Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 3

6. októbra 2023

Cauchyho prístup k integrálu – integrál ako limita (1823)

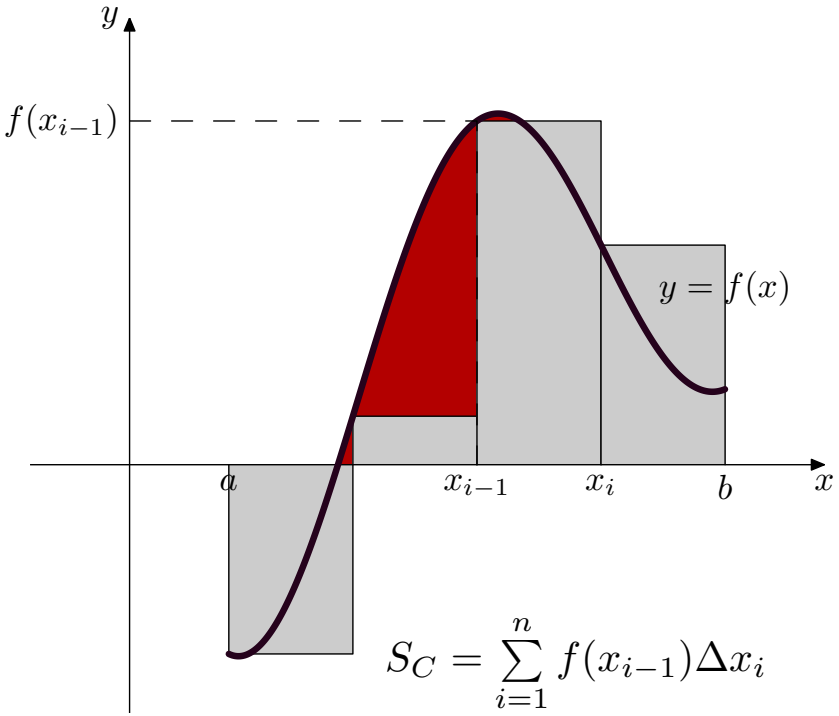
Supposons que, la fonction $y = f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $\mathrm{X} - x_0$ en éléments

$$(1) \qquad x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{X} - x_{n-1}$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'*origine* de ce même élément, savoir l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $\mathrm{X} - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

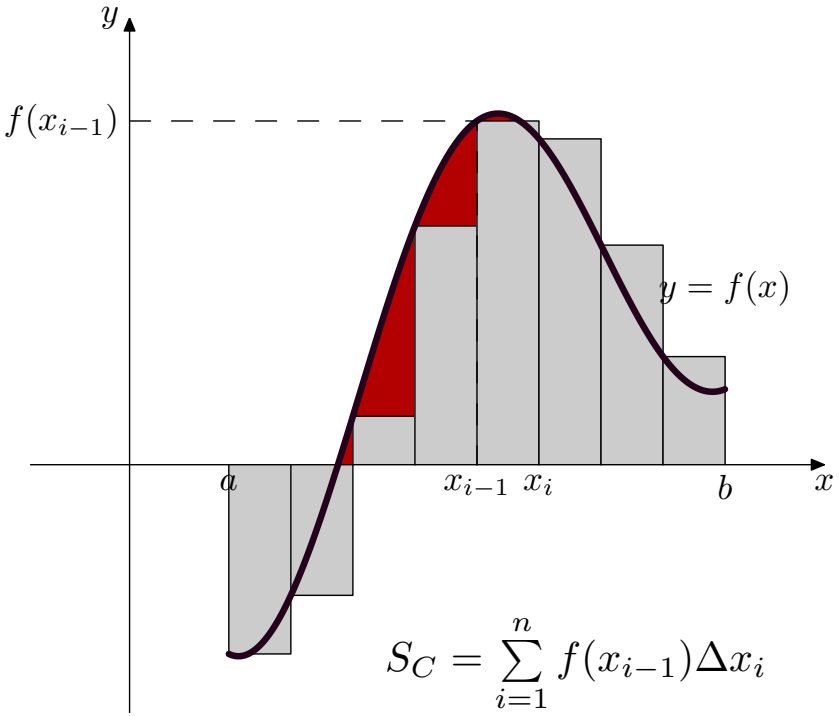
$$(2) \qquad \mathrm{S} = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (\mathrm{X} - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

Cauchyho prístup k integrálu – integrál ako limita (1823)



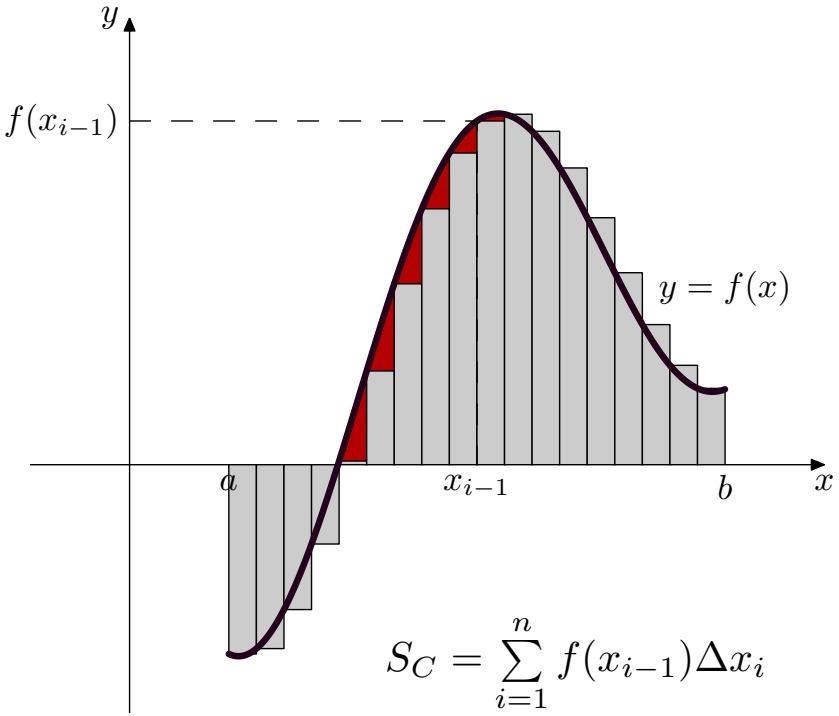
AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857)

Cauchyho prístup k integrálu – integrál ako limita (1823)



AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857)

Cauchyho prístup k integrálu – integrál ako limita (1823)



AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857)

Riemannovo vylepšenie Cauchyho prístupu k integrálu (1854)

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

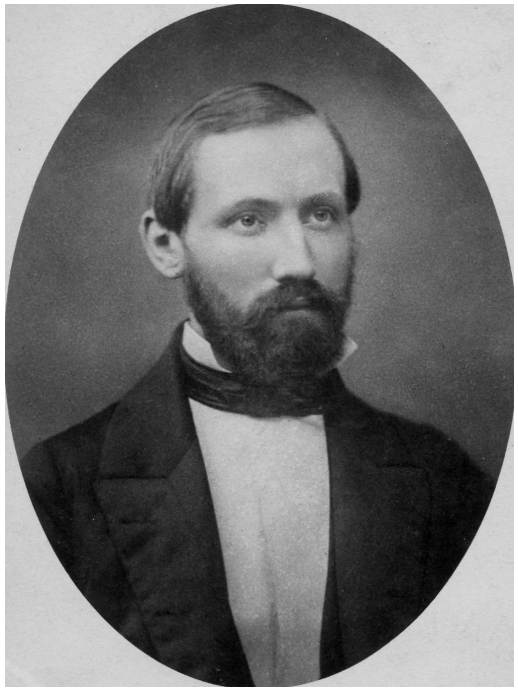
Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

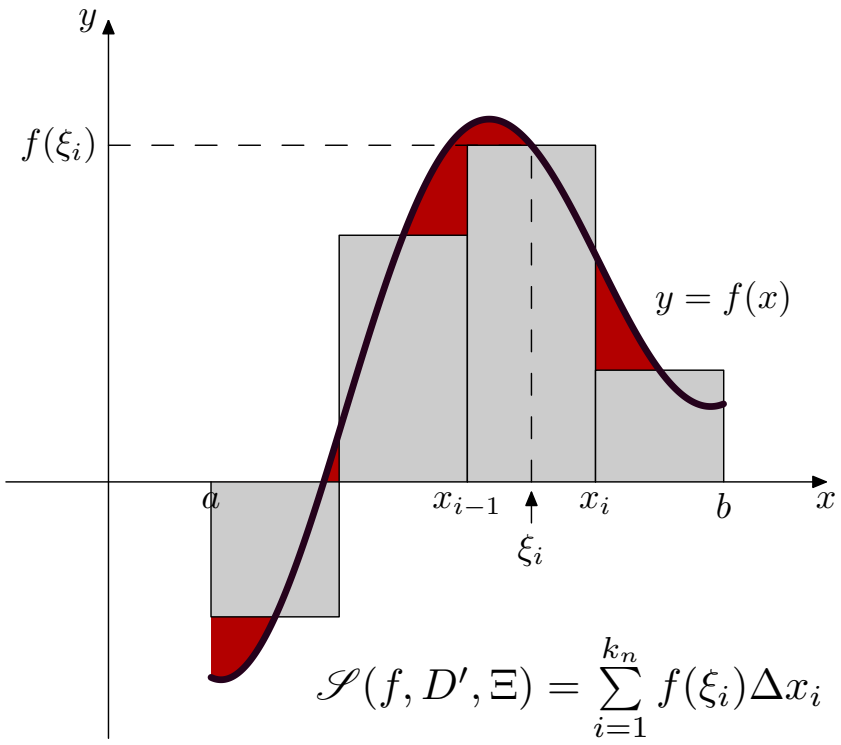
Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\,dx$.

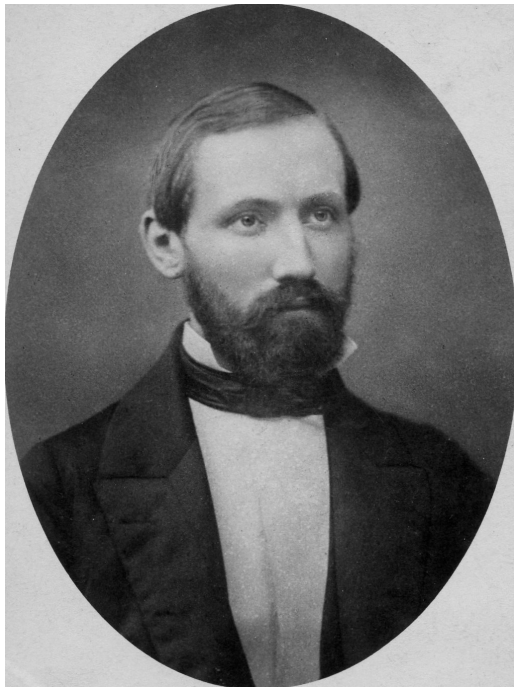
Riemannovo vylepšenie Cauchyho prístupu k integrálu (1854)

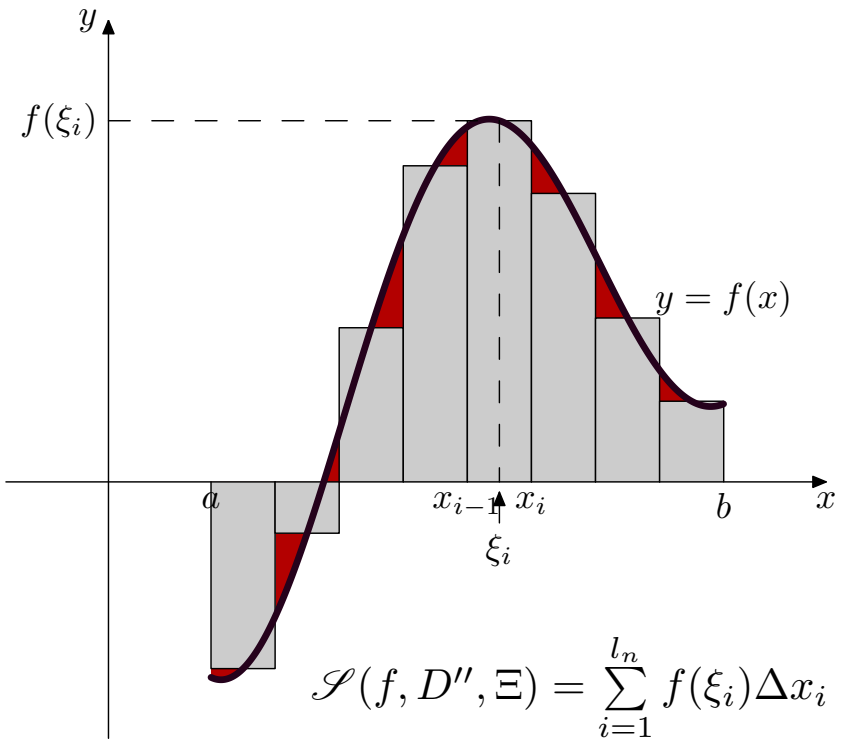




GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866)

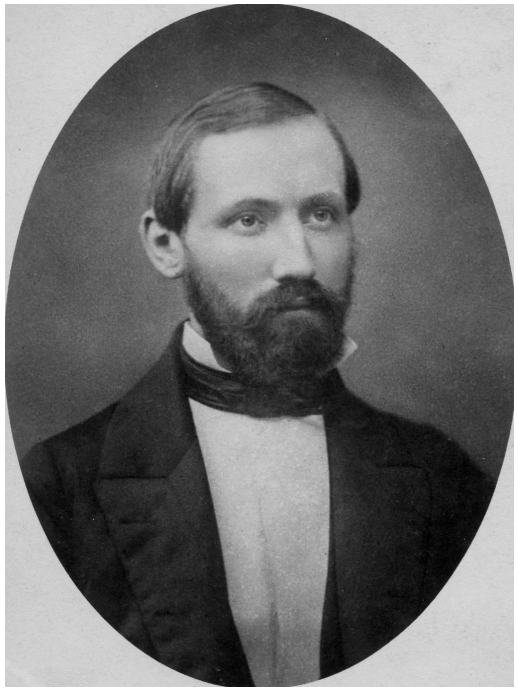
Riemannovo vylepšenie Cauchyho prístupu k integrálu (1854)

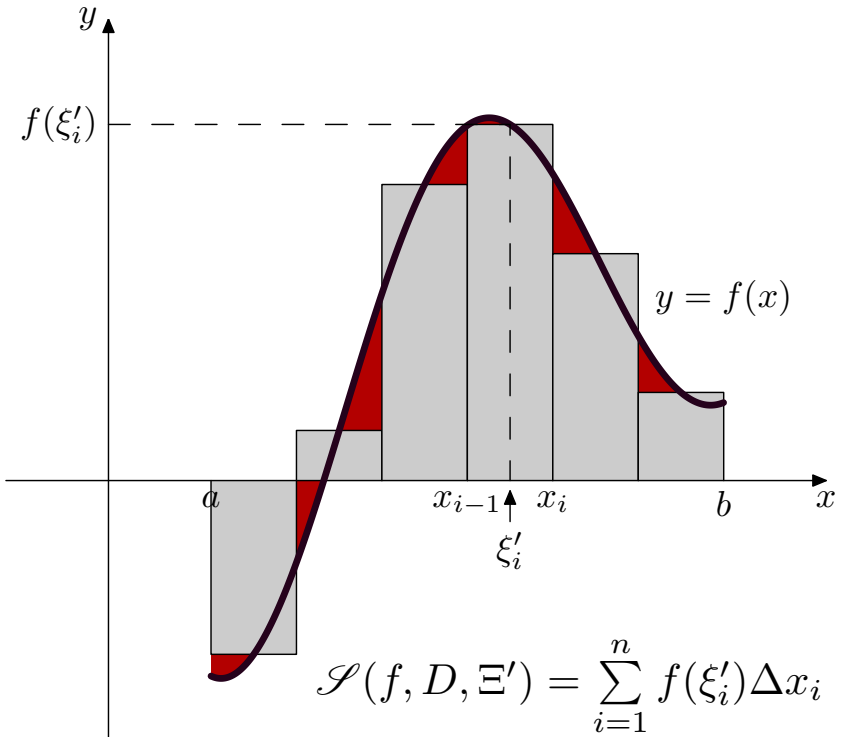




GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866)

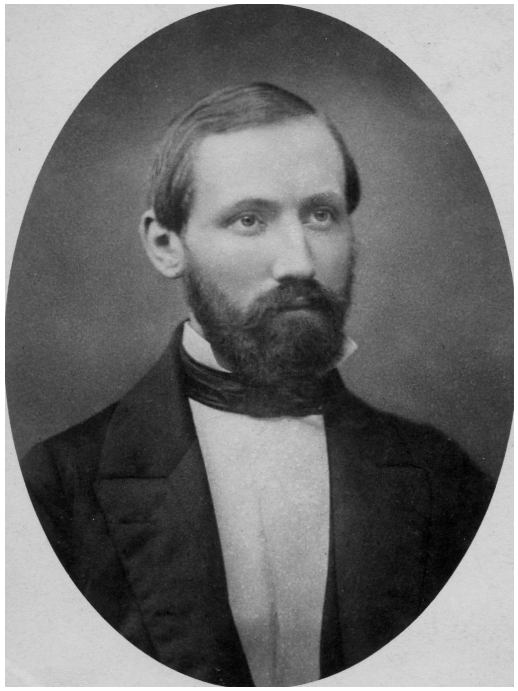
Riemannovo vylepšenie Cauchyho prístupu k integrálu (1854)

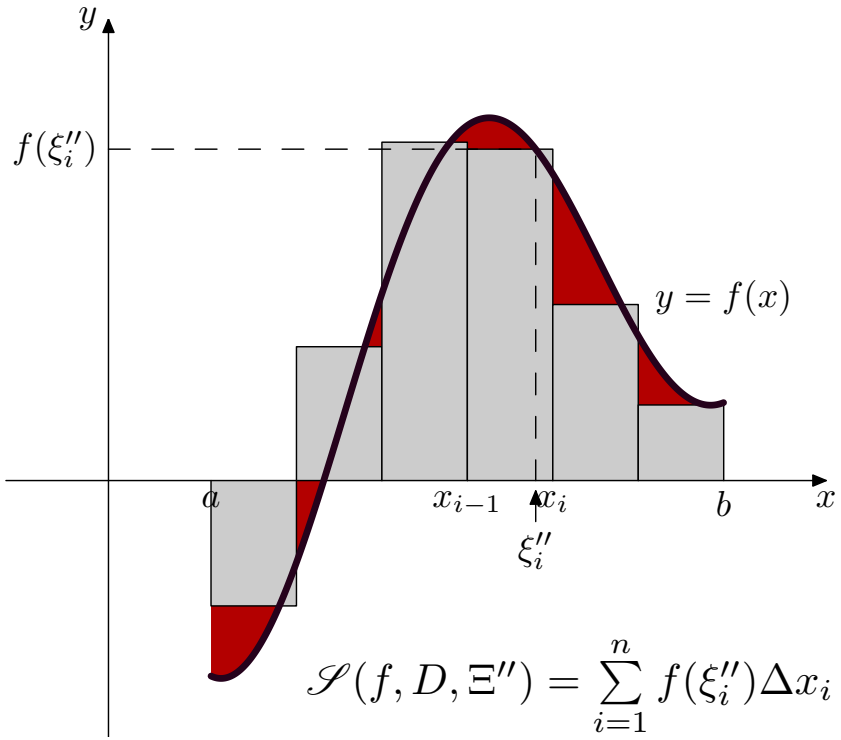




GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866)

Riemannovo vylepšenie Cauchyho prístupu k integrálu (1854)





GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866)

Riemannovo vylepšenie – nič nové pod slnkom!!!

Pripomeňme si Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a)$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a, b\rangle$, t.j. $(\forall x \in \langle a, b\rangle)\, F'(x) = f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists \xi \in (a, b))\, F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) = f(\xi)(b - a);$$

- uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, x_2\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a urobme predchádzajúcu úvahu dvakrát (pre F na $\langle x_0, x_1\rangle$ a $\langle x_1, x_2\rangle$);
- čísla ξ_i sú nejaké čísla z čiastočných intervalov (x_{i-1}, x_i) pre $i = 1, 2$;
- všeobecne zoberme delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existujú čísla $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, že platí formula vyššie

Riemannovo vylepšenie – nič nové pod slnkom!!!

Pripomeňme si Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a)$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a, b\rangle$, t.j. $(\forall x \in \langle a, b\rangle)\, F'(x) = f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists \xi \in (a, b))\, F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) = f(\xi)(b - a);$$

- uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, x_2\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a urobme predchádzajúcu úvahu dvakrát (pre F na $\langle x_0, x_1\rangle$ a $\langle x_1, x_2\rangle$);
- čísla ξ_i sú nejaké čísla z čiastočných intervalov (x_{i-1}, x_i) pre $i = 1, 2$;
- všeobecne zoberme delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existujú čísla $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, že platí formula vyššie

Riemannovo vylepšenie – nič nové pod slnkom!!!

Pripomeňme si Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a) = f(\xi)(b-a)$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a, b\rangle$, t.j. $(\forall x \in \langle a, b\rangle)\, F'(x) = f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists \xi \in (a, b))\, F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a);$$

- uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, x_2\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a urobme predchádzajúcu úvahu dvakrát (pre F na $\langle x_0, x_1\rangle$ a $\langle x_1, x_2\rangle$);
- čísla ξ_i sú nejaké čísla z čiastočných intervalov (x_{i-1}, x_i) pre $i = 1, 2$;
- všeobecne zoberme delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existujú čísla $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, že platí formula vyššie

Riemannovo vylepšenie – nič nové pod slnkom!!!

Pripomeňme si Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a)$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a, b\rangle$, t.j. $(\forall x \in \langle a, b\rangle)\, F'(x) = f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists \xi \in (a, b))\, F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) = f(\xi)(b - a);$$

- uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, x_2\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a urobme predchádzajúcu úvahu dvakrát (pre F na $\langle x_0, x_1\rangle$ a $\langle x_1, x_2\rangle$);
- čísla ξ_i sú nejaké čísla z čiastočných intervalov (x_{i-1}, x_i) pre $i = 1, 2$;
- všeobecne zoberme delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existujú čísla $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, že platí formula vyššie

Riemannovo vylepšenie – nič nové pod slnkom!!!

Pripomeňme si Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := (F(x_2)-F(x_1))+(F(x_1)-F(x_0))$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a,b\rangle$, t.j. $(\forall x\in\langle a,b\rangle)\,F'(x)=f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists\xi\in(a,b))\,F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a);$$

- uvažujme delenie $D=\{x_0,x_1,x_2\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ a urobme predchádzajúcu úvahu dvakrát (pre F na $\langle x_0,x_1\rangle$ a $\langle x_1,x_2\rangle$);
- čísla ξ_i sú nejaké čísla z čiastočných intervalov (x_{i-1},x_i) pre $i=1,2$;
- všeobecne zoberme delenie $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$, potom existujú čísla $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, že platí formula vyššie

Riemannovo vylepšenie – nič nové pod slnkom!!!

Pripomeňme si Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := (F(x_2)-F(x_1))+(F(x_1)-F(x_0)) = \sum_{i=1}^{2} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a,b\rangle$, t.j. $(\forall x \in \langle a,b\rangle)\, F'(x) = f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists \xi \in (a,b))\, F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a);$$

- uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, x_2\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ a urobme predchádzajúcu úvahu dvakrát (pre F na $\langle x_0, x_1\rangle$ a $\langle x_1, x_2\rangle$);
- čísla ξ_i sú nejaké čísla z čiastočných intervalov (x_{i-1}, x_i) pre $i = 1, 2$;
- všeobecne zoberme delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$, potom existujú čísla $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, že platí formula vyššie

Riemannovo vylepšenie – nič nové pod slnkom!!!

Pripomeňme si Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a,b\rangle$, t.j. $(\forall x \in \langle a,b\rangle)\, F'(x) = f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists \xi \in (a,b))\, F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a);$$

- uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, x_2\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ a urobme predchádzajúcu úvahu dvakrát (pre F na $\langle x_0, x_1\rangle$ a $\langle x_1, x_2\rangle$);
- čísla ξ_i sú nejaké čísla z čiastočných intervalov (x_{i-1}, x_i) pre $i = 1, 2$;
- všeobecne zoberme delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$, potom existujú čísla $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, že platí formula vyššie

Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu verstehen?

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)

Definícia – výber reprezentantov

Nech $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Výberom reprezentantov delenia D nazývame množinu $\Xi = \{\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ a bod ξ_i nazývame reprezentantom i-teho čiastočného intervalu.

Definícia – integrálny súčet

Nech $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Integrálnym súčtom prislúchajúcim funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ delenia D rozumieme číslo

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Definícia – Riemann-Cauchy

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Číslo $L \in \mathbb{R}$ nazývame (Riemannov) integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ s $\nu(D) < \delta$ a každý výber reprezentantov Ξ delenia D platí $|\mathscr{S}(f, D, \Xi) - L| < \varepsilon$.

Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu verstehen?

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)

Definícia – výber reprezentantov

Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Výberom reprezentantov delenia D nazývame množinu $\Xi = \{\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle;\ i = 1, 2, \dots, n\}$ a bod ξ_i nazývame reprezentantom i-teho čiastočného intervalu.

Definícia – integrálny súčet

Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Integrálnym súčtom prislúchajúcim funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ delenia D rozumieme číslo

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Definícia – Riemann-Cauchy

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Číslo $L \in \mathbb{R}$ nazývame (Riemannov) integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ s $\nu(D) < \delta$ a každý výber reprezentantov Ξ delenia D platí $|\mathscr{S}(f, D, \Xi) - L| < \varepsilon$.

Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu verstehen?

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)

Definícia – výber reprezentantov

Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Výberom reprezentantov delenia D nazývame množinu $\Xi = \{\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle;\ i = 1, 2, \dots, n\}$ a bod ξ_i nazývame reprezentantom i-teho čiastočného intervalu.

Definícia – integrálny súčet

Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Integrálnym súčtom prislúchajúcim funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ delenia D rozumieme číslo

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Definícia – Riemann-Cauchy

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Číslo $L \in \mathbb{R}$ nazývame (Riemannov) integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ s $\nu(D) < \delta$ a každý výber reprezentantov Ξ delenia D platí $|\mathscr{S}(f, D, \Xi) - L| < \varepsilon$.

Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu verstehen?

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)

Veta ($\mathscr{R}$-integrál ako špeciálna limita integrálnych súčtov)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia.

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení a Ξ_n je príslušný výber reprezentantov delenia D_n, tak postupnosť $(\mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n))_1^\infty$ konverguje a platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,dx.$$

(ii) Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ a pre každý výber reprezentantov Ξ_n delení D_n existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n)$ a je stále tá istá, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Zhrnutie: zavedenie $\mathscr{R}$-integrálu

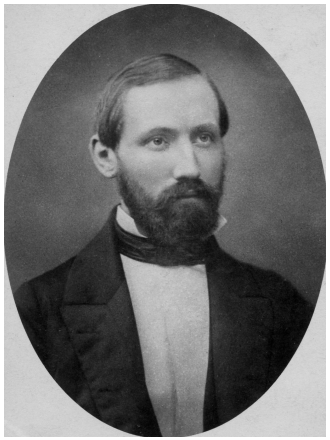
$\mathscr{R}$-integrál sa dá zaviesť každým z nasledujúcich spôsobov:

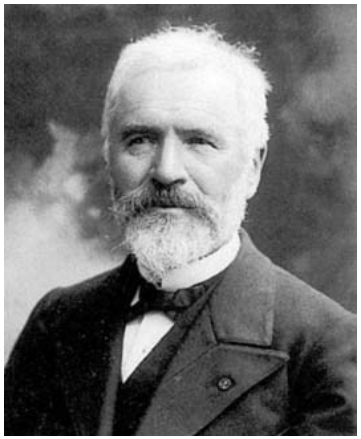
(a) Darbouxova konštrukcia = spoločná hodnota horného a dolného $\mathscr{R}$-integrálu;

(b) limita horných a dolných Darbouxových súčtov pre ľubovoľnú postupnosť delení;

(c) limita horných a dolných Darbouxových súčtov pre normálnu postupnosť delení;

(d) Riemannova-Cauchyho definícia = špeciálna limita integrálnych súčtov.



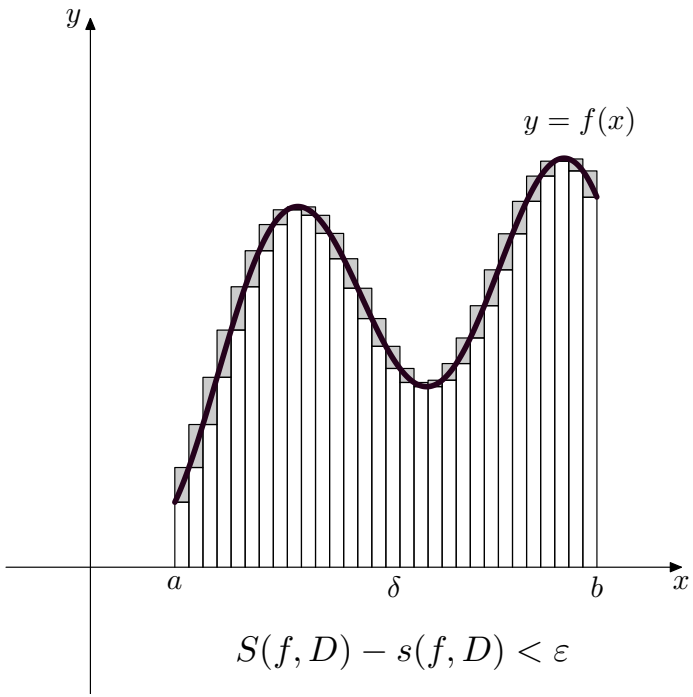


I feel, however, that the manner in which the criterion of integrability was formulated leaves something to be desired.
Du Bois-Reymond: *Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Functionen* (1875)

Veta (Du Bois-Reymond, Darboux)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle, \nu(D) < \delta)\ S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$



PAUL DU BOIS-REYMOND (1831–1889)

Toute fonction continue est susceptible d'integration.

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Veta (o triedach $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií)

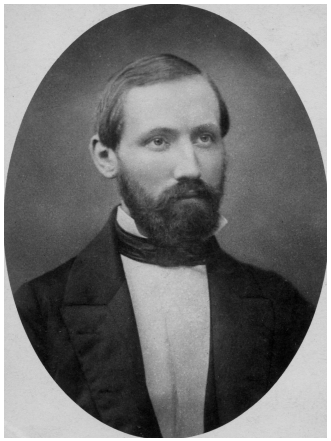
Funkcia f je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ v každom z nasledujúcich prípadov

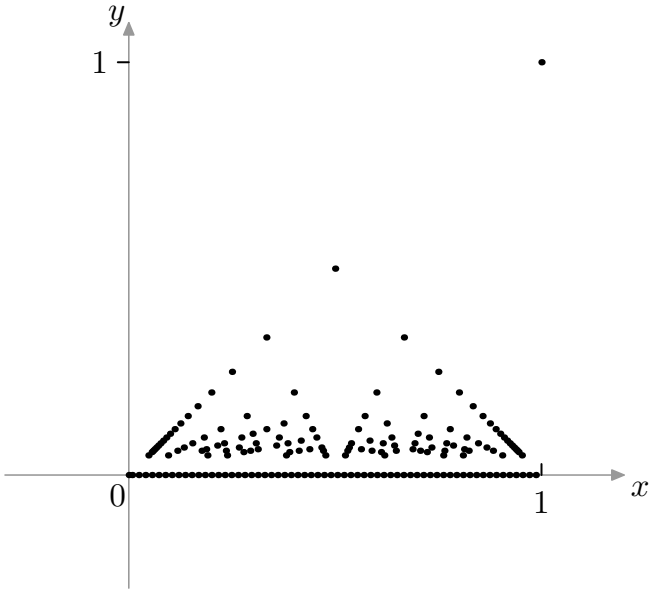
(i) f je monotónna na $\langle a, b\rangle$;

(ii) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, t.j. $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$.

Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht?

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)





Toute fonction continue est susceptible d'integration.

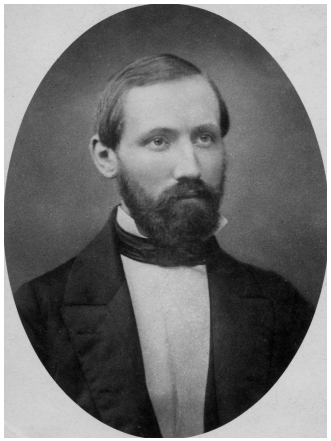
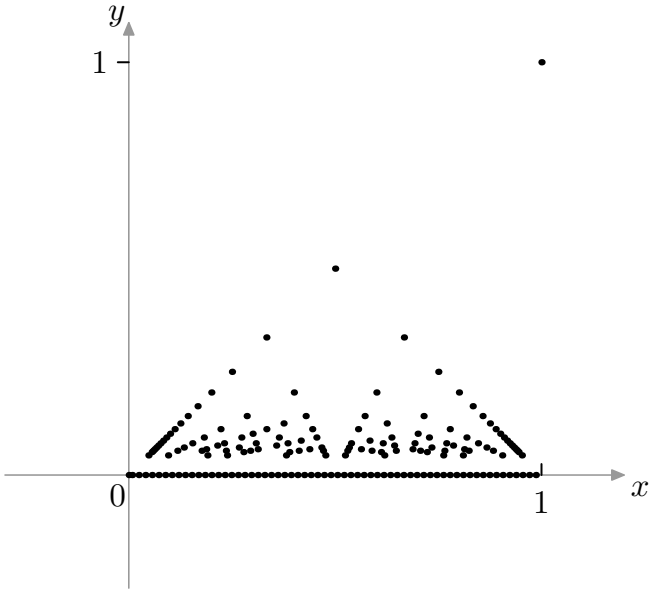
Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Veta (o triedach $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií)

Funkcia f je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ v každom z nasledujúcich prípadov

(i) f je monotónna na $\langle a, b\rangle$;

(ii) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, t.j. $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$.

Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht?

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)