, b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ takých, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Čísla x_i, $i = 0, 1, \dots, n$ nazývame *deliacimi bodmi delenia* D a intervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ *čiastočnými intervalmi delenia* D. Množinu všetkých delení D intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $\mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Čísla

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

nazývame dolný a horný Darbouxov súčet prislúchajúci ohraničenej funkcii f na $\langle a, b\rangle$ a deleniu $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n; n \in \mathbb{N}\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, kde

Δx_i ..... dĺžka i-teho čiastočného intervalu $I_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$

$m_i = \inf\limits_{x \in I_i} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Dvakrát meraj a raz strihaj...

Definícia - delenie intervalu

Delením intervalu $\langle a, b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ takých, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Čísla x_i, $i = 0, 1, \dots, n$ nazývame *deliacimi bodmi delenia* D a intervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ *čiastočnými intervalmi delenia* D. Množinu všetkých delení D intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $\mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Čísla

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

nazývame *dolný* a *horný Darbouxov súčet* prislúchajúci ohraničenej funkcii f na $\langle a, b\rangle$ a deleniu $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n; n \in \mathbb{N}\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, kde

Δx_i ..... dĺžka i-teho čiastočného intervalu $I_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$

$m_i = \inf\limits_{x \in I_i} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Dvakrát meraj a raz strihaj...

Definícia - delenie intervalu

Delením intervalu $\langle a, b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ takých, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Čísla x_i, $i = 0, 1, \dots, n$ nazývame *deliacimi bodmi delenia* D a intervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ *čiastočnými intervalmi delenia* D. Množinu všetkých delení D intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $\mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Čísla

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

nazývame *dolný* a *horný Darbouxov súčet* prislúchajúci ohraničenej funkcii f na $\langle a, b\rangle$ a deleniu $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n; n \in \mathbb{N}\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, kde

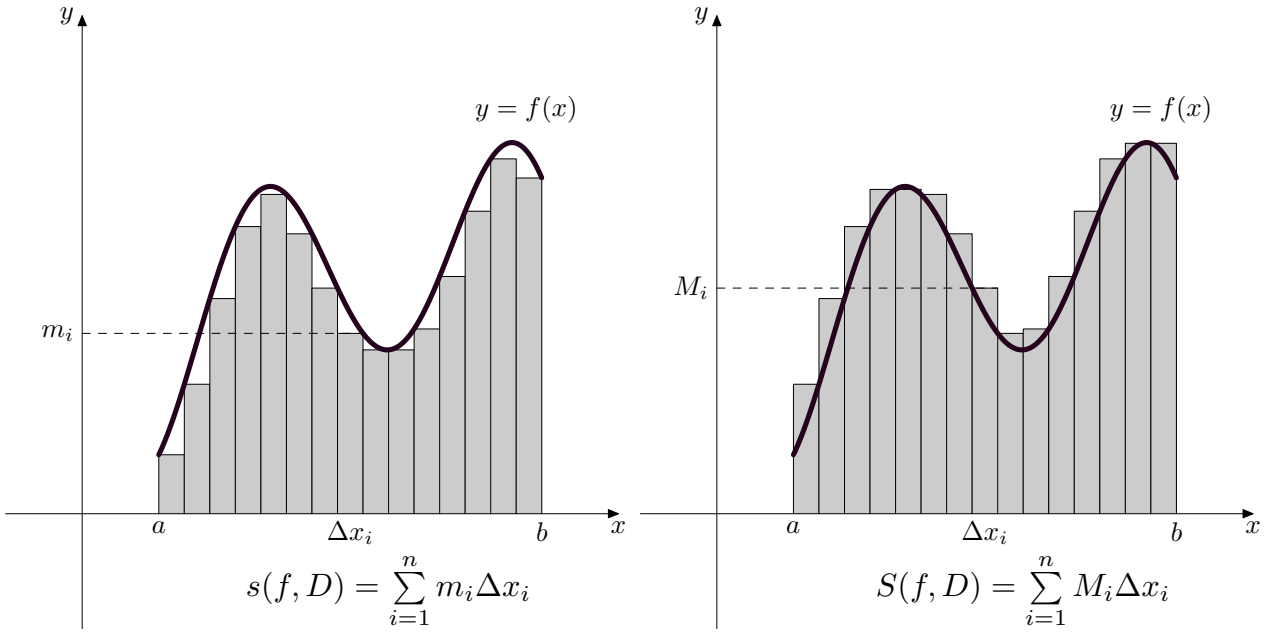
Δx_i ..... dĺžka i-teho čiastočného intervalu $I_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$

$m_i = \inf\limits_{x \in I_i} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Darbouxove súčty

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

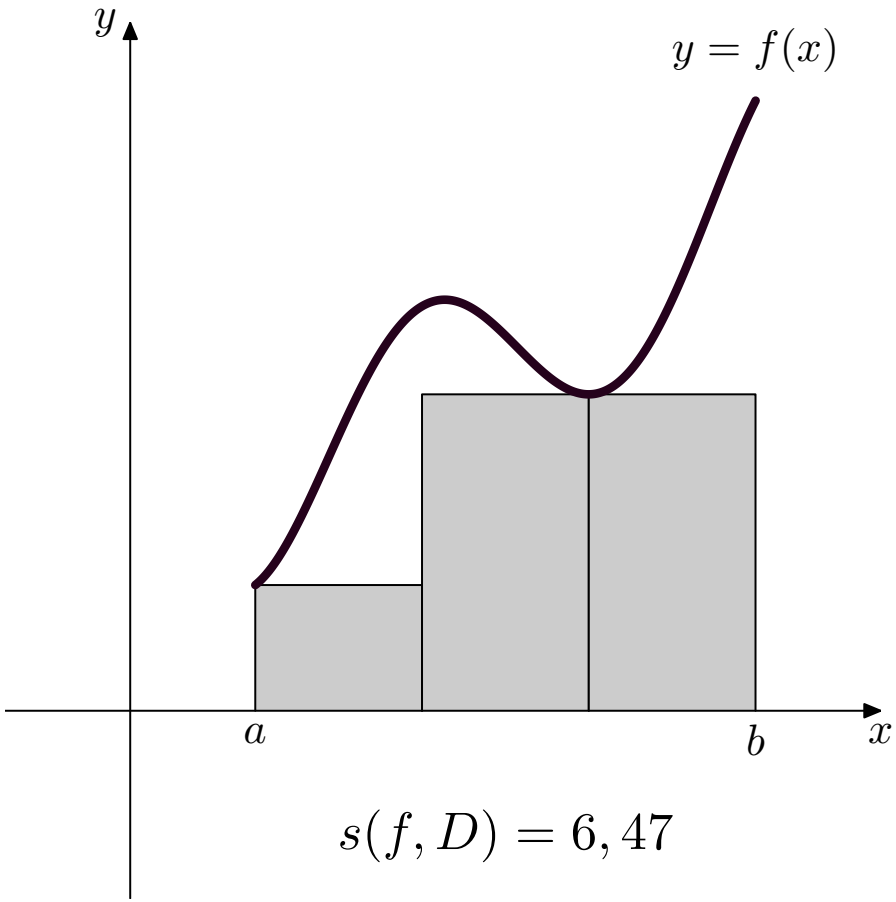
- Keďže každé delenie $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ má konečný počet čiastkových intervalov a f je ohraničená na každom čiastkovom intervale delenia, hodnoty $s(f,D)$ a $S(f,D)$ sú konečné.
- Zrejmá geometrická interpretácia:

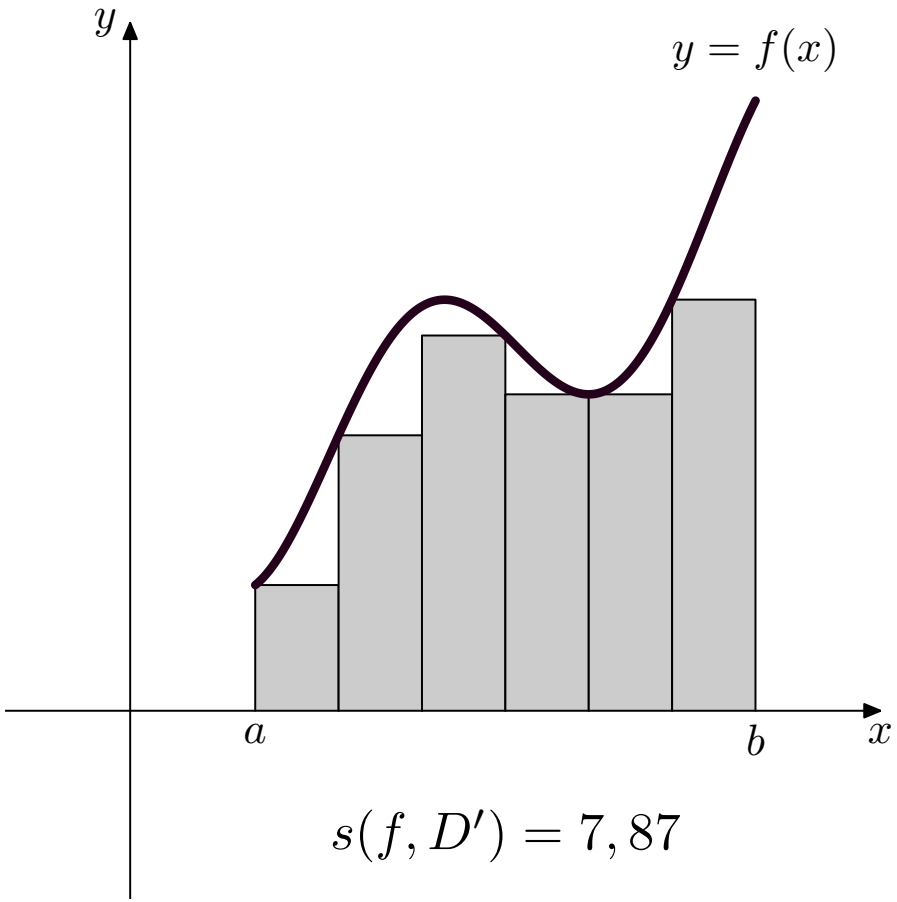


Relácia čiastočného usporiadania na množine delení

Definícia – zjemnenie delenia intervalu

Hovoríme, že delenie D_1 je zjemnením delenia D, akk $D \subseteq D_1$. Delenie D je spoločným zjemnením delení D_1 a D_2, akk $D = D_1 \cup D_2$.

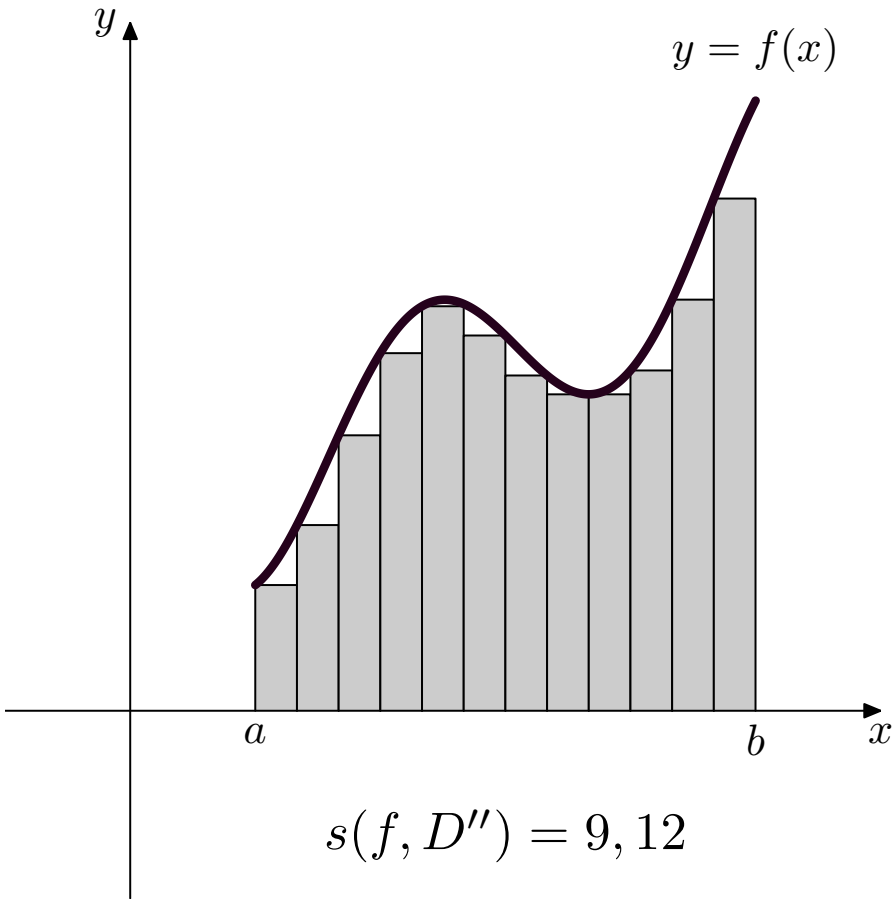


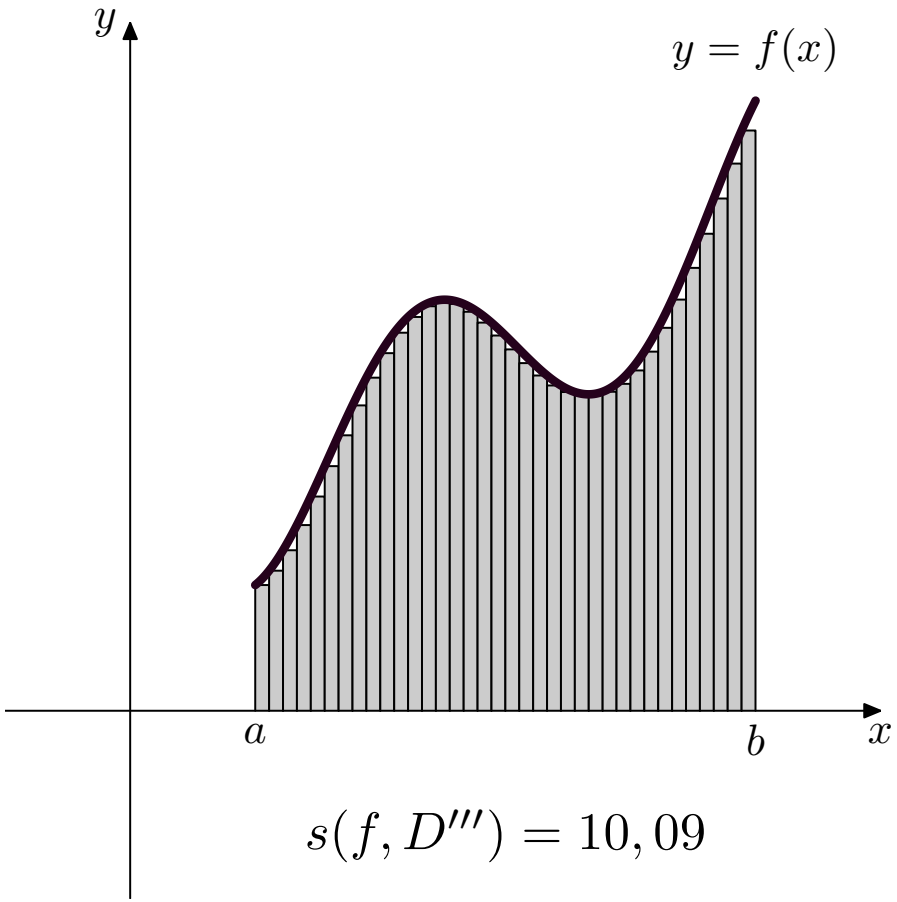


Relácia čiastočného usporiadania na množine delení

Definícia – zjemnenie delenia intervalu

Hovoríme, že delenie D_1 je zjemnením delenia D, akk $D \subseteq D_1$. Delenie D je spoločným zjemnením delení D_1 a D_2, akk $D = D_1 \cup D_2$.

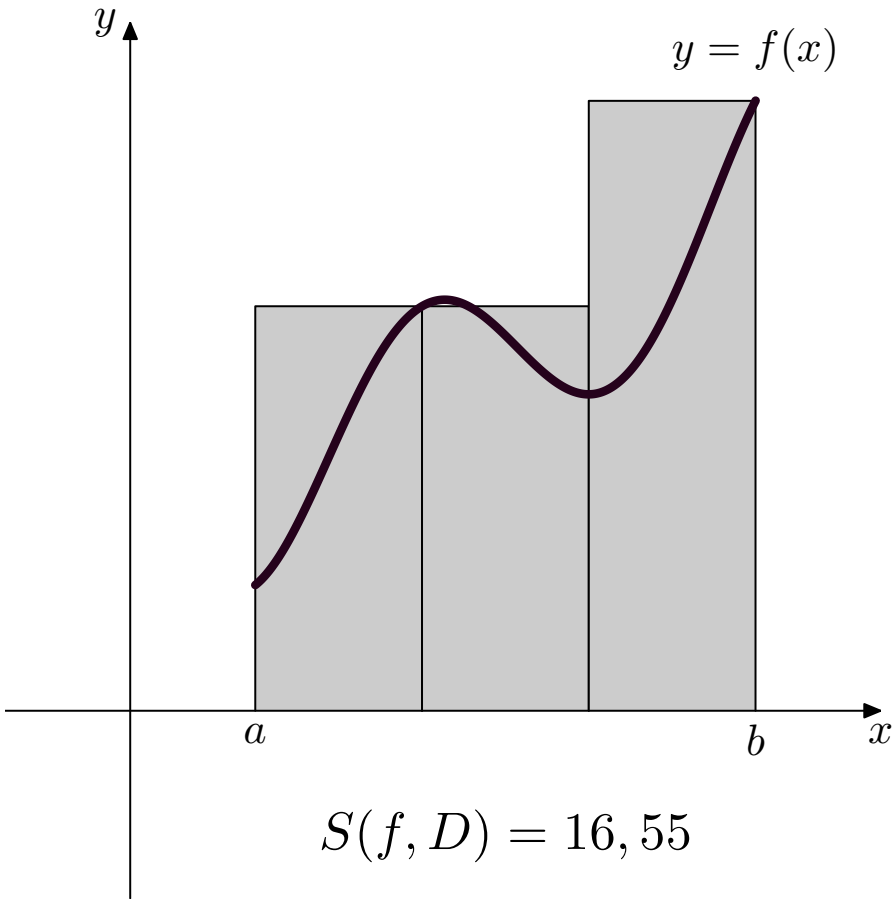


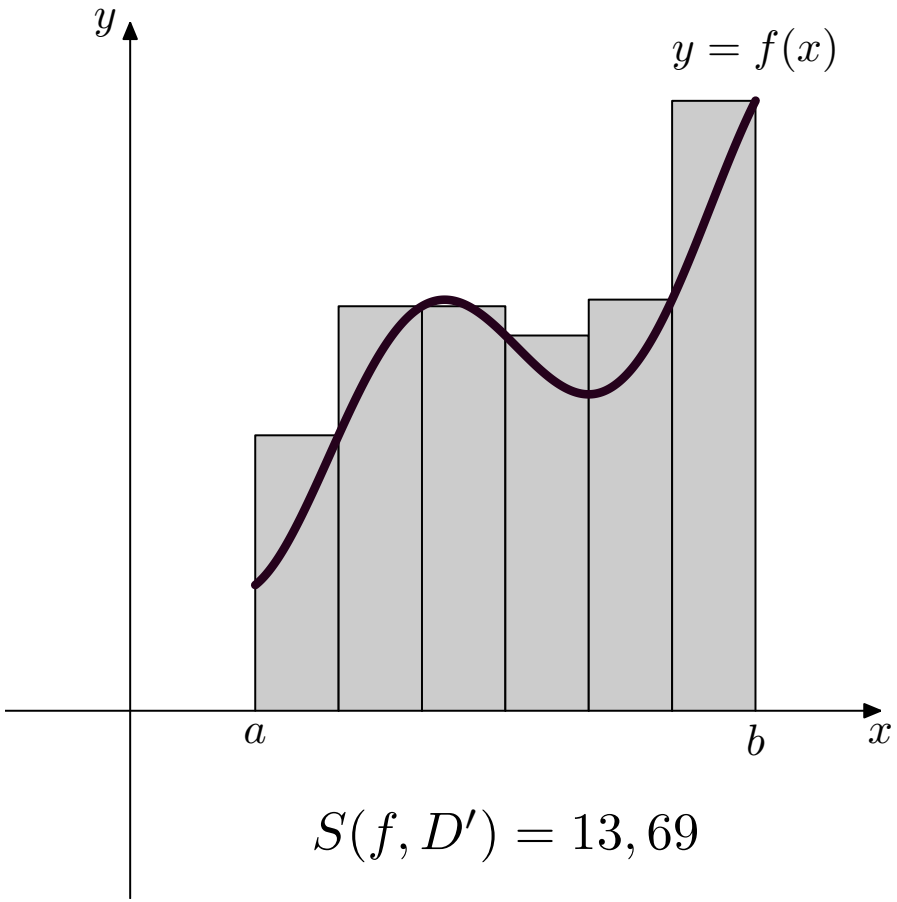


Relácia čiastočného usporiadania na množine delení

Definícia – zjemnenie delenia intervalu

Hovoríme, že delenie D_1 je zjemnením delenia D, akk $D \subseteq D_1$. Delenie D je spoločným zjemnením delení D_1 a D_2, akk $D = D_1 \cup D_2$.

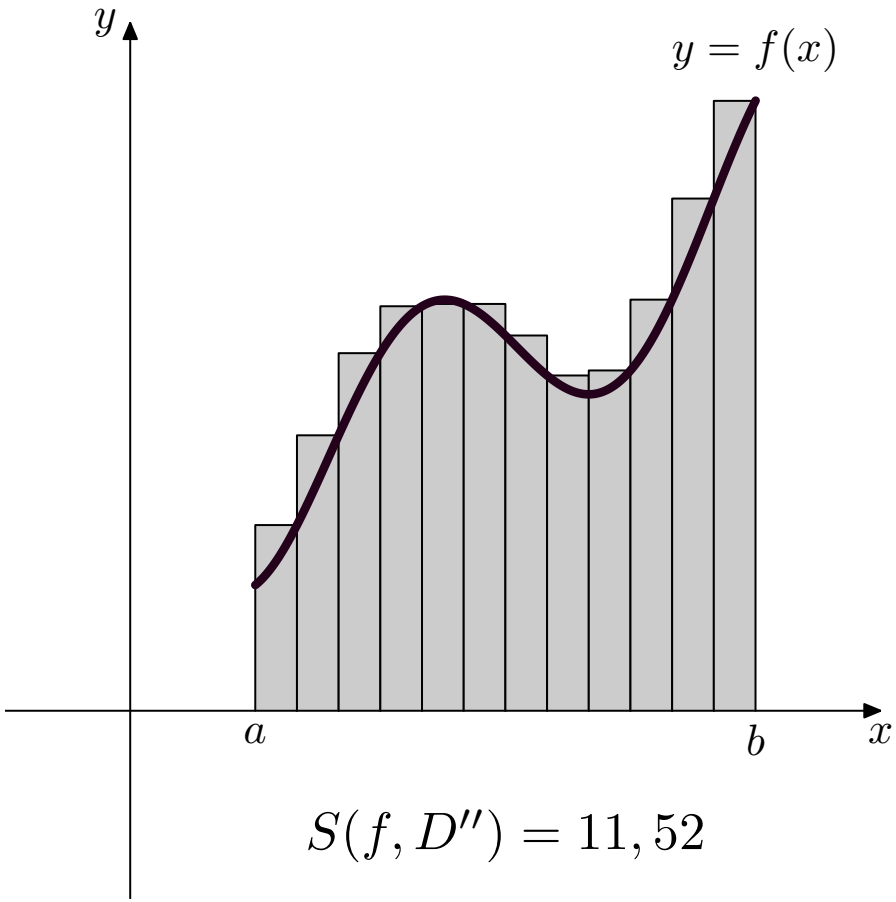


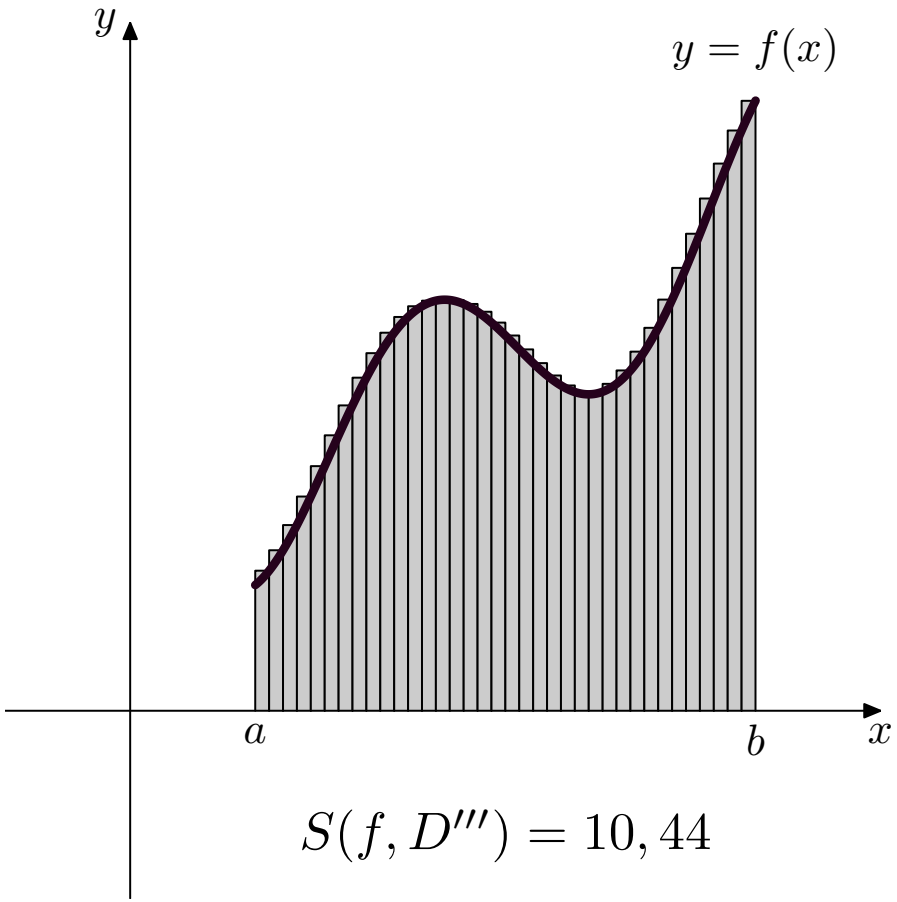


Relácia čiastočného usporiadania na množine delení

Definícia – zjemnenie delenia intervalu

Hovoríme, že delenie D_1 je zjemnením delenia D, akk $D \subseteq D_1$. Delenie D je spoločným zjemnením delení D_1 a D_2, akk $D = D_1 \cup D_2$.





Lema VI.1

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D, D' \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom

(i) $s(f, D) \leq S(f, D)$;

(ii) ak $D \subseteq D'$, tak $s(f, D) \leq s(f, D')$ a $S(f, D) \geq S(f, D')$;

(iii) $s(f, D) \leq S(f, D')$.

Poznámka: Nezáporná hodnota $S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$ sa nazýva aj (celková) oscilácia funkcie f na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom

$$m(b - a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b - a),$$

kde $m = \inf_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ a $M = \sup_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$.

Lema VI.1

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D, D' \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom

(i) $s(f, D) \leq S(f, D)$;

(ii) ak $D \subseteq D'$, tak $s(f, D) \leq s(f, D')$ a $S(f, D) \geq S(f, D')$;

(iii) $s(f, D) \leq S(f, D')$.

Poznámka: Nezáporná hodnota $S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$ sa nazýva aj (celková) oscilácia funkcie f na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom

$$m(b - a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b - a),$$

kde $m = \inf_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ a $M = \sup_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$.

Lema VI.1

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D, D' \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom

(i) $s(f, D) \leq S(f, D)$;

(ii) ak $D \subseteq D'$, tak $s(f, D) \leq s(f, D')$ a $S(f, D) \geq S(f, D')$;

(iii) $s(f, D) \leq S(f, D')$.

Poznámka: Nezáporná hodnota $S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$ sa nazýva aj (celková) oscilácia funkcie f na $\langle a, b\rangle$.

Dôsledok

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom

$$m(b - a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b - a),$$

kde $m = \inf_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ a $M = \sup_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$.

Lema VI.1

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D, D' \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom

(i) $s(f, D) \leq S(f, D)$;

(ii) ak $D \subseteq D'$, tak $s(f, D) \leq s(f, D')$ a $S(f, D) \geq S(f, D')$;

(iii) $s(f, D) \leq S(f, D')$.

Poznámka: Nezáporná hodnota $S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$ sa nazýva aj (celková) oscilácia funkcie f na $\langle a, b\rangle$.

$$\sup_{D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f, D) = (\mathscr{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{dolný } \mathscr{R}\text{-integrál}$$

$$\inf_{D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f, D) = (\mathscr{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{horný } \mathscr{R}\text{-integrál}$$

Lema VI.1

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D, D' \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom

(i) $s(f, D) \leq S(f, D)$;

(ii) ak $D \subseteq D'$, tak $s(f, D) \leq s(f, D')$ a $S(f, D) \geq S(f, D')$;

(iii) $s(f, D) \leq S(f, D')$.

Poznámka: Nezáporná hodnota $S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$ sa nazýva aj (celková) oscilácia funkcie f na $\langle a, b\rangle$.

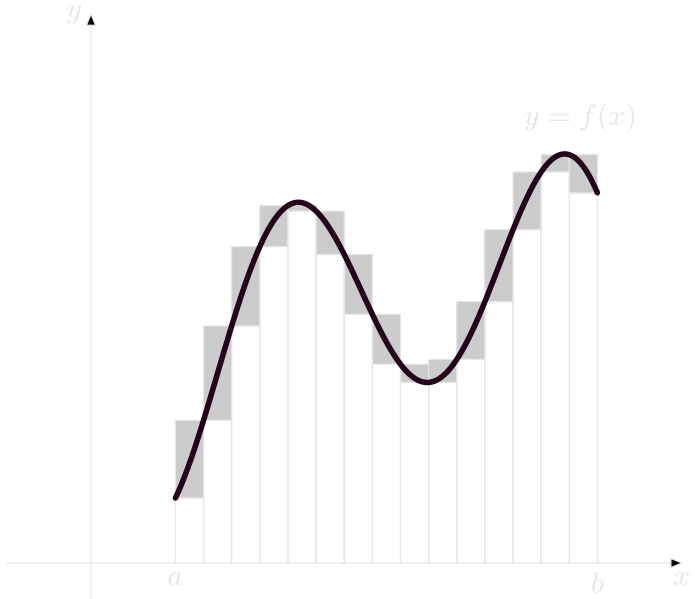
$$\sup_{D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f, D) = (\mathscr{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{dolný } \mathscr{R}\text{-integrál}$$

$$\inf_{D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f, D) = (\mathscr{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{horný } \mathscr{R}\text{-integrál}$$

Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zhrnutie

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

- Keďže každé delenie $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ má konečný počet čiastkových intervalov a f je ohraničená na každom čiastkovom intervale delenia, hodnoty $s(f,D)$ a $S(f,D)$ sú konečné.
- Hodnota $S(f,D) - s(f,D)$ je vždy nezáporná. Zvykne sa nazývať aj oscilácia funkcie f pri delení $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$.

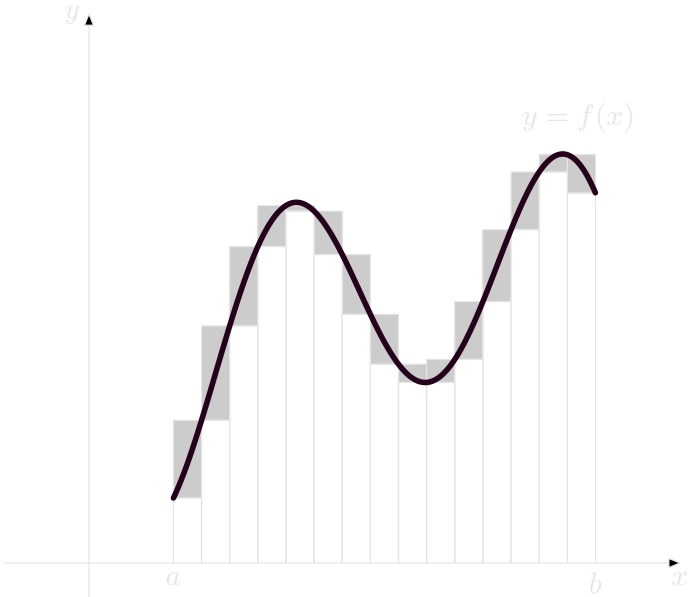


$S(f,D) - s(f,D) < 1,66$

Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zhrnutie

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

- Keďže každé delenie $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ má konečný počet čiastkových intervalov a f je ohraničená na každom čiastkovom intervale delenia, hodnoty $s(f,D)$ a $S(f,D)$ sú konečné.
- Hodnota $S(f,D) - s(f,D)$ je vždy nezáporná. Zvykne sa nazývať aj oscilácia funkcie f pri delení $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$.

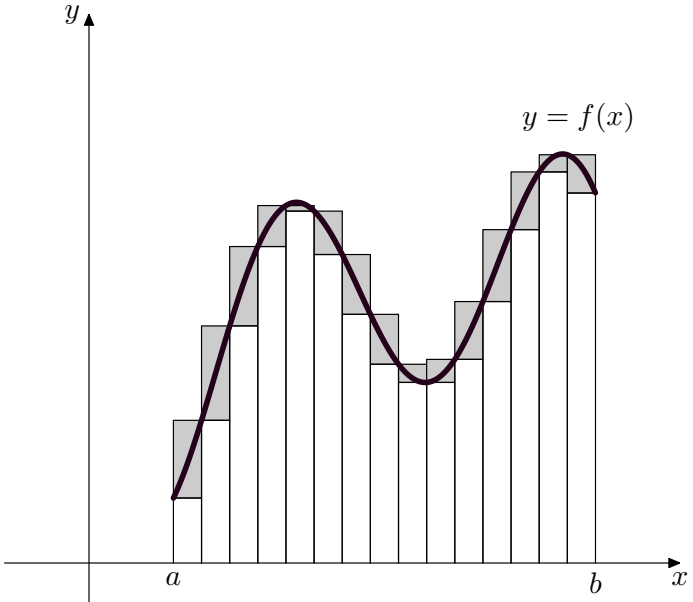


$S(f,D) - s(f,D) < 1,66$

Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zhrnutie

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

- Keďže každé delenie $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ má konečný počet čiastkových intervalov a f je ohraničená na každom čiastkovom intervale delenia, hodnoty $s(f,D)$ a $S(f,D)$ sú konečné.
- Hodnota $S(f,D) - s(f,D)$ je vždy nezáporná. Zvykne sa nazývať aj oscilácia funkcie f pri delení $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$.



$S(f,D) - s(f,D) < 1,66$

Definícia – Riemannov integrál

Hovoríme, že **ohraničená** funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{R}$-integrovateľná) na $\langle a, b\rangle$, akk

$$(\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a túto spoločnú hodnotu nazývame Riemannov integrál (skrátene $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(= \sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D) = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D)\right).$$

Množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Zrejme, pre každé $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ platí

$$s(f,D) \le (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f,D) \quad \text{pre každé } D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$$

Definícia – Riemannov integrál

Hovoríme, že **ohraničená** funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{R}$-integrovateľná) na $\langle a, b\rangle$, akk

$$(\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a túto spoločnú hodnotu nazývame Riemannov integrál (skrátene $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(= \sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D) = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D)\right).$$

Množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Zrejme, pre každé $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ platí

$$s(f,D) \le (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f,D) \quad \text{pre každé } D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$$

Definícia – Riemannov integrál

Hovoríme, že **ohraničená** funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{R}$-integrovateľná) na $\langle a, b\rangle$, akk

$$(\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a túto spoločnú hodnotu nazývame Riemannov integrál (skrátene $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(= \sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D) = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D)\right).$$

Množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Zrejme, pre každé $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ platí

$$s(f,D) \le (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f,D) \quad \text{pre každé } D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$$