Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

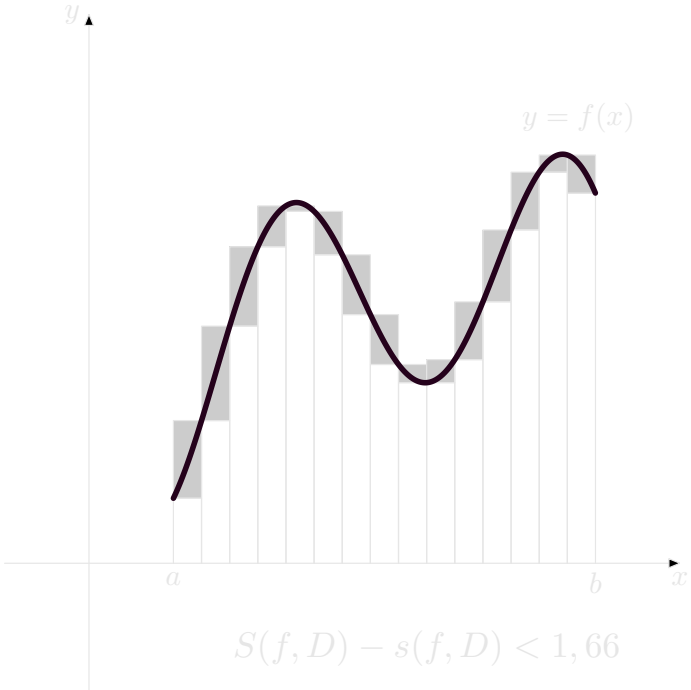
[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 2

29. septembra 2023

Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zopakovanie

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

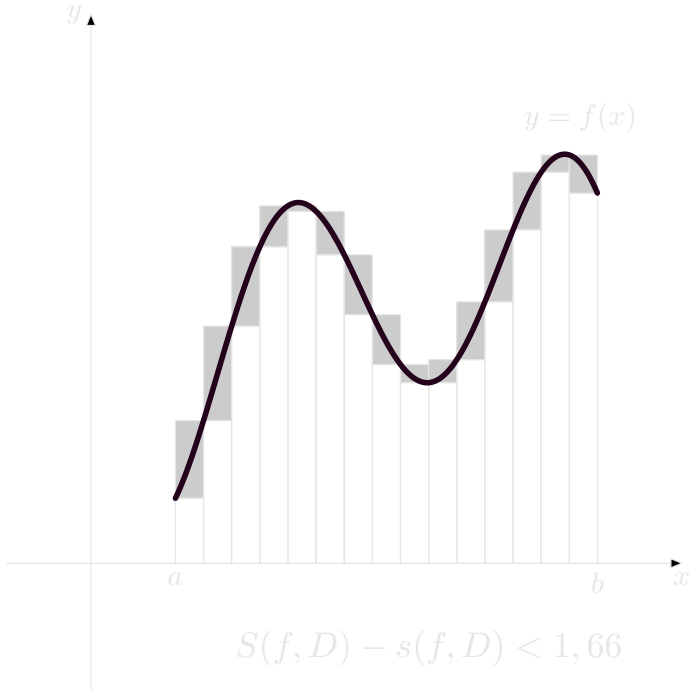
- Keďže každé delenie $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ má konečný počet čiastkových intervalov a f je ohraničená na každom čiastkovom intervale delenia, hodnoty $s(f,D)$ a $S(f,D)$ sú konečné.
- Hodnota $S(f,D) - s(f,D)$ je vždy nezáporná. Zvykne sa nazývať aj oscilácia funkcie f pri delení $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$.



Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zopakovanie

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

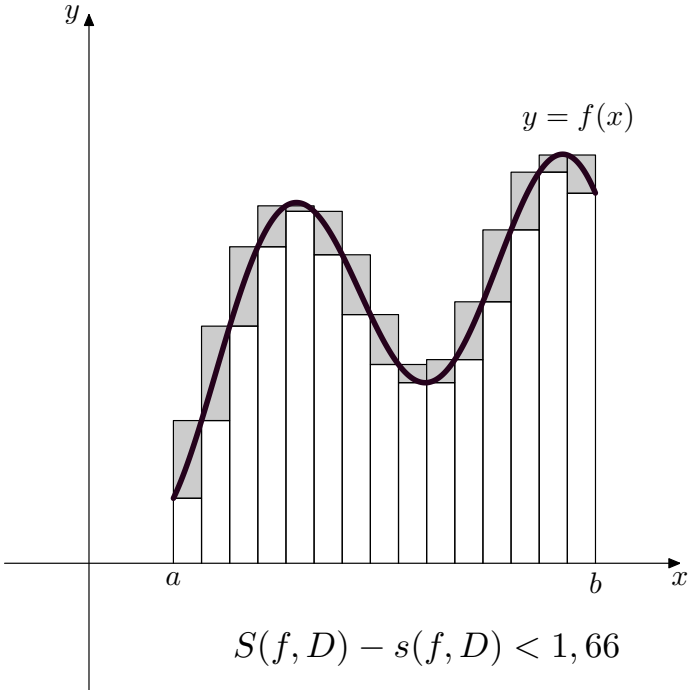
- Keďže každé delenie $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ má konečný počet čiastkových intervalov a f je ohraničená na každom čiastkovom intervale delenia, hodnoty $s(f,D)$ a $S(f,D)$ sú konečné.
- Hodnota $S(f,D) - s(f,D)$ je vždy nezáporná. Zvykne sa nazývať aj oscilácia funkcie f pri delení $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$.



Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zopakovanie

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

- Keďže každé delenie $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ má konečný počet čiastkových intervalov a f je ohraničená na každom čiastkovom intervale delenia, hodnoty $s(f,D)$ a $S(f,D)$ sú konečné.
- Hodnota $S(f,D) - s(f,D)$ je vždy nezáporná. Zvykne sa nazývať aj oscilácia funkcie f pri delení $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$.



Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zopakovanie

Definícia Riemannovho integrálu (Darboux, 1875)

Hovoríme, že **ohraničená** funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{R}$-integrovateľná) na $\langle a, b\rangle$, akk

$$\sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D) = (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D)$$

a túto spoločnú hodnotu nazývame Riemannov integrál (skrátene $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Z definície suprema: $I = \sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D)$ práve vtedy, keď

(i) $(\forall D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ s(f,D) \le I$;

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists D_1 \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ I - \varepsilon < s(f,D_1)$.

Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zopakovanie

Definícia Riemannovho integrálu (Darboux, 1875)

Hovoríme, že **ohraničená** funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{R}$-integrovateľná) na $\langle a, b\rangle$, akk

$$\sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D) = (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D)$$

a túto spoločnú hodnotu nazývame Riemannov integrál (skrátene $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Z definície suprema: $I = \sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D)$ práve vtedy, keď

(i) $(\forall D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ s(f, D) \le I$;

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists D_1 \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ I - \varepsilon < s(f, D_1)$.

Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zopakovanie

Definícia Riemannovho integrálu (Darboux, 1875)

Hovoríme, že **ohraničená** funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{R}$-integrovateľná) na $\langle a, b\rangle$, akk

$$\sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D) = (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D)$$

a túto spoločnú hodnotu nazývame Riemannov integrál (skrátene $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Z definície suprema: $I = \sup\limits_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D)$ práve vtedy, keď

(i) $(\forall D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ s(f, D) \le I$;

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists D_1 \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ I - \varepsilon < s(f, D_1)$.

Darbouxova konštrukcia Riemannovho integrálu – zopakovanie

Definícia Riemannovho integrálu (Darboux, 1875)

Hovoríme, že **ohraničená** funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovateľná (skrátene $\mathscr{R}$-integrovateľná) na $\langle a, b\rangle$, akk

$$\sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D) = (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D)$$

a túto spoločnú hodnotu nazývame Riemannov integrál (skrátene $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Z definície infima: $I = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D)$ práve vtedy, keď

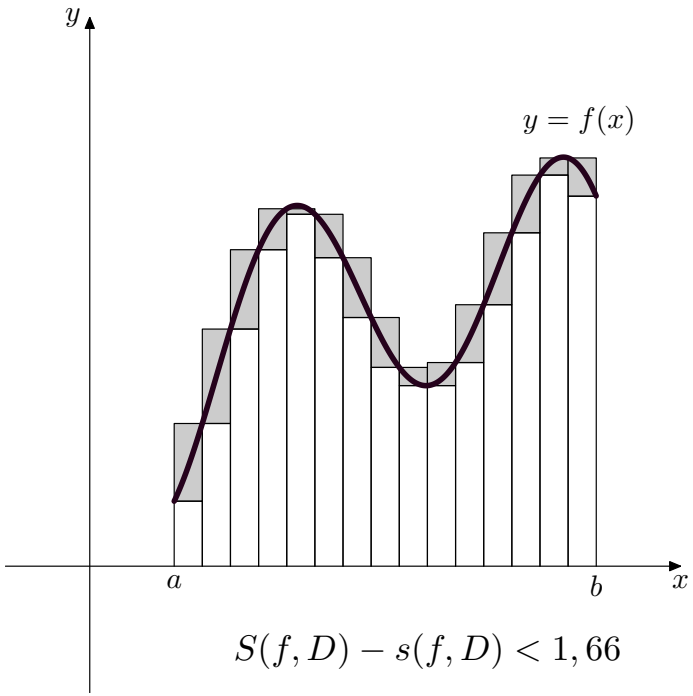
(i) $(\forall D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ I \leq S(f, D)$;

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists D_2 \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ S(f, D_2) < I + \varepsilon$.

Ako vyšetriť $\mathscr{R}$-integrovateľnosť ohraničenej funkcie?

Veta (Darbouxovo kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď $(\forall \varepsilon > 0)(\exists D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\, S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

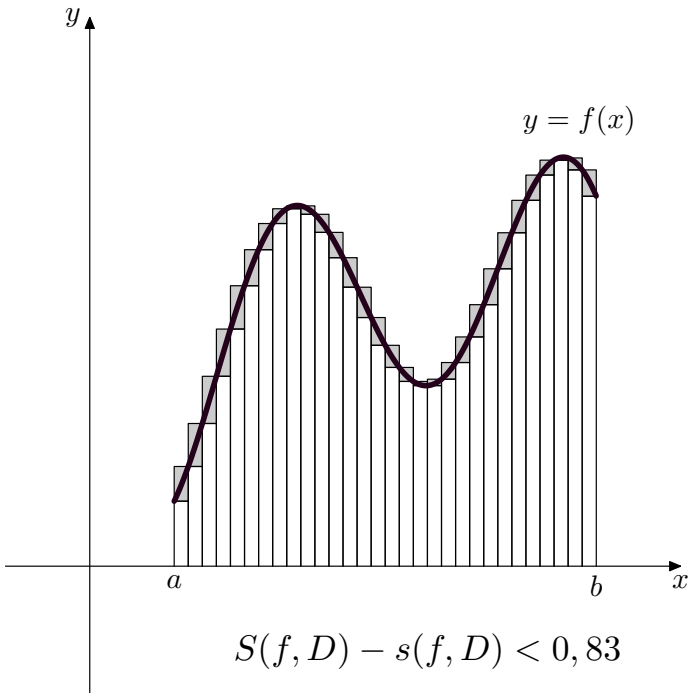


JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917)

Ako vyšetriť $\mathscr{R}$-integrovateľnosť ohraničenej funkcie?

Veta (Darbouxovo kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď $(\forall \varepsilon > 0)(\exists D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\, S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

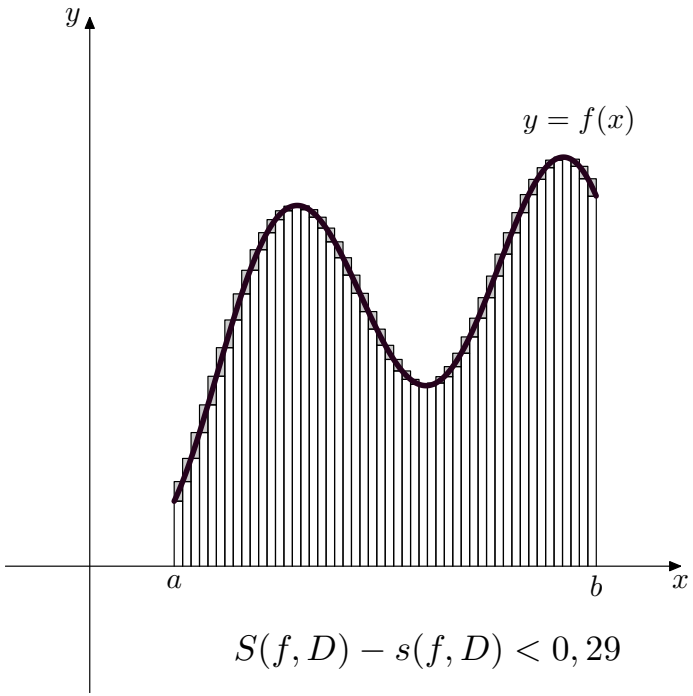


JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917)

Ako vyšetriť $\mathscr{R}$-integrovateľnosť ohraničenej funkcie?

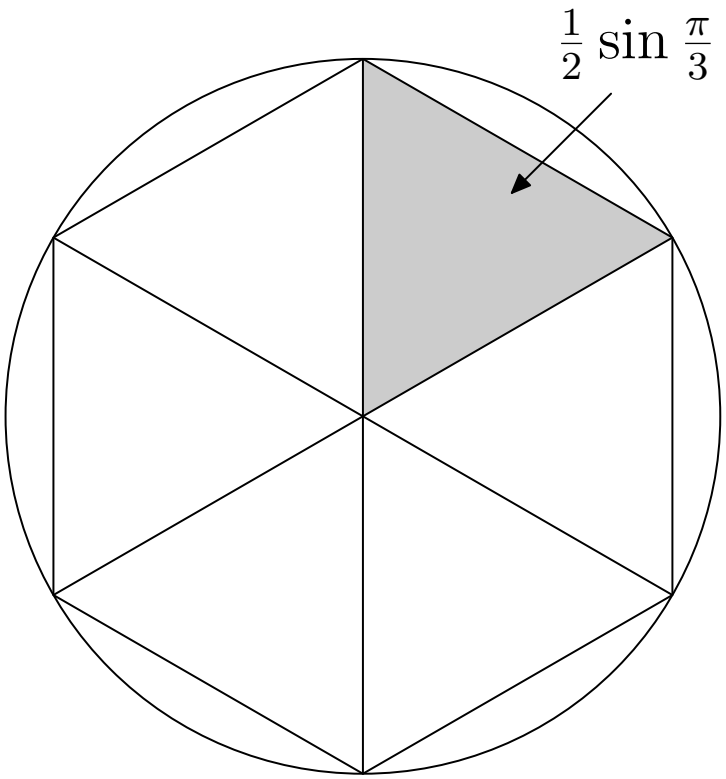
Veta (Darbouxovo kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

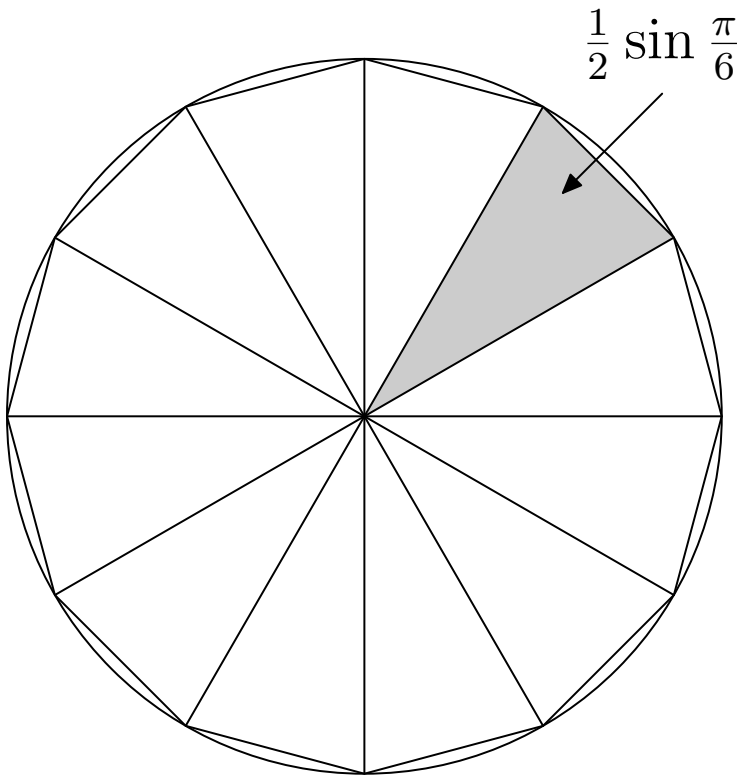
Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď $(\forall \varepsilon > 0)(\exists D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\, S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.



JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917)

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita?





$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} s_n \sin\frac{2\pi}{s_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s_n = 3 \times 2^n$$

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita?

Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je dané delenie $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, tak hovoríme, že je daná postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, skrátene zapisujeme $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$: $D_n = \{a, b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $D_n = \{-2, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, 1\}$;

(iii) ekvidištančné delenie: n-té delenie rozdelí interval $\langle a, b\rangle$ presne na n rovnakých častí, t.j.

$$D_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, b\right\};$$

(iv) Pozor: Vo všeobecnosti číslo n neurčuje počet deliacich bodov delenia $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$!!!

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita?

Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je dané delenie $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, tak hovoríme, že je daná postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, skrátene zapisujeme $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$: $D_n = \{a, b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $D_n = \{-2, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, 1\}$;

(iii) ekvidištančné delenie: n-té delenie rozdelí interval $\langle a, b\rangle$ presne na n rovnakých častí, t.j.

$$D_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, b\right\};$$

(iv) Pozor: Vo všeobecnosti číslo n neurčuje počet deliacich bodov delenia $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$!!!

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita?

Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je dané delenie $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, tak hovoríme, že je daná postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, skrátene zapisujeme $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$: $D_n = \{a, b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $D_n = \{-2, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, 1\}$;

(iii) ekvidištančné delenie: n-té delenie rozdelí interval $\langle a, b\rangle$ presne na n rovnakých častí, t.j.

$$D_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, b\right\};$$

(iv) Pozor: Vo všeobecnosti číslo n neurčuje počet deliacich bodov delenia $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$!!!

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita?

Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je dané delenie $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, tak hovoríme, že je daná postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, skrátene zapisujeme $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$: $D_n = \{a, b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $D_n = \{-2, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, 1\}$;

(iii) ekvidištančné delenie: n-té delenie rozdelí interval $\langle a, b\rangle$ presne na n rovnakých častí, t.j.

$$D_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, b\right\};$$

(iv) Pozor: Vo všeobecnosti číslo n neurčuje počet deliacich bodov delenia $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$!!!

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita?

Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je dané delenie $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, tak hovoríme, že je daná postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, skrátene zapisujeme $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$: $D_n = \{a, b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $D_n = \{-2, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, 1\}$;

(iii) ekvidištančné delenie: n-té delenie rozdelí interval $\langle a, b\rangle$ presne na n rovnakých častí, t.j.

$$D_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1) \cdot \frac{b-a}{n}, b\right\};$$

(iv) Pozor: Vo všeobecnosti číslo n neurčuje počet deliacich bodov delenia $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$!!!

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita? Tuto hľa!

Veta (limitné kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia.

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ taká, že

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Ak existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

Archimedes: Heuréka!!! Konečne to zodpovedá mojej predstave vpisovania a opisovania!

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita? Tuto hľa!

Veta (limitné kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia.

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ taká, že

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Ak existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

Archimedes: Heuréka!!! Konečne to zodpovedá mojej predstave vpisovania a opisovania!

Výtka: a kde je pri definícii $\mathscr{R}$-integrálu limita? Tuto hľa!

Veta (limitné kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia.

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ taká, že

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Ak existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

Ďalšia vážna výtka: ako mám vedieť, či taká postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ vôbec existuje? Ktoré mám testovať?

Ďalšia vážna výtka: ako mám vedieť, či taká postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ vôbec existuje? Ktoré mám testovať?

Definícia – normálna postupnosť delení

Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Normou delenia D nazývame číslo $\nu(D) = \max\{\Delta x_i; i = 1,2,\dots,n\}$. Postupnosť $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ nazývame normálna postupnosť delení intervalu $\langle a,b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení $D_n = \{a,b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ je nenormálna;

(ii) ekvidištančné delenia $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$, kde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ pre $i = 1,\dots,n$, tvoria normálnu postupnosť delení;

(iii) postupnosť delení $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ pre $0 < a < b$, kde $x_i = aq^i$ s $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ je normálna;

Ďalšia vážna výtka: ako mám vedieť, či taká postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ vôbec existuje? Ktoré mám testovať?

Definícia – normálna postupnosť delení

Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Normou delenia D nazývame číslo $\nu(D) = \max\{\Delta x_i; i = 1,2,\dots,n\}$. Postupnosť $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ nazývame normálna postupnosť delení intervalu $\langle a,b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení $D_n = \{a,b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ je nenormálna;

(ii) ekvidištančné delenia $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$, kde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ pre $i = 1,\dots,n$, tvoria normálnu postupnosť delení;

(iii) postupnosť delení $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ pre $0 < a < b$, kde $x_i = aq^i$ s $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ je normálna;

Ďalšia vážna výtka: ako mám vedieť, či taká postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ vôbec existuje? Ktoré mám testovať?

Definícia – normálna postupnosť delení

Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Normou delenia D nazývame číslo $\nu(D) = \max\{\Delta x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$. Postupnosť $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ nazývame normálna postupnosť delení intervalu $\langle a,b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení $D_n = \{a,b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ je nenormálna;

(ii) ekvidištančné delenia $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$, kde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ pre $i = 1, \dots, n$, tvoria normálnu postupnosť delení;

(iii) postupnosť delení $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ pre $0 < a < b$, kde $x_i = aq^i$ s $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ je normálna;

Ďalšia vážna výtka: ako mám vedieť, či taká postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ vôbec existuje? Ktoré mám testovať?

Definícia – normálna postupnosť delení

Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Normou delenia D nazývame číslo $\nu(D) = \max\{\Delta x_i; i = 1,2,\dots,n\}$. Postupnosť $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ nazývame normálna postupnosť delení intervalu $\langle a,b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Príklady a poznámky:

(i) „triviálna“ postupnosť delení $D_n = \{a,b\}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ je nenormálna;

(ii) ekvidištančné delenia $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$, kde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ pre $i = 1,\dots,n$, tvoria normálnu postupnosť delení;

(iii) postupnosť delení $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ pre $0 < a < b$, kde $x_i = aq^i$ s $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ je normálna;

Nenormálne ľahký život s normálnymi postupnosťami delení

Veta (limitné kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti pre NPD)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení.

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

(ii) Ak existujú $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$ a rovnajú sa, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

A načo je toto všetko dobré? **Príklad**: Vypočítajte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right).$$

Nenormálne ľahký život s normálnymi postupnosťami delení

Veta (limitné kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti pre NPD)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení.

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

(ii) Ak existujú $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$ a rovnajú sa, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

A načo je toto všetko dobré? **Príklad**: Vypočítajte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right).$$

Nenormálne ľahký život s normálnymi postupnosťami delení

Veta (limitné kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti pre NPD)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení.

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

(ii) Ak existujú $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$ a rovnajú sa, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

A načo je toto všetko dobré? **Príklad**: Vypočítajte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

Kritériá integrovateľnosti funkcie – zhrnutie

Ak $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia, potom nasledujúce štyri tvrdenia sú ekvivalentné:

(i) $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$;

(ii) pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$;

(iii) existuje normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, pre ktorú platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$;

(iv) existuje postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, pre ktorú platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$.

(v) ?Pre každú postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$?

Kritériá integrovateľnosti funkcie – zhrnutie

Ak $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia, potom nasledujúce štyri tvrdenia sú ekvivalentné:

(i) $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$;

(ii) pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$;

(iii) existuje normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, pre ktorú platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$;

(iv) existuje postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, pre ktorú platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$.

(v) ?Pre každú postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$?