Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 4

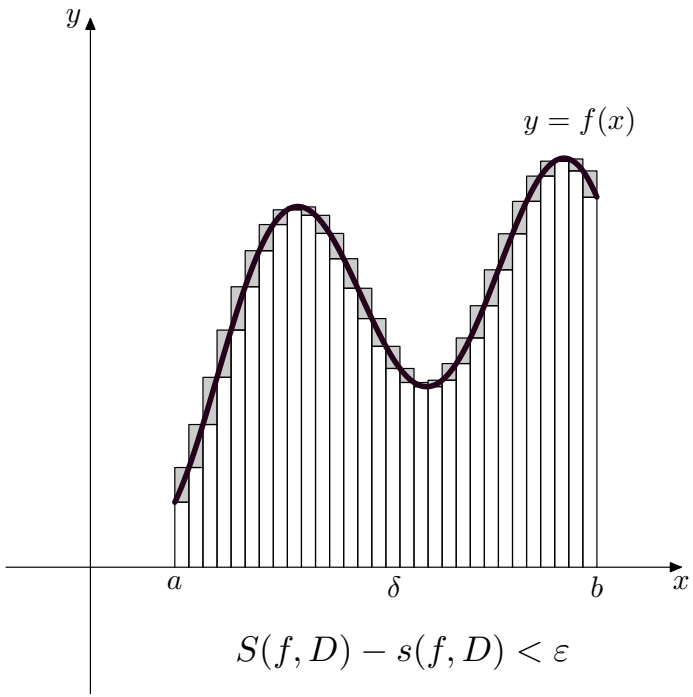
13. októbra 2023

I feel, however, that the manner in which the criterion of integrability was formulated leaves something to be desired.
Du Bois-Reymond: *Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Functionen* (1875)

Veta (Du Bois-Reymond, Darboux)

Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle, \nu(D) < \delta)\ S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$



PAUL DU BOIS-REYMOND (1831–1889)

Toute fonction continue est susceptible d'integration.

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Veta (o triedach $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií)

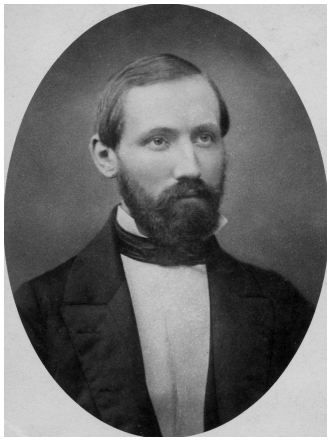
Funkcia f je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ v každom z nasledujúcich prípadov

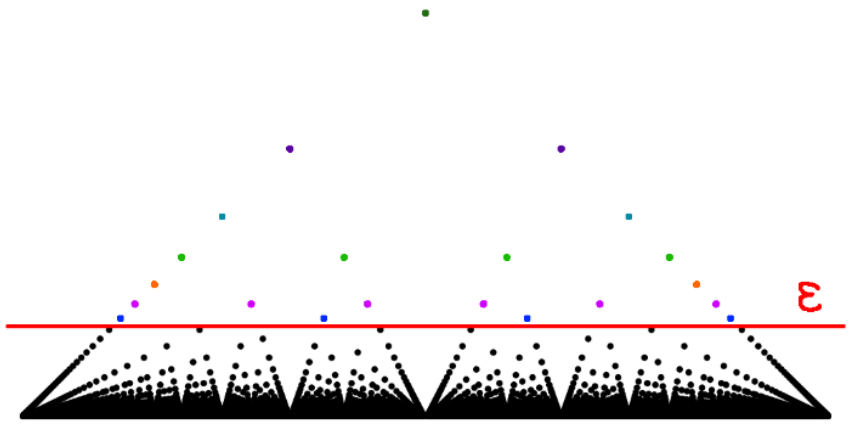
(i) f je monotónna na $\langle a, b\rangle$;

(ii) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, t.j. $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$.

Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht? [...] Da diese Functionen nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem Beispiele auszugehen.

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)





Toute fonction continue est susceptible d'integration.

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Veta (o triedach $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií)

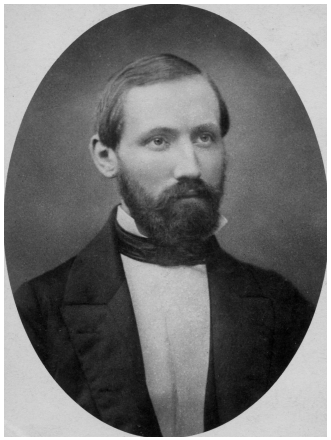
Funkcia f je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ v každom z nasledujúcich prípadov

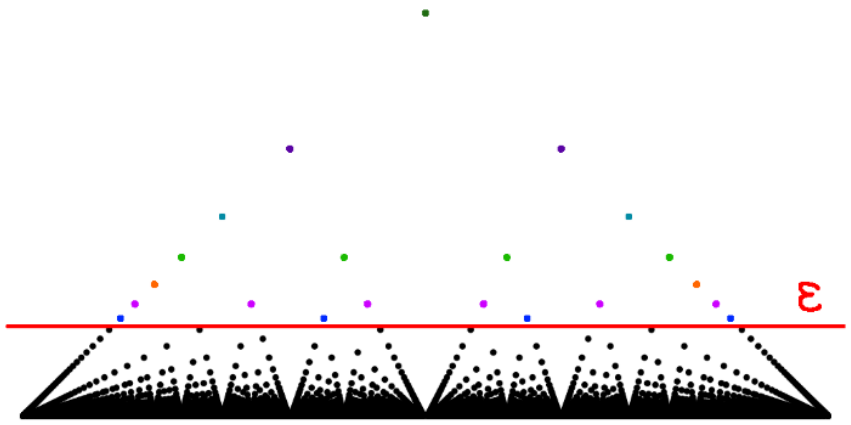
(i) f je monotónna na $\langle a, b\rangle$;

(ii) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, t.j. $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$.

Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht? [...] Da diese Functionen nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem Beispiele auszugehen.

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)





Toute fonction continue est susceptible d'integration.

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Veta (o triedach $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií)

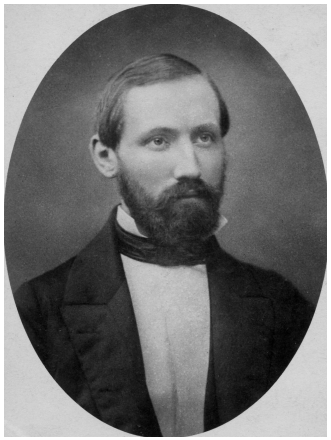
Funkcia f je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ v každom z nasledujúcich prípadov

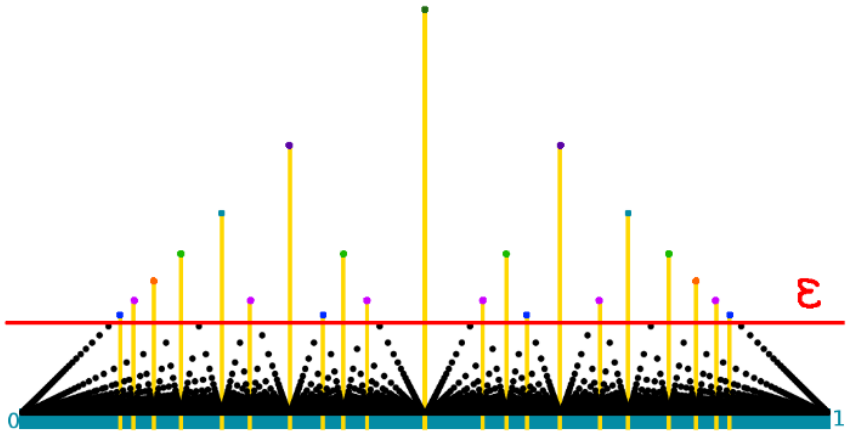
(i) f je monotónna na $\langle a, b\rangle$;

(ii) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, t.j. $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$.

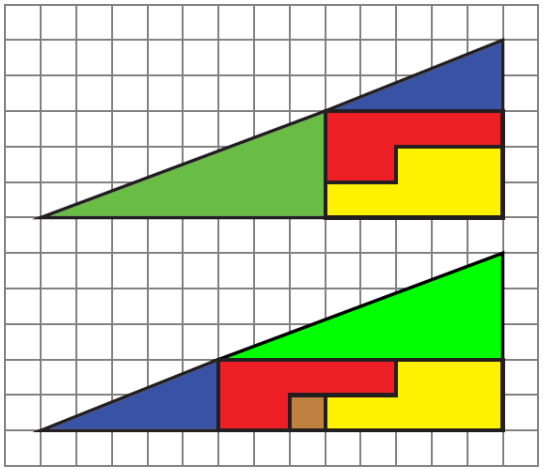
Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht? [...] Da diese Functionen nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem Beispiele auszugehen.

Riemann: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854)





Measure Problem = Ako merať útvary?



Zákony „dĺžkodynamiky“:

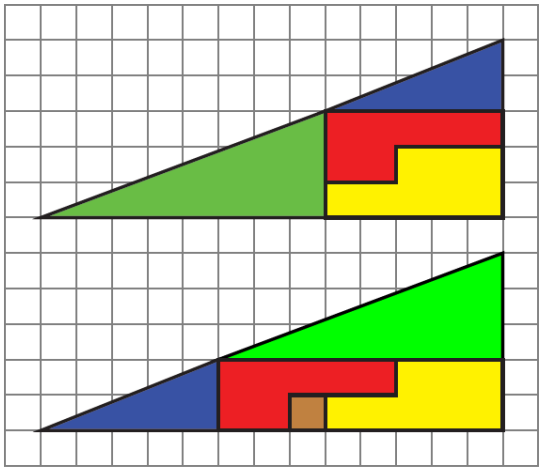
0. Totálnosť: Každá podmnožina $\mathbb{R}$ má dobre definovanú mieru $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$.
1. Spočítateľná aditivita: Ak $E_1, E_2, \dots \subseteq \mathbb{R}$, tak
$$m\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n m(E_n).$$
2. Translačná invariantnosť: Pre každú $E \subseteq \mathbb{R}$ a každé $\delta > 0$ je $m(E + \delta) = m(E)$, kde $E + \delta = \{x + \delta; x \in E\}$.
3. Normalizácia: $m([0, 1]) = 1$

> The problem of measure of groups of points on a line is impossible [...] our result implies that the possibility of the measure problem of groups of points on a line and that of well-ordering the continuum cannot coexist.
>
> Vitali: *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta* (1905)

Vitaliho veta (1905)

Neexistuje funkcia $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$, ktorá vyhovuje 1., 2. a 3. zákonu.

Measure Problem = Ako merať útvary?



Zákony „dĺžkodynamiky“:

0. Totálnosť: Každá podmnožina $\mathbb{R}$ má dobre definovanú mieru $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$.
1. Spočítateľná aditivita: Ak $E_1, E_2, \dots \subseteq \mathbb{R}$, tak
$$m\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n m(E_n).$$
2. Translačná invariantnosť: Pre každú $E \subseteq \mathbb{R}$ a každé $\delta > 0$ je $m(E + \delta) = m(E)$, kde $E + \delta = \{x + \delta; x \in E\}$.
3. Normalizácia: $m([0, 1]) = 1$

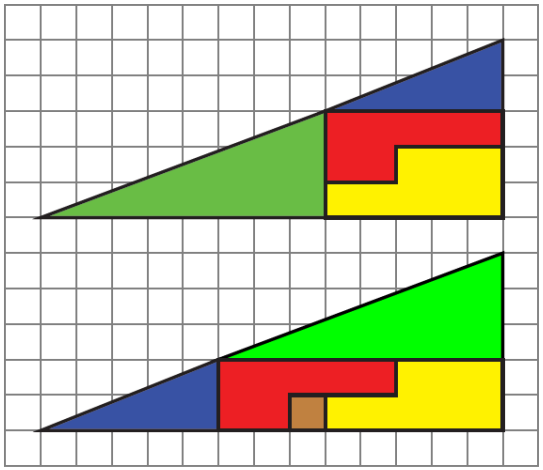
The problem of measure of groups of points on a line is impossible [...] our result implies that the possibility of the measure problem of groups of points on a line and that of well-ordering the continuum cannot coexist.

Vitali: *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta* (1905)

Vitaliho veta (1905)

Neexistuje funkcia $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$, ktorá vyhovuje 1., 2. a 3. zákonu.

Measure Problem = Ako merať útvary?



Zákony „dĺžkodynamiky“:

0. Totálnosť: Každá podmnožina $\mathbb{R}$ má dobre definovanú mieru $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$.
1. Spočítateľná aditivita: Ak $E_1, E_2, \dots \subseteq \mathbb{R}$, tak
$$m\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n m(E_n).$$
2. Translačná invariantnosť: Pre každú $E \subseteq \mathbb{R}$ a každé $\delta > 0$ je $m(E + \delta) = m(E)$, kde $E + \delta = \{x + \delta; x \in E\}$.
3. Normalizácia: $m([0, 1]) = 1$

The problem of measure of groups of points on a line is impossible [...] our result implies that the possibility of the measure problem of groups of points on a line and that of well-ordering the continuum cannot coexist.

Vitali: *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta* (1905)

Vitaliho veta (1905)

Neexistuje funkcia $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$, ktorá vyhovuje 1., 2. a 3. zákonu.

Measure Problem – čiastočné riešenie

... the role that functions have in definite integrals is clear and has been well understood but that the influence that the sets on which the functions are defined has on the definite integral needs to be researched in much greater depth...

Jordan: *Remarques sur les intégrales définies* (1892)

Definícia – množina Jordanovej miery nula

Hovoríme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ má Jordanovu mieru nula, akk

(i) ku každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet uzavretých intervalov $J_1, \dots, J_n$ takých, že súčet ich dĺžok je menší ako ε;

(ii) pre každé $x \in M$ existuje J_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ taký, že x je vnútorný bod J_j.

- konečná množina $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$
- M je množina členov konvergentnej postupnosti

Poznámka: obvykle sa v literatúre používa termín Jordanova merateľnosť, t.j. ohraničená množina $M \subseteq \langle a, b \rangle$ je Jordanovsky merateľná, akk $\chi_M \in \mathscr{R}\langle a, b \rangle$

Measure Problem – čiastočné riešenie

... the role that functions have in definite integrals is clear and has been well understood but that the influence that the sets on which the functions are defined has on the definite integral needs to be researched in much greater depth...

Jordan: *Remarques sur les intégrales définies* (1892)

Definícia – množina Jordanovej miery nula

Hovoríme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ má Jordanovu mieru nula, akk

(i) ku každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet uzavretých intervalov $J_1, \dots, J_n$ takých, že súčet ich dĺžok je menší ako ε;

(ii) pre každé $x \in M$ existuje J_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ taký, že x je vnútorný bod J_j.

- konečná množina $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$
- M je množina členov konvergentnej postupnosti

Poznámka: obvykle sa v literatúre používa termín Jordanova merateľnosť, t.j. ohraničená množina $M \subseteq \langle a, b \rangle$ je Jordanovsky merateľná, akk $\chi_M \in \mathscr{R}\langle a, b \rangle$

Measure Problem – čiastočné riešenie

... the role that functions have in definite integrals is clear and has been well understood but that the influence that the sets on which the functions are defined has on the definite integral needs to be researched in much greater depth...

Jordan: *Remarques sur les intégrales définies* (1892)

Definícia – množina Jordanovej miery nula

Hovoríme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ má Jordanovu mieru nula, akk

(i) ku každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet uzavretých intervalov $J_1, \dots, J_n$ takých, že súčet ich dĺžok je menší ako ε;

(ii) pre každé $x \in M$ existuje J_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ taký, že x je vnútorný bod J_j.

- konečná množina $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$
- M je množina členov konvergentnej postupnosti

Poznámka: obvykle sa v literatúre používa termín Jordanova merateľnosť, t.j. ohraničená množina $M \subseteq \langle a, b \rangle$ je Jordanovsky merateľná, akk $\chi_M \in \mathscr{R}\langle a, b \rangle$

Measure Problem – čiastočné riešenie

... the role that functions have in definite integrals is clear and has been well understood but that the influence that the sets on which the functions are defined has on the definite integral needs to be researched in much greater depth...

Jordan: *Remarques sur les intégrales définies* (1892)

Definícia – množina Jordanovej miery nula

Hovoríme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ má Jordanovu mieru nula, akk

(i) ku každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet uzavretých intervalov $J_1, \dots, J_n$ takých, že súčet ich dĺžok je menší ako ε;

(ii) pre každé $x \in M$ existuje J_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ taký, že x je vnútorný bod J_j.

- konečná množina $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$
- M je množina členov konvergentnej postupnosti

Poznámka: obvykle sa v literatúre používa termín Jordanova merateľnosť, t.j. ohraničená množina $M \subseteq \langle a, b \rangle$ je Jordanovsky merateľná, akk $\chi_M \in \mathscr{R}\langle a, b \rangle$

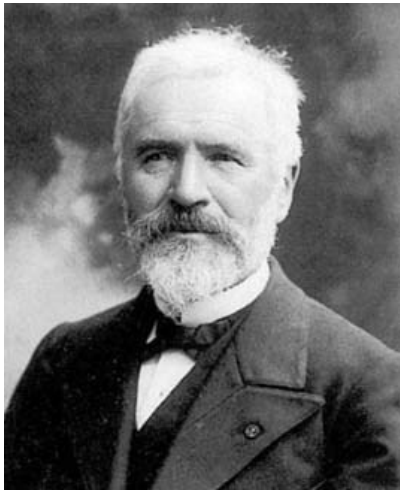
Veta VI.2

Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ s výnimkou množiny bodov Jordanovej miery nula, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Dôsledok

(i) Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečnej množiny bodov, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

(ii) Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a postupnosť bodov nespojitosti funkcie f je konvergentná v $\langle a, b\rangle$, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.



Remarques sur les intégrales définies;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

L'intégrale définie (simple ou multiple) d'une fonction f dans un champ E s'obtient, comme on sait (lorsque le champ et les valeurs de la fonction sont bornés), de la manière suivante :

On décompose le champ en éléments infiniment petits dans tous les sens; on multiplie l'étendue $d\sigma$ de chacun de ces éléments par la valeur de f en un point choisi à volonté dans l'élément; et l'on cherche la limite de la somme $\sum f\, d\sigma$ ainsi formée.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922)

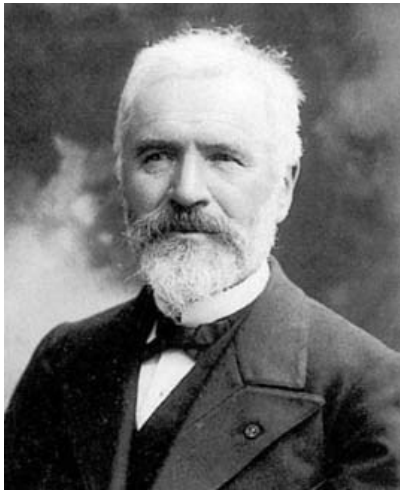
Veta VI.2

Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ s výnimkou množiny bodov Jordanovej miery nula, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Dôsledok

(i) Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečnej množiny bodov, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

(ii) Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a postupnosť bodov nespojitosti funkcie f je konvergentná v $\langle a, b\rangle$, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.



Remarques sur les intégrales définies;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

L'intégrale définie (simple ou multiple) d'une fonction f dans un champ E s'obtient, comme on sait (lorsque le champ et les valeurs de la fonction sont bornés), de la manière suivante :

On décompose le champ en éléments infiniment petits dans tous les sens; on multiplie l'étendue $d\sigma$ de chacun de ces éléments par la valeur de f en un point choisi à volonté dans l'élément; et l'on cherche la limite de la somme $\sum f\, d\sigma$ ainsi formée.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922)

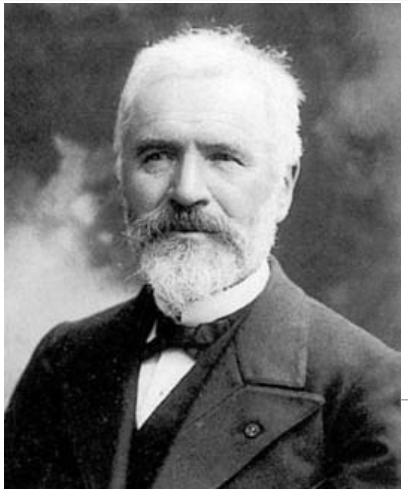
Veta VI.2

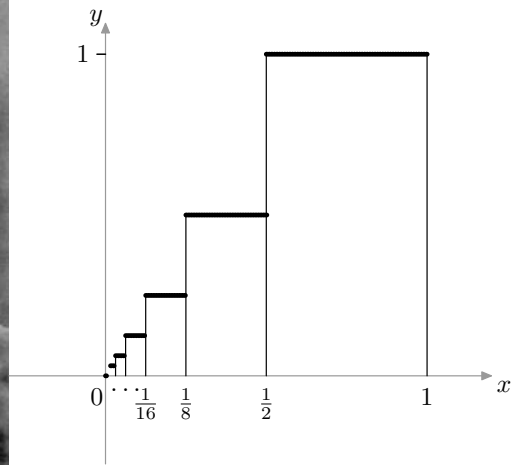
Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ s výnimkou množiny bodov Jordanovej miery nula, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

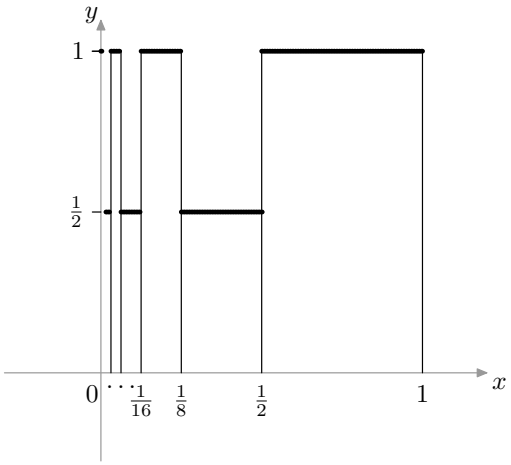
Dôsledok

(i) Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečnej množiny bodov, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

(ii) Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a postupnosť bodov nespojitosti funkcie f je konvergentná v $\langle a, b\rangle$, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.







MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922)

Elementárne (očakávané) vlastnosti integrálu

Pozorovanie: $\mathscr{N}$-integrál je monotónny lineárny aditívny funkcionál.
Otázka: Ktoré z týchto vlastností má $\mathscr{R}$-integrál?

Veta (o linearite $\mathscr{R}$-integrálu)

Množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je lineárny vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Detailne: Ak $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak $\alpha f, f + g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (\mathscr{R})\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta (o monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu)

$\mathscr{R}$-integrál je nezáporný monotónny funkcionál.

Detailne:

(i) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$ a $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$ a $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Elementárne (očakávané) vlastnosti integrálu

Pozorovanie: $\mathscr{N}$-integrál je monotónny lineárny aditívny funkcionál.
Otázka: Ktoré z týchto vlastností má $\mathscr{R}$-integrál?

Veta (o linearite $\mathscr{R}$-integrálu)

Množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je lineárny vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Detailne: Ak $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak $\alpha f, f + g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (\mathscr{R})\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta (o monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu)

$\mathscr{R}$-integrál je nezáporný monotónny funkcionál.

Detailne:

(i) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$ a $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$ a $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Elementárne (očakávané) vlastnosti integrálu

Pozorovanie: $\mathscr{N}$-integrál je monotónny lineárny aditívny funkcionál.
Otázka: Ktoré z týchto vlastností má $\mathscr{R}$-integrál?

Veta (o linearite $\mathscr{R}$-integrálu)

Množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je lineárny vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Detailne: Ak $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak $\alpha f, f + g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (\mathscr{R})\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta (o monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu)

$\mathscr{R}$-integrál je nezáporný monotónny funkcionál.

Detailne:

(i) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$ a $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$ a $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Elementárne (očakávané) vlastnosti integrálu

Pozorovanie: $\mathscr{N}$-integrál je monotónny lineárny aditívny funkcionál.
Otázka: Ktoré z týchto vlastností má $\mathscr{R}$-integrál?

Veta (o linearite $\mathscr{R}$-integrálu)

Množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je lineárny vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Detailne: Ak $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak $\alpha f, f + g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (\mathscr{R})\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta (o monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu)

$\mathscr{R}$-integrál je nezáporný monotónny funkcionál.

Detailne:

(i) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$ a $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$ a $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Elementárne (očakávané) vlastnosti integrálu

Pozorovanie: $\mathscr{N}$-integrál je monotónny lineárny aditívny funkcionál.
Otázka: Ktoré z týchto vlastností má $\mathscr{R}$-integrál?

Veta (o linearite $\mathscr{R}$-integrálu)

Množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je lineárny vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Detailne: Ak $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak $\alpha f, f + g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (\mathscr{R})\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta (o monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu)

$\mathscr{R}$-integrál je nezáporný monotónny funkcionál.

Detailne:

(i) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$ a $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$ a $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Elementárne (očakávané) vlastnosti integrálu

Pozorovanie: $\mathscr{N}$-integrál je monotónny lineárny aditívny funkcionál.
Otázka: Ktoré z týchto vlastností má $\mathscr{R}$-integrál?

Veta (o linearite $\mathscr{R}$-integrálu)

Množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je lineárny vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

Detailne: Ak $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, tak $\alpha f, f + g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (\mathscr{R})\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta (o monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu)

$\mathscr{R}$-integrál je nezáporný monotónny funkcionál.

Detailne:

(i) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$ a $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$ a $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Elementárne (očakávané) vlastnosti integrálu

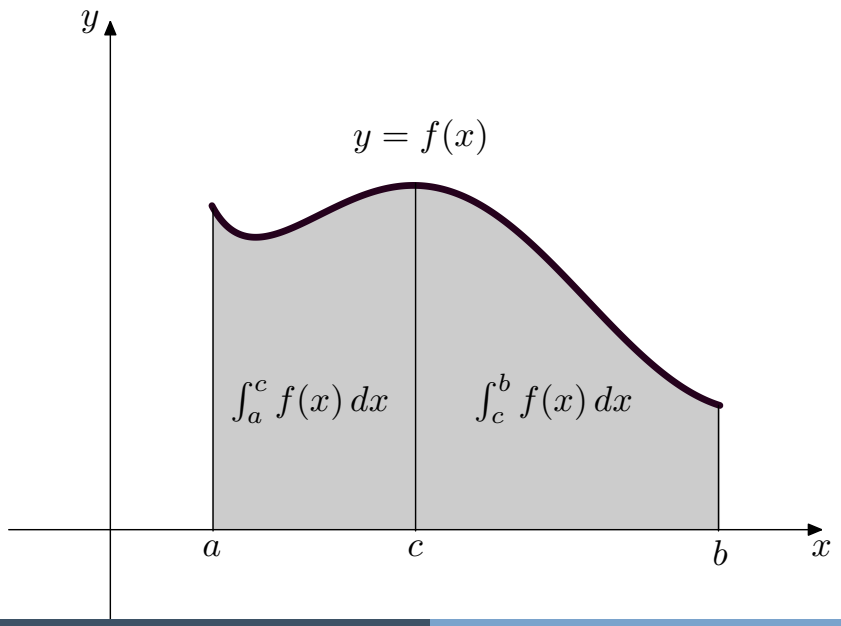
Pozorovanie: $\mathscr{N}$-integrál je monotónny lineárny aditívny funkcionál.
Otázka: Ktoré z týchto vlastností má $\mathscr{R}$-integrál?

Veta (o aditivite $\mathscr{R}$-integrálu)

$\mathscr{R}$-integrál je aditívny funkcionál.

Detailne: Nech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď $f \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$ a $f \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$. Naviac platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Elementárne (očakávané) vlastnosti integrálu

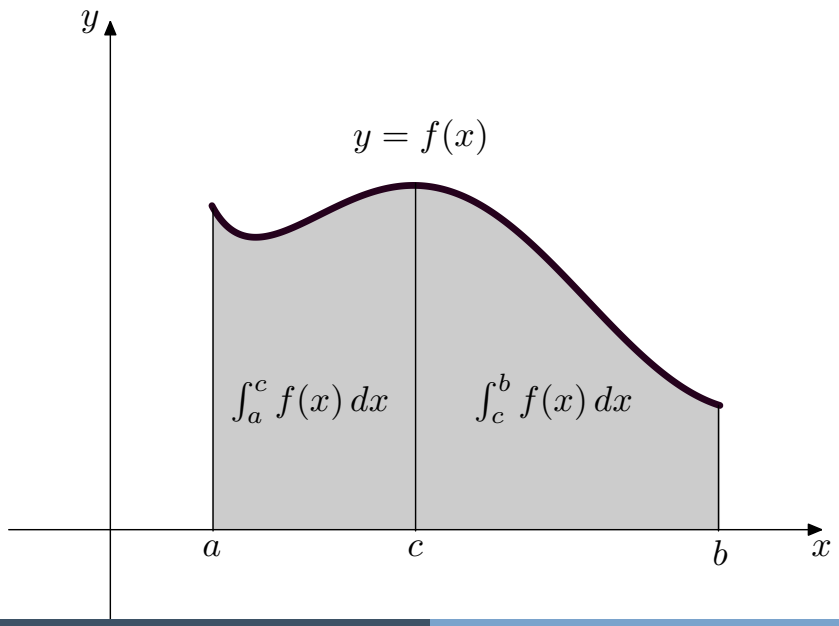
Pozorovanie: $\mathscr{N}$-integrál je monotónny lineárny aditívny funkcionál.
Otázka: Ktoré z týchto vlastností má $\mathscr{R}$-integrál?

Veta (o aditivite $\mathscr{R}$-integrálu)

$\mathscr{R}$-integrál je aditívny funkcionál.

Detailne: Nech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď $f \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$ a $f \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$. Naviac platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



(Prirodzené) rozšírenie definície $\mathscr{R}$-integrálu

Si cette condition est remplie, la limitede $\sum$ est dite l'intégrale de $f(x)$ entre les limites a, b. On a

$$\lim \sum = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Pozorovania:

- Pre $a = b$ je $S(f, D) = s(f, D) = 0$ pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.
- Pre $a < b$ sa integrálny súčet pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ líši od integrálneho súčtu pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ len znamienkom, preto aj limity sa líšia len o znamienko.

Definícia – rozšírenie $\mathscr{R}$-integrálu

Ak f je definovaná v bode a, potom definujeme $(\mathscr{R})\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom

$$(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a < b.$$

(Prirodzené) rozšírenie definície $\mathscr{R}$-integrálu

Si cette condition est remplie, la limitede $\sum$ est dite l'intégrale de $f(x)$ entre les limites a, b. On a

$$\lim \sum = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Pozorovania:

- Pre $a = b$ je $S(f, D) = s(f, D) = 0$ pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.
- Pre $a < b$ sa integrálny súčet pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ líši od integrálneho súčtu pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ len znamienkom, preto aj limity sa líšia len o znamienko.

Definícia – rozšírenie $\mathscr{R}$-integrálu

Ak f je definovaná v bode a, potom definujeme $(\mathscr{R})\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom

$$(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a < b.$$

(Prirodzené) rozšírenie definície $\mathscr{R}$-integrálu

Si cette condition est remplie, la limitede $\sum$ est dite l'intégrale de $f(x)$ entre les limites a, b. On a

$$\lim \sum = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Pozorovania:

- Pre $a = b$ je $S(f, D) = s(f, D) = 0$ pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.
- Pre $a < b$ sa integrálny súčet pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ líši od integrálneho súčtu pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ len znamienkom, preto aj limity sa líšia len o znamienko.

Definícia – rozšírenie $\mathscr{R}$-integrálu

Ak f je definovaná v bode a, potom definujeme $(\mathscr{R})\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom

$$(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a < b.$$

(Prirodzené) rozšírenie definície $\mathscr{R}$-integrálu

Si cette condition est remplie, la limitede $\sum$ est dite l'intégrale de $f(x)$ entre les limites a, b. On a

$$\lim \sum = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Pozorovania:

- Pre $a = b$ je $S(f, D) = s(f, D) = 0$ pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$.
- Pre $a < b$ sa integrálny súčet pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ líši od integrálneho súčtu pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ len znamienkom, preto aj limity sa líšia len o znamienko.

Definícia – rozšírenie $\mathscr{R}$-integrálu

Ak f je definovaná v bode a, potom definujeme $(\mathscr{R})\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom

$$(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a < b.$$